Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

К ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР

Н. Н. Красовский

(Свердловск)

В статье даются леммы, поясняющие возможности аппроксимационных экстремальных стратегий в дифференциальной игре навстречу с заданным множеством M. Работа примыкает к исследованиям [1-14].

§ 1. Рассмотрим управляемую систему, описываемую дифференциальным уравнением

$$dx/dt = f^{(1)}(t, x, u) + f^{(2)}(t, x, v) \tag{1.1}$$

Здесь x, n — мерный фазовый вектор системы; u, v, r — мерные векторы управляющих сил, подчиненные первому и второму игрокам соответственно. Реализации $u[t]$ и $v[t]$ управлений u и v стеснены условием

$$u[t] \in U, \qquad v[t] \in V \tag{1.2}$$

где U и V — ограниченные замкнутые множества; функции $f^{(i)}$ непрерывны по всем аргументам и удовлетворяют условиям Липшица по x. (Квадратные скобки, заключающие аргумент t, будут подчеркивать, что речь идет о реализациях соответствующих функций в процессе игры; напротив, круглые скобки, заключающие аргумент t, как правило, будут использоваться для изображения функций, фигурирующих во вспомогательных конструкциях.)

Цель статьи — обсудить некоторые аспекты конфликтной задачи о сближении точки $x[t]$ с заданным замкнутым множеством M: первый игрок имеет задачей сближение, второй — препятствует сближению. Уточним задачу.

Будем рассматривать стратегии $\mathbf{U}$, которые формируют управления $u_\Delta[t]$, сохраняющие постоянное значение на некоторых достаточно малых полуинтервалах $[\tau_i, \tau_{i+1})$. Именно будем говорить, что выбрана стратегия (аппроксимационная стратегия $\mathbf{U}$), если для всякого достаточно малого $\Delta > 0$ каждой паре $\{t, x\}$ $(t_0 \leqslant t < \vartheta,\ -\infty < x_i < \infty,\ i = 1, 2, \ldots, n)$ сопоставлено векторное множество $U_\Delta(t, x) \subset U$. Стратегия $\mathbf{U}$ формирует Δ — управления $u_\Delta[t]$ следующим образом.

Введем в рассмотрение полуинтервал $[t_0, \vartheta)$, покрытый системой полуинтервалов $[\tau_i, \tau_{i+1})$ $(i = 0, 1, 2, \ldots;\ \tau_0 = t_0,\ \max(\tau_{i+1} - \tau_i) = \Delta)$. Тогда

$$u_\Delta[t] = u_\Delta[\tau_i] \in U_\Delta(\tau_i, x[\tau_i]) \qquad (\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}) \tag{1.3}$$

где $x[\tau_i]$ — то фазовое состояние системы (1.1), которое реализуется в момент $t = \tau_i$ под действием управления $u_\Delta [t]$ и какого-то реализованного вторым игроком управления $v [t]$ на предыдущем полуинтервале времени $[t_0, \tau_i)$. Выбор управления $u_\Delta[\tau_i]$ из множества $U_\Delta (\tau_i, x [\tau_i])$ остается произвольным.

Обозначим символом $\rho (x, M)$ расстояние от точки x до множества M. Интегрируемые функции $u (t)$ и $v (t)$, удовлетворяющие условиям $u (t) \in U$ и $v (t) \in V$, будем именовать допустимыми.

Скажем, что при данном начальном условии $x [t_0] = x_0$ стратегия U гарантирует сближение точки $x [t]$ с множеством M в момент ϑ, если движения $x [t]$, порожденные этой стратегией, удовлетворяют условию

$$\lim_{\Delta\to 0} \sup_{v[t]} \sup_{u_\Delta} \sup \rho (x [\vartheta], M) = 0 \tag{1.4}$$

Скажем, что при данном $x [t_0] = x_0$ стратегия U гарантирует сближение точки $x [t]$ с множеством M не позже, чем к моменту $\vartheta > t_0$, если движения $x [t]$, порожденные этой стратегией, удовлетворяют условию

$$\lim_{\Delta\to 0} \sup_{v[t]} \sup_{u_\Delta} \sup \inf_{t} \rho (x [t], M) = 0 \tag{1.5}$$

Здесь верхние грани вычисляются по всем возможным допустимым реализациям $v [t]$ и по всем возможным управлениям $u_\Delta [t]$ (1.3), отвечающим данной стратегии U; нижняя грань в (1.5) вычисляется по всем t из отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$.

Задача состоит в построении стратегии U, которая гарантирует сближение точки $x [t]$ с множеством M в некоторый момент ϑ или не позже, чем к некоторому моменту ϑ.

§ 2. Введем сначала некоторые наименования и обозначения. Пусть каждому значению t из некоторого отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ сопоставлено замкнутое множество $W (t)$ в пространстве $\{x\}$. Скажем, что множества $W (t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ сильно стабильны, если выполнено следующее условие

Условие 2.1. Каковы бы ни были значения t_* из полуинтервала $[t_0, \vartheta)$ точка x_* из множества $W (t_*)$ и число Δ из полуинтервала $(0, \min \{\Delta_0, \vartheta - t_*\}]$ (Δ_0 — достаточно малая положительная постоянная) для любой допустимой функции $v (t)$ $(t_* \leqslant t < t_* + \Delta)$ можно подобрать допустимую функцию $u (t)$ $(t_* \leqslant t < t_* + \Delta)$ такую, что пара управлений $\{u (t), v (t)\}$ переведет систему (1.1) из положения $x (t_*) = x_*$ в состояние $x (t_* + \Delta) \in W (t_* + \Delta)$.

