Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Ю. Г. Евтушенко

(Москва)

В работе предлагается использовать метод усреднения для решения широкого класса задач оптимального управления системами, приводимыми к стандартному виду систем с быстро вращающейся фазой [1]. Использованная в работе модификация метода усреднения предложена Н. Н. Боголюбовым и Д. Н. Зубаревым и является дальнейшим развитием метода Крылова — Боголюбова. Дана общая схема приближенного расчета, в качестве примеров решен ряд вариационных задач. Предложенный подход оказался эффективным для построения приближенного синтеза оптимальных систем.

1. Предварительное замечание. Пусть управляемый процесс описывается системой n дифференциальных уравнений

$$dx/dt = f(x, u) \tag{1.1}$$

Здесь t — время, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — n-мерный вектор фазовых координат, u — управление (скалярная функция), $f = (f_1, \ldots, f_n)$ — заданная n-мерная вектор-функция.

Момент окончания процесса T фиксирован. Не нарушая общности, можно считать, что минимизируемый функционал есть $x_n(T)$. Для системы заданы начальные условия

$$x(t_0) = x_0 \tag{1.2}$$

Здесь и ниже нулевой индекс указывает начальное значение функции. Условия в конце движения определяются k соотношениями

$$\varphi(x(T)) = 0 \tag{1.3}$$

Здесь $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ — заданная k-мерная вектор-функция $(1 \leqslant k < n)$.

Задача определения оптимального управления формулируется следующим образом: найти управление $u(t)$ и соответствующую ему оптимальную траекторию $x(t)$, которые при $t_0 \leqslant t \leqslant T$ удовлетворяют уравнению (1.1) условиям (1.2), (1.3), ограничениям на управление $u(t) \in V$ и доставляют минимум функционалу $x_n(T)$. Здесь V — замкнутое множество.

К поставленной задаче применим принцип максимума [2]. Введем n-мерный вектор сопряженных переменных (импульсов) $p = (p_1, \ldots, p_n)$, тогда функция Гамильтона H, система (1.1) и уравнения для сопряженных переменных запишутся в виде

$$H(x, p, u) = (p, f) \tag{1.4}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{1.5}$$

Согласно принципу максимума управление u_* определяется из условия максимума функции H по u, т. е.

$$H(x(t), p(t), u_*) = \max H(x(t), p(t), u), \qquad u \in V \tag{1.6}$$

Причем

$$p_n(T) < 0 \tag{1.7}$$

Условия (1.2), (1.3) вместе с $n - k$-условиями трансверсальности полностью определяют краевые условия для системы (1.5).

Будем считать, что оптимальное решение $u_*(x, p)$ таково, что соответствующее решение системы (1.5) «протыкает» поверхность разрывов функции $u_*(x, p)$.

Обозначим $U(x, p) = H(x, p, u_*)$ — значение функции Гамильтона при управлении, выбранном из условия максимума. Тогда систему (1.5) можно по-прежнему записать в канонической форме, используя в качестве производящей функции U

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial U}{\partial p}, \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x} \tag{1.8}$$

Действительно, считая, что функция H непрерывно дифференцируема по u, функция u_* имеет кусочно-непрерывные частные производные по всем своим аргументам, распишем подробно правые части (1.8)

$$\frac{\partial U}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial p}, \qquad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} \tag{1.9}$$

Здесь предполагается, что в выражение для функции H после того, как вычислены производные по x, p, u, подставлено $u = u_*$. В тех случаях, когда максимум H по u достигается внутри множества допустимых управлений V, имеем $\partial H / \partial u = 0$, если максимум достигается на границе V, тогда $\partial u_* / \partial x = \partial u_* / \partial p = 0$, так как граница множества V не зависит от x, p. Отсюда следует, что вдоль траекторий, получающихся при управении, определенном из (1.7), имеет место равенство

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial U}{\partial p}, \qquad \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x}$$

и, следовательно, вместо (1.5) можно использовать систему (1.8). В дальнейшем это обстоятельство позволит существенно упростить приближенные расчеты.

2. Асимптотическое интегрирование. Пусть система (1.1) приведена к стандартному виду систем с быстро вращающимися фазами [1]

$$dx / dt = \varepsilon f(x, y, u), \qquad dy / dt = \omega + \varepsilon F(x, y, u) \tag{2.1}$$

Здесь ε — малый параметр ($\varepsilon \ll 1$), $y = (y_1, \ldots, y_s)$ — s-мерный вектор фаз; $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_s)$ — совокупность s частот, которые считаются постоянными; $F = (F_1, \ldots, F_s)$ — заданная s-мерная вектор-функция. Смысл функций x, u, f, φ остается прежним, однако теперь f, φ зависят от x, y, u.

В системе (2.1) n-мерный вектор x является медленно изменяющимся, так как его производная пропорциональна малому параметру ε, вектор y меняется быстро, так как все частоты $\omega_i \sim 1$.