Пусть $M \subset W (t)$. Назовем множества $W (t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ стабильными, если будет выполнено следующее условие.

Условие 2.2. Каковы бы ни были значения t_* из полуинтервала $[t_0, \vartheta)$, точка x_* из множества $W (t_*)$ и число Δ из полуинтервала $(0, \min \{\Delta_0, \vartheta - t_*, \xi\rho (x_*, M)\}]$ (Δ_0 и ξ — достаточно малые положительные постоянные) для любой допустимой функции $v (t)$ $(t_* \leqslant t < t_* + \Delta)$ можно подобрать допустимую функцию $u (t)$ $(t_* \leqslant t < t_* + \Delta)$ такую, что пара управлений $\{u (t), v (t)\}$ переведет систему (1.1) из положения $x (t_*) = x_*$ в состояние $x (t_* + \Delta) \in W (t_* + \Delta)$.

Обозначим

$$\varepsilon^{\circ}(\mathbf{U}) = \lim_{\Delta\to 0}\sup_{v(t)}\sup_{u_\Delta}\sup_{t}\sup \rho(x[t], W(t)) \tag{2.1}$$

$$\varepsilon_0(\mathbf{U}) = \lim_{\Delta\to 0}\sup_{v(t)}\sup_{u_\Delta}\sup_{t}\inf \rho(x[t], M) \tag{2.2}$$

Здесь нижняя или верхние грани вычисляются по всем t их отрезка $[t_0, \vartheta]$, по всем допустимым реализациям $v(t)$ и по всем возможным Δ — управлениям $u_\Delta[t]$ (1.3), отвечающим стратегии $\mathbf{U}$.

Построим экстремальную аппроксимационную стратегию $\mathbf{U}^{(e)}$, базирующуюся на системах множеств $W(t)$, которые удовлетворяют условиям 2.1 или 2.2 соответственно. Множества $U_\Delta^{(e)}(t, x)$, отвечающие стратегии $\mathbf{U}^{(e)}$, сконструируем следующим образом. Если точка x содержится во множестве $W(t)$, то полагаем

$$U_\Delta^{(e)}(t, x) = U \tag{2.3}$$

Если же точка x не содержится во множестве $W(t)$, то поступаем так. Выделим в совокупности $W(t)$ множество Q всех точек q, ближайших к точке x. Символом S обозначим множество всех единичных векторов s, направленных из точки x на точки q из Q. Теперь в качестве $U_\Delta^{(e)}(t, x)$ выберем множество всех векторов $u = u^e$ из U, которые удовлетворяют условию

$$s'f^{(1)}(t, x, u^e) = \max s'f^{(1)}(t, x, u) \qquad (u \in U) \tag{2.4}$$

по крайней мере при одном s из S (штрих здесь и ниже означает транспонирование).

Таким образом, согласно (2.4) управление $u_\Delta[t]$ (1.3) назначается экстремальной стратегией $\mathbf{U}^{(e)}$ из условия максимально возможного сдвига фазовой точки $x[t]$ в направлении ко множеству $W(t)$.

§ 3. Справедливо утверждение.

Лемма 3.1. Пусть $x[t_0] = x_0 \in W(t_0)$. Если множества $W(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ сильно стабильны, то экстремальная стратегия $\mathbf{U}^{(e)}$ обеспечивает равенство

$$\varepsilon^{\circ}(\mathbf{U}^{(e)}) = 0 \tag{3.1}$$

Иначе говоря, утверждается, что в случае сильной стабильности множеств $W(t)$ при всех достаточно малых значениях $\Delta > 0$ управления $u_\Delta[t]$, назначаемые экстремальной стратегией $\mathbf{U}^{(e)}$, обеспечивают сохранение фазовой точки $x[t]$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ в произвольно малой, оговоренной наперед близости от множеств $W(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$, как бы ни действовал допустимым образом второй игрок.

Проверка условия (3.1) опирается на следующую оценку. Обозначим $\varepsilon[t] = \rho(x[t], M)$, где $x[t]$ — движение, порожденное управлением $u_\Delta^e[t]$, отвечающим стратегии $\mathbf{U}^{(e)}$, и каким-либо произвольным допустимым управлением v, реализующимся в виде интегрируемой функции $v_*[t] \in V$. Пусть в некоторый момент $t = \tau_i$ реализовалось состояние $x[\tau_i]$, причем точка $x[\tau_i]$ не содержится во множестве $W(\tau_i)$.

Предположим на время, что в момент $t = \tau_i$ система (1.1) оказалась в состоянии $x = x_*(\tau_i) = q$, где q — как раз та точка из множества Q, на которую направлен вектор s из условия (2.4) (при $t = \tau_i$ и $x = x[\tau_i]$).

Тогда по условию 2.1 для управления $v_*[t]$ $(\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1})$ можно было бы подобрать управление $u_*(t)$ $(\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1})$ такое, что пара управлений $\{u_*(t), v_*[t]\}$ перевела бы систему (1.1) из положения $x_*(\tau_i) = q \in W(\tau_i)$ в состояние $x_*(\tau_{i+1}) \in \in W(\tau_{i+1})$.

Отсюда выводится, что та же пара управлений $\{u_*(t), v_*[t]\}$ перевела бы систему (1.1) из реализовавшегося на деле состояния $x[\tau_i]$ в такое состояние $x^*(\tau_{i+1})$, для которого выполнялось бы условие

$$\rho(x^*(\tau_{i+1}), W(\tau_{i+1})) \leqslant \varepsilon[\tau_i] + \lambda\varepsilon[\tau_i](\tau_{i+1} - \tau_i) + o(\tau_{i+1} - \tau_i) \tag{3.2}$$

где λ — постоянная и символ $o(\alpha)$ обозначает бесконечно малую более высокого порядка, чем α. Но замена управления $u_*(t)$ на управление

$$u_\Delta^{(e)}[t] = u_\Delta^{(e)}[\tau_i] \in U_\Delta^{(e)}(\tau_i, x[\tau_i]) \quad (\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1})$$

удовлетворяющее условию максимума (2.4), может ухудшить оценку (3.2), разве что на величину $o(\tau_{i+1} - \tau_i)$. Таким образом, справедливо неравенство

$$\rho(x[\tau_{i+1}], W(\tau_{i+1})) = \varepsilon[\tau_{i+1}] \leqslant \varepsilon[\tau_i] + \lambda\varepsilon[\tau_i](\tau_{i+1} - \tau_i) + o(\tau_{i+1} - \tau_i) \tag{3.3}$$

из которого и выводится справедливость леммы 3.1. (При этом учитывается еще, что справедлива оценка

$$\rho(x[\tau_i], x[\tau_{i+1}]) = O(\tau_{i+1} - \tau_i) \tag{3.4}$$

каковы бы ни были $u(t) \in U$, $v(t) \in V$. Здесь $O(\alpha)$ — бесконечно малая, порядок которой не ниже, чем порядок α).

Те же самые оценки позволяют проверить и справедливость следующей леммы.

Лемма 3.2. Пусть $M \subset W(t)$, $W(\vartheta) = M$ и $x[t_0] = x_0 \in W(t_0)$. Если множества $W(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ стабильны, то экстремальная стратегия обеспечивает равенство

$$\varepsilon_0(\mathbf{U}^{(e)}) = 0 \tag{3.5}$$

Иначе говоря, утверждается, что в случае стабильности множеств $W(t)$ при всех достаточно малых значениях Δ управления $u_\Delta^{(e)}[t]$, назначаемые экстремальной стратегией $\mathbf{U}^{(e)}$, обеспечивают такое поведение фазовой точки $x[t]$, при котором она при $t \leqslant \vartheta$ по крайней мере один раз оказывается в произвольно малой, оговоренной наперед близости от множества M, как бы ни действовал допустимым образом второй игрок.

Примечание 3.1. Стратегия $\mathbf{U}^{(e)}$, построенная в § 2, носит характер аппроксимационной стратегии, порождающей кусочно-постоянное управление $u_\Delta^{(e)}[t]$ вида (1.3). Однако при известных условиях эту стратегию можно формализовать в рамках дифференциальных уравнений в контингенциях, подобно тому как это сделано в работах [10–12,18]. Пусть, в частности, для каждого состояния x, не содержащегося во множестве $W(t)$, вектор s, который фигурирует в условии (2.4), единствен. Обозначим символом $F^{(1)}(t, x)$ выпуклую оболочку множества, пробегаемого вектором $f^{(1)}(t, x, u)$, когда вектор u пробегает U. Символом $F^{(e)}(t, x)$ обозначим совокупность всех векторов $f = f^{(e)}$ из $F^{(1)}$, удовлетворяющих условию

$$s'f^{(e)} = \max s'f \qquad (f \in F^{(1)}) \tag{3.6}$$

если x не содержится в $W(t)$ и — только условию

$$f^{(e)} \in F^{(1)} \tag{3.7}$$

если $x \in W(t)$.

Движением $x[t]$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ системы (1.1) при каком-либо управлении $v = v[t]$ и при обобщенном управлении u, диктуемым стратегией $\mathrm{U}^{(e)}$, заданной множествами $F^{(e)}(t, x)$, будем называть всякую абсолютно непрерывную функцию $x[t]$, которая при почти всех значениях t удовлетворяет условию

$$\frac{dx[t]}{dt} \in F^{(e)}(t, x[t]) + f^{(2)}(t, x[t], v[t]) \tag{3.8}$$

(В правой части (3.8) фигурирует множество векторов f вида $f = f^{(e)} + f^{(2)}$ при $f^{(e)} \in F^{(e)}$.) Тогда при высказанном нами условии единственности вектора s, которое выполняется, например, если множества $W(t)$ выпуклы, описанная сейчас экстремальная стратегия $\mathrm{U}^{(e)}$ в случае сильной стабильности множеств $W(t)$ обеспечивает равенство

$$\rho(x[t], W(t)) = 0 \quad (t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta) \tag{3.9}$$

если только $x[t_0] \in W(t_0)$, как бы ни действовал второй игрок. Условие (3.9) обеспечивается экстремальной стратегией $\mathrm{U}^{(e)} \div F^{(e)}(t, x)$ и в тех случаях, когда второй игрок также пользуется какой-либо обобщенной стратегией V, которая описывается множествами $F^{(\mathrm{V})}(t, x)$ так, что движение $x[t]$ задается контингенцией

$$\frac{dx[t]}{dt} \in F^{(e)}(t, x[t]) + F^{(\mathrm{V})}(t, x[t]) \tag{3.10}$$

(Символ $\div$ означает соответствие между стратегией и задающими ее множествами).

Аналогичное замечание можно сделать и при условиях леммы 3.2, если также оговорить еще единственность вектора s из условия (1.3).

§ 4. Из лемм 3.1 и 3.2 вытекает, что для построения стратегии U, которая гарантировала бы сближение точки $x[t]$ с множеством M, можно воспользоваться конструкцией экстремальной стратегии $\mathrm{U}^{(e)}$, если только удастся найти множества $W(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$, удовлетворяющие условиям этих лемм (и еще условию $W(\vartheta) = M$ в случае леммы 3.1). Такие множества доставляются конструкциями, описанными, например, в работах [5–7], однако эффективное использование этих конструкций затруднительно. Подойдем к построению нужных множеств $W(t)$ несколько иначе, используя понятие поглощения множества M процессом (1.1) в момент ϑ или к моменту ϑ (из данной позиции $\{t_*, x_*\}$, $t_0 \leqslant t_* \leqslant \vartheta$).

Такой подход к игровым задачам в связи с вытекающим из него правилом экстремального прицеливания, описанным выше в § 2 в модифицированной форме экстремальной стратегии $\mathrm{U}^{(e)}$, был предложен в работе [13] и развит затем в ряде работ (см. например [10–14]). При этом, однако, свойства сильной стабильности или стабильности множеств $W(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ в общем случае уже не вытекают автоматически из способа построения этих множеств. То или другое из этих свойств должно проверяться дополнительно исходя из частных особенностей системы (1.1) и множества M.

Приведем сначала два определения, которые послужат основой для описания множеств $W(t)$, а затем укажем достаточные условия, при выполнении которых эти множества $W(t)$ будут обладать нужными свойствами стабильности.

Определение 4.1. Скажем, что из позиции $\{t_*, x_*\}$ множество M поглощается программно процессом (1.1), (1.2) в момент $\vartheta \geqslant t_*$, если для любой допустимой функции $v(t)$ $(t_* \leqslant t < \vartheta)$ можно подобрать допустимую функцию $u(t)$ $(t_* \leqslant t < \vartheta)$, такую, что движение $x(t)$ $(x(t_*) = x_*)$, порожденное выбранной парой управлений $\{u(t), v(t)\}$, удовлетворит условию

$$x(\vartheta) \in M \tag{4.1}$$

Определение 4.2. Скажем, что из позиции $\{t_*, x_*\}$ множество M поглощается программно процессом (1.1), (1.2) к моменту $\vartheta \geqslant t_*$, если для любой допустимой функции $v(t)$ $(t_* \leqslant t < \vartheta)$ можно подобрать допустимую функцию $u(t)$ $(t_* \leqslant t < \vartheta)$ такую, что движение $x(t)$ $(x(t_*) = x_*)$, порожденное выбранной парой управлений $\{u(t), v(t)\}$, удовлетворит условию

$$\min_t \rho\,(x,(t),\ M) = 0 \qquad (t_* \leqslant t \leqslant \vartheta) \tag{4.2}$$

Пусть число t_0 зафиксировано и выбрано как-нибудь число $\vartheta \geqslant t_0$. Обозначим символом $W(t, \vartheta)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ множество всех точек x, для которых множество M поглощается программно процессом (1.1), (1.2) из позиции $\{t, x\}$ в момент ϑ. Если некоторые множества $W(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ сильно стабильны и $M = W(\vartheta)$, то

$$W(t) \subset W(t,\ \vartheta) \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta) \tag{4.3}$$

Однако множества $W(t, \vartheta)$ могут и не быть сильно стабильными.

Обозначим далее символом $W^*(t, \vartheta)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ множество всех точек x, для которых множество M поглощается программно процессом (1.1), (1.2) из позиции $\{t, x\}$ к моменту ϑ. Если некоторые множества $W(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ стабильны и $W(\vartheta) = M$, то

$$W(t) \subset W^*(t,\ \vartheta) \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta) \tag{4.4}$$

Однако множества $W^*(t, \vartheta)$ могут и не быть стабильными.

В связи с леммами 3.1 и 3.2, а также в связи с условиями (4.3), (4.4) для задачи о сближении точки $x[t]$ с множеством M приобретает интерес вопрос о том, при каких условиях множества $W(t, \vartheta)$ или множества $W^*(t, \vartheta)$ являются сильно стабильными или стабильными соответственно. В самом деле, при положительном решении этого вопроса, согласно леммам 3.1 и 3.2 в качестве искомой стратегии U, гарантирующей сближение (1.4) или (1.5) точки $x[t]$ с множеством M, достаточно выбрать экстремальную стратегию $\mathrm{U}^{(e)}$, базирующуюся на множествах $W(t, \vartheta)$ или $W^*(t, \vartheta)$ соответственно. Следующие две леммы и указывают некоторые достаточные условия сильной стабильности множеств $W(t, \vartheta)$ или стабильности множеств $W^*(t, \vartheta)$.

Оговорим некоторые предположения.

Условие 4.3. Полагая множество U выпуклым, примем (см. [15]), что при всяких $\{t, x\}$ вектор $f^{(1)}(t,x,u)$ пробегает выпуклое множество $F^{(1)}(t,x)$, когда вектор u пробегает U.

Пусть выбрана некоторая позиция $\{t_*, x_*\}$, число $\Delta>0$ и допустимая функция $v(t)$, $(t_* \leqslant t < t_* + \Delta)$. Рассмотрим движения $x(t)$ $(t_* \leqslant t \leqslant t_* + \Delta,\ x(t_*) = x_*)$, порожденные данным управлением $v = v(t)$ и всевозможными допустимыми управлениями $u = u(t)$ $(t_* \leqslant t < t_* + \Delta)$. Множество полученных таким образом точек $x = x(t_* + \Delta)$ обозначим символом $X(t_*, x_*, \Delta, v(t))$.

Условие 4.4. При всех $\{t_*, x_*\}$, $v(t)$ и $\Delta \leqslant \Delta_0$, где Δ_0 — достаточно малое положительное число, множество $X(t_*, x_*, \Delta, v(t))$ является выпуклым.

Пусть $x_* \in W(t_*, \vartheta)$. Тогда для всякой допустимой функции $v(t)$ $(t_* \leqslant t < \vartheta)$ найдется допустимая функция $u(t)$ $(t_* \leqslant t < \vartheta)$, которая в паре с $v(t)$ приводит движение $x(t)$ $(x(t_*) = x_*)$ в точку $x(\vartheta) \in M$. Если же $x_* \in W^*(t, \vartheta)$, то для всякой допустимой функции $v(t)$ $(t_* \leqslant t < \vartheta)$ найдется допустимая функция $u(t)$ $(t_* \leqslant t < \vartheta)$, которая в паре с $v(t)$ порождает движение $x(t)$, удовлетворяющее условию $x(t^*) \in M$ $(t^* \leqslant \vartheta)$. Предположим, что, таким образом можно установить некоторое соответствие между допустимыми функциями $v(t)$ $(t_* \leqslant t < \vartheta)$ и движениями $x(t)$ $(t_* \leqslant t \leqslant \vartheta)$. Это соответствие обозначим символом $v(t) \to x(t)$.

Пусть теперь некоторая точка x^* не содержится в $W(t_* + \Delta, \vartheta)$. Тогда найдется допустимая функция $v^*(t)$ $(t_* + \Delta \leqslant t < \vartheta)$ такая, что при любом выборе допустимой функции $u(t)$ $(t_* + \Delta \leqslant t < \vartheta)$ порожденное управлениями $\{u(t), v^*(t)\}$ движение $x(t)$ $(x(t_* + \Delta) = x^*)$ не попадет на M в момент ϑ. Если же точка x^* не содержится в $W^*(t_* + \Delta, \vartheta)$, то найдется допустимая функция $v^*(t)$ $(t_* + \Delta \leqslant t < \vartheta)$ такая, что при любом выборе допустимой функции $u(t)$ $(t_* + \Delta \leqslant t < \vartheta)$ движение $x(t)$, порожденное управлениями $\{u(t), v^*(t)\}$ $(x(t_* + \Delta) = x^*)$ ни при каком t из отрезка $[t_* + \Delta, \vartheta]$ не попадет на M.

Предположим, что таким образом можно установить некоторое соответствие между точками x^* и функциями $v^*(t)$ $(t_* + \Delta \leqslant t < \vartheta)$. Это соответствие обозначим символом $x^* \to v^*(t)$. Пусть далее функция $v(t)$ как-то определена при $t_* \leqslant t < t_* + \Delta$, а при $t_* + \Delta \leqslant t < \vartheta$ она совпадает с некоторой функцией $v^*(t)$.

Тогда согласно предыдущему при избранной позиции $\{t_*, x_*\}$ можно установить отображение $x^* \to x(t_* + \Delta)$, которое определяется двумя соответствиями $x^* \to v^*(t)$ и $v(t) \to x(t)$ $(v(t) = v^*(t)$ при $t_* + \Delta \leqslant t < \vartheta)$.

Условие 4.5. Каковы бы ни были позиция $\{t_*, x_*\}$ $(x_* \in W(t_*, \vartheta)$ или $x_* \in W_*(t_*, \vartheta))$, функция $v(t)$ $(t_* \leqslant t < t_* + \Delta)$ и достаточно малое число $\Delta > 0$, отображение $x^* \to x(t_* + \Delta)$ можно выбрать непрерывным (разумеется в областях, где x^* не содержится в $W(t_* + \Delta, \vartheta)$ или в $W^*(t_* + \Delta, \vartheta)$ соответственно).

Справедливы утверждения.

Лемма 4.1. Если выполнены условия 4.3—4.5, то множества $W(t, \vartheta)$ сильно стабильны.

В самом деле, предположим, что это не так. Тогда для некоторой позиции $\{t_*, x_*\}$, где $x_* \in W(t_*, \vartheta)$, при некотором произвольно малом $\Delta > 0$ и при подходящем выборе $v(t)$ $(t_* \leqslant t < t_* + \Delta)$ множество $X(t_*, x_*, \Delta, v(t))$ не будет иметь общих точек с $W(t_* + \Delta, \vartheta)$. (Следует иметь в виду, что при условии 4.3 множество $X(t_*, x_*, \Delta, v(t))$, равно как и все множества $W(t, \vartheta)$ суть множества замкнутые (см. [15, 18]). Но в таком случае по условию 4.5 можно построить непрерывное отображение этого множества самого в себя. Согласно известной теореме (см. [16], стр. 296, теорема 5), такое отображение будет иметь неподвижную точку x°. Но из предыдущих построений вытекает, что через эту точку при $t = t_* + \Delta$ проходит движение $x(t)$, которое с одной стороны в момент ϑ попадает на множество M, а с другой стороны — на это множество M в момент ϑ такое движение $x(t)$ никак попадать не может. Полученное противоречие доказывает лемму.

Аналогичным образом доказывается и следующая лемма.

Лемма 4.2. Если выполнены условия 4.3—4.5, то множества $W^*(t, \vartheta)$ стабильны.

Прямым следствием лемм 3.1, 3.2, 4.1 и 4.2 будет следующее утверждение.

Теорема 4.1. Пусть $x_0 \in W(t_0, \vartheta)$ или $x_0 \in W^*(t_0, \vartheta)$. Если выполнены условия 4.3—4.5, то экстремальная стратегия $U^{(e)}$, базирующаяся на множествах $W(t, \vartheta)$ или $W^*(t, \vartheta)$, гарантирует сближение точки $x[t]$ с множеством M в момент ϑ или к моменту ϑ соответственно.

Примечание 4.1. Условие 4.5 можно несколько обобщить. Это делается следующим образом. Прежде всего соответствие $v(t) \to x(t)$ (см. стр. 203) можно заменить соответствием $v(t) \to \{x(t)\}$, где $\{x(t)\}$ будет уже не единственным движением $x(t)$, но целым семейством движений $\{x(t)\}$, каждое из которых обладает нужным свойством встречи с множеством M. В свою очередь и соответствие $x^* \to v^*(t)$ (см. стр. 203) можно также заменить соответствием $x^* \to \{v^*(t)\}$, где $\{v^*(t)\}$ опять будет некоторым множеством управлений $v^*(t)$, каждое из которых обеспечивает нужное уклонение движений $x(t)$ от M. Далее эти два соответствия аналогично предыдущему определят отображение $x^* \to, \to \{x(t_* + \Delta)\}$ точек x^* на множества $\{x(t_* + \Delta)\}$. Теперь условие 4.5 заменяется другим.

Условие 4.5. Каковы бы ни были позиция $\{t_*, x_*\}$ ($x_* \in W(t_*, \vartheta)$ или $x_* \in W^*(t_*, \vartheta)$), функция $v(t)$ $(t_* \leqslant t \leqslant t_* + \Delta)$ и достаточно малое число $\Delta > 0$, отображение $x^* \to \{x(t_* + \Delta)\}$ можно выбрать таким, что множества $\{x(t_* + \Delta)\}$ будут выпуклыми, замкнутыми и полунепрерывными сверху по включению (по изменению x^* в областях, где x не содержится в $W(t_* + \Delta, \vartheta)$ или в $W^*(t_* + \Delta, \vartheta)$ соответственно).

При замене условия 4.5 на условие 4.5* леммы 3.1, 3.2 и теорема 4.1 остаются верными. Следует лишь при доказательстве лемм 4.1 и 4.2 вместо теоремы 5 работы [16] воспользоваться теоремой [17], согласно которой при условии 4.5* для отображения $x^* \to \{x_*(t_* + \Delta)\}$ будет существовать точка $x^\circ \in \{x(t_* + \Delta)\}^\circ$, где $x^\circ \to \{x(t_* + \Delta)\}^\circ$, а это снова дает нужное противоречие.

§ 5. Условие 4.5, играющее основную роль в предположениях теоремы 4.1, сформулировано в слишком общем виде и поэтому оно, пожалуй, весьма трудно проверяемо. Укажем в этом параграфе одно условие, которое несколько проясняет обстоятельства, связанные с условием 4.5. Сделаем это для определенности лишь для случая поглощения множества M в момент ϑ. В случае поглощения множества M к моменту ϑ рассуждения, относящиеся к следующей ниже системе (5.1), проводятся по тому же плану, но при этом требуется учет дополнительных деталей.

Предположим, что уравнение (1.1) имеет вид

$$dx/dt = f(t, x) + B(t)u + C(t)v \tag{5.1}$$

где $B(t)$ и $C(t)$ — непрерывные матрицы функции соответствующих размерностей. Множества U и V в условиях (1.2) полагаем выпуклыми. Тогда условие 4.3 будет выполняться автоматически. Преобразуя систему (5.1), всегда можно добиться того, чтобы множество U содержало нулевой вектор. Поэтому указанное условие будем полагать выполненным.

Пусть точка x^* не содержится в множестве $W(t^*, \vartheta)$. Найдем пару управлений $\{u^*(t), v^*(t)\}$, которые решают задачу

$$\rho(x^*(\vartheta), M) = \max_{v(t)} \min_{u(t)} \rho(x(\vartheta), M) \tag{5.2}$$

где $x^*(t)$ $(t^* \leqslant t \leqslant \vartheta,\ x(t^*) = x^*)$ — движение, порожденное управлениями $\{u^*(t), v^*(t)\}$; максимин вычисляется по всем интегрируемым функциям $u(t) \in U$, $v(t) \in V$ $(t^* \leqslant t < \vartheta)$. По определению множества $W(t^*, \vartheta)$ и по выбору точки x^* вне этого множества заключаем, что данный максимин дает положительную величину $\rho(x^*(\vartheta), M)$.

Условие 5.6. Для всякой позиции $\{t^*, x^*\}$, где x^* не содержится в $W(t^*, \vartheta)$, функция $v^*(t)$, доставляющая решение задачи (5.2.), единственна (на полуинтервале $[t^*, \vartheta)$ по существу).

Пусть теперь точка $x_* \in W(t_*, \vartheta)$ и выбрана какая-нибудь допустимая функция $v(t)$ $(t_* \leqslant t < \vartheta)$. Найдем наименьшее из чисел μ, для которых существует функция $u_\mu(t) \in \mu U$ $(t_* \leqslant t < \vartheta)$, удовлетворяющая условию

$$\rho(x_\mu(\vartheta), M) = 0 \tag{5.3}$$

Здесь $x_\mu(t)$ $(t_* \leqslant t \leqslant \vartheta,\ x_\mu(t_*) = x_*)$ — движение, порожденное управлениями $\{u_\mu(t), v(t)\}$; символ μU означает множество, состоящее из векторов вида $u = \mu u^*$, где $u^* \in U$. По определению множества $W(t_*, \vartheta)$ и по выбору точки x_* из этого множества заключаем, что μ° — наименьшее из чисел μ, при которых достижимо равенство (5.3), не больше единицы.

Условие 5.7. Для всякой позиции $\{t_*, x_*\}$, где $x_* \in W(t_*, \vartheta)$, и всякой допустимой функции $v(t)$ решение задачи (5.3) при $\mu = \mu^\circ$ достигается на единственном движении $x_{\mu^\circ}(t)$.

Справедливо утверждение.

Лемма 5.1. Если выполнены условия 5.6 и 5.7, то выполнено и условие 4.5.

В самом деле, положим $t^* = t_* + \Delta$. Соотношение $x^* \to v^*(t)$ при условии 5.6 можно определить, выбирая в качестве $v^*(t)$ как раз решение задачи (5.2). Соотношение $v(t) \to x(t)$ можно определить по условию 5.7, выбирая в качестве $x(t)$ движение $x_{\mu^\circ}(t)$.

Теперь остается проверить, что отображение $x^* \to x_{\mu^\circ}(t_* + \Delta)$ является непрерывным. Пусть это не так. Тогда можно указать последовательность точек $x^{(i)}(i=1, 2, \ldots)$, сходящихся к точке x^* и таких, что соответствующие точки $x_{\mu^\circ}^{(i)}(t_* + \Delta)$ не приближаются к точке $x_{\mu^\circ}(t_* + \Delta)$. Из последовательности функций $v^{(i)}(t)$ $(t_* + \Delta \leqslant t < \vartheta)$ можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность.

Можно проверить, что слабый предел $v^\infty(t) \in V$ $(t_* + \Delta \leqslant t < \vartheta)$ этой подпоследовательности будет решением задачи (5.2) для точки x^*. Тогда по условию 5.6 $v^\infty(t) = v^*(t)$. Теперь из последовательности $x_{\mu^\circ}^{(i)}(t)$ можно выделить подпоследовательность, которая сойдется равномерно к функции $x_{\mu^\circ}(t)$, по условию 5.7 единственной функции, разрешающей задачу (5.3) при $v(t) = v^\infty(t)$ $(t_* + \Delta \leqslant t < \vartheta)$. Но это противоречит нашему предположению. Противоречие доказывает лемму.

Примечание 5.1. Условия 5.6 и 5.7 полезно сравнить с теми достаточными условиями сильной стабильности множеств $W(t, \vartheta)$, которые известны для линейных систем при условии выпуклости множества M (см. например, [10-12,18]). Эти условия формулируются следующим образом.

Пусть система (1.1) описывается линейным уравнением

$$dx/dt = A(t)x + B(t)u - C(t)v + f(t) \tag{5.4}$$

множества U и V в условиях (1.2) выпуклы и множество M тоже является ограниченным и выпуклым. Тогда точка x содержится в $W(t_*, \vartheta)$ тогда и только тогда, когда для нее выполнено условие

$$\varkappa(t_*, \vartheta, l) + l' \Phi(\vartheta, t_*) x \geqslant 0 \tag{5.5}$$

каков бы ни был единичный вектор l. Здесь функция $\varkappa(t_*, \vartheta, l)$ определена равенством

$$\varkappa(t_*, \vartheta, l) = \varkappa^{(1)}(t_*, \vartheta, l) - \varkappa^{(2)}(t_*, \vartheta, l) + l' \int_{t_*}^{\vartheta} \Phi(\vartheta, \tau) f(\tau)\, d\tau \tag{5.6}$$

причем $\varkappa^{(2)}(t_*, \vartheta, l)$ и $\varkappa^{(1)}(t_*, \vartheta, l)$ — опорные функции областей достижимости из позиции $\{t_*, x(t_*) = 0\}$ для движения $x(t)$ (5.4) по $v(t) \in V$ и $u_\delta(t) = u(t) + p\delta(t - \vartheta)$, где $u(t) \in U$u $- p \in M$, символ $\delta(t)$ означает δ — функцию

$$\varkappa^{(1)}(t_*, \vartheta, l) = \max_{u(\tau) \in U} \left(l' \int_{t_*}^{\vartheta} \Phi(\vartheta, \tau) B(\tau) u(\tau)\, d\tau \right) + \max_{-p \in M} l'p \tag{5.7}$$

$$\varkappa^{(2)}(t_*, \vartheta, l) = \max_{v(\tau) \in V} \left(l' \int_{t_*}^{\vartheta} \Phi(\vartheta, \tau) C(\tau) v(\tau)\, d\tau \right) \tag{5.8}$$

причем $\Phi(t, \tau)$ — фундаментальная матрица решений для однородного уравнения $dx / dt = A(t) x$. Результаты работ [10-12] утверждают, что для сильной стабильности множеств $W(t, \vartheta)$ достаточно, чтобы при условии

$$\min_{\|l\|=1} (\varkappa(t, \vartheta, l) + l' \Phi(\vartheta, t) x + \varepsilon) = 0 \tag{5.9}$$

где $\varepsilon > 0$, минимум в левой части (5.9) достигался на единственном векторе l (символ $\| l \|$ означает евклидову норму вектора l).

Очевидно, при выполнении условий 5.6 и 5.7 данное условие обязательно выполняется, но, вообще говоря, это условие несколько слабее, чем условия 5.6 и 5.7.

Однако если воспользоваться более общей теоремой о неподвижной точке для случая неоднозначных отображений [17], как это сделано в примечании 4.1, то получатся условия сильной стабильности, вполне аналогичные упомянутым сейчас условиям единственности минимизирующего вектора l в (5.9).

Следует еще заметить, что условие максимума (2.4) лишь несущественными деталями отличается от правила экстремального прицеливания [10–12].

Наконец, следует сказать, что в рассматриваемом линейном случае множества $W(t, \vartheta)$ обязательно выпуклы. Стало быть вектор s в условии (2.4) обязательно единствен и поэтому в соответствии с примечанием 3.1, экстремальная стратегия $\mathrm{U}^{(e)}$ здесь всегда формализуется также и в рамках дифференциальных уравнений в контингенциях.

Поступила 25 XI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Fleming W. H. A note on differential games of prescribed duration. Ann. Math. Studies., 1957, No. 39, pp. 407—412.
2. Келенджеридзе Д. Л. Об одной задаче оптимального преследования. Автоматика и телемеханика. 1962, т. 23, № 8.
3. Nardzewski C. R. A theory of pursuit and evasion Adv. in game theory. Ann. Math. Studies., 1964.
4. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М., «Мир», 1967.
5. Понтрягин Л. С. О линейных дифференциальных играх. 2. Докл. АН СССР, 1967, т. 175, № 4, стр. 764—766.
6. Пшеничный Б. Н. Структура дифференциальных игр. Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 2, стр. 285—287.
7. Никольский М. С. Нестационарные линейные дифференциальные игры. Вестн. МГУ, сер. матем. и механ., 1969, № 3, стр. 65—73.
8. Varaiya P., Lin J. Existence of saddle points in differential games. SIAMJ. Control, 1969, vol. 7, No 1.
9. Петров Н. Н. О существовании значения игры преследования. Докл. АН СССР, 1970, т. 190, No 6.
10. Красовский Н. Н. О дифференциальной игре на сближение. Докл. АН СССР, сер. матем. физ., 1968, т. 182, № 6, стр. 1287—1289.
11. Красовский Н. Н. Регуляризация одной дифференциальной игры. Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, 1969, № 1.
12. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Об оптимальных стратегиях в линейной дифференциальной игре. ПММ, 1969, т. 33, № 4, стр. 698—704.
13. Красовский Н. Н. Об одной задаче преследования. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
14. Пшеничный Б. Н. Линейные дифференциальные игры. Автоматика и телемеханика, 1968, № 1.
15. Филиппов А. Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. Вестн. МГУ, сер. матем. и механ., 1959, № 2.
16. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. М., Изд-во иностр. лит., 1962, т. 1.
17. Kakutani S. A generalization of Brouwer's fixed point theorem. Duke Math. J., 1941 vol. 8, No. 3, pp. 457—599.
18. Красовский Н. Н. Дифференциальная игра сближения. 1-й грубый случай. Дифференциальные уравнения, 1969, т. 5, № 3.