Выпишем начальные и краевые условия для (2.1)

$$x(t_0) = x_0, \ y(t_0) = y_0, \qquad \varphi(x, y, T) = 0 \tag{2.2}$$

Векторам x, y поставим в соответствие вектора импульсов p, λ. Функция Гамильтона будет иметь вид

$$H(x, y, p, \lambda, u) = (f, p) + (\lambda, \omega + \varepsilon F) \tag{2.3}$$

Задача состоит в определении оптимального управления $u(t)$ соответствующей траектории $x(t)$, $y(t)$, которые доставляют минимум функционалу $x_n(T)$ и удовлетворяют уравнениям (2.1), условиям (2.2) и ограничениям на управление.

Определив из условия максимума функции H управление u_*, составим функцию

$$U(x, y, p, \lambda) = H(x, y, p, \lambda, u_*) \tag{2.4}$$

Систему (2.1) и сопряженную к ней запишем в виде

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial U}{\partial p}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \lambda}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial y} \tag{2.5}$$

В силу автономности системы (2.1) функция U постоянна вдоль решений (2.5).

Полученная система (2.5) вновь имеет стандартный вид систем с быстро вращающимися фазами, в ней медленно изменяются x, p, λ, быстро изменяется вектор y.

Краевую задачу для системы (2.5) будем решать приближенно с помощью метода усреднения. Рассмотрим вначале нерезонансный случай, когда частоты ω_i несоизмеримы. Система первого приближения для (2.5) находится усреднением правых частей системы по компонентам вектора y независимым образом. Из вида системы (2.5) следует, что вначале можно усреднить функцию U

$$U_* = \lim_T \frac{1}{T_1 \ldots T_s} \int_0^{T_1} \cdots \int_0^{T_s} U dy_1 dy_2 \ldots dy_s \tag{2.6}$$

$$T_1 \to \infty, \ldots, T_s \to \infty$$

Затем, подставляя U_* в (2.5), получим

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial U_*}{\partial p}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial U_*}{\partial \lambda}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial U_*}{\partial x}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial U_*}{\partial y} \tag{2.7}$$

Краевые условия (2.2) остаются прежними. Если функция U периодична по компонентам фазового вектора $y_1, \ldots, y_s$ с периодами $T_1, \ldots, T_s$ соответственно, тогда формула (2.6) упрощается

$$U_* = \frac{1}{T_1 \cdots T_s} \int_0^{T_1} \cdots \int_0^{T_s} U \, dy_1 \ldots dy_s \tag{2.8}$$

При вычислении интегралов (2.6), (2.8) медленно меняющиеся переменные x, p, λ считаются постоянными.

Предполагаем, что все условия применимости теорем об асимптотическом интегрировании [1, 3] для системы (2.5) выполнены, тогда можно утверждать, что решение краевой задачи для системы (2.7) аппроксимирует точное решение краевой задачи для системы (2.5) с погрешностью $\sim\varepsilon$ на интервале $T\sim\varepsilon^{-1}$. Точнее, для решения, например, $x^{(1)}(t)$, полученного из (2.5), и решения $x^{(2)}(t)$, полученного из (2.7), имеет место

$$\max|x^{(1)}(t)-x^{(2)}(t)|=O(\varepsilon)\qquad(0\leqslant t\leqslant T)$$

Таким образом, решив (2.7), найдем в первом приближении оптимальную траекторию и импульсы; подставляя полученные решения в функцию u_*, найдем управление. Вдоль траектории, получающейся при таком управлении, значение функционала отличается от точного на величину $\sim\varepsilon$.

Усредненная система (2.7) много проще исходной (2.5), так как в правые части ее не входят фазы y. В ряде случаев удается полностью проинтегрировать систему (2.7), выразить управление в виде функции от фазовых координат x, y и решить таким образом в первом приближении задачу синтеза. В более сложных задачах решение (2.7) приходится искать численно, но и в этих случаях интегрирование (2.7) проще интегрирования (2.5) так как можно брать большой шаг интегрирования.

Система (2.7) имеет первые интегралы

$$U_*=\text{const},\qquad \lambda=\lambda_0,\qquad y=y_0+\int_0^t\frac{\partial U_*}{\partial\lambda}\,dt \tag{2.9}$$

Приведем формулы расчета первого приближения для простейшего случая, когда $n=s=1$. Из условия максимума

$$H=\varepsilon pf+\lambda(\omega+\varepsilon F) \tag{2.10}$$

находим u^*, далее имеем

$$U_*=pf_*+\lambda(\omega+\varepsilon F_*)$$

$$f_*=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f\,dt,\qquad F_*=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T F\,dt$$

Из системы (2.7) и из первых интегралов (2.9) получим

$$\frac{dx}{dt}=\varepsilon f_*,\quad \lambda=\lambda_0,\quad y=y_0+\omega t+\varepsilon\int_0^t F_*\,dt,\quad U_*=\text{const} \tag{2.11}$$

Определив из первого интеграла U_* функцию p, сведем решение исходной задачи к квадратуре

$$t=\frac{1}{\varepsilon}\int_{x_0}^{x}\frac{1}{f_*}\,dx \tag{2.12}$$

Если решается задача со свободным правым концом (т. е. отсутствуют условия (1.3)), тогда

$$\lambda = 0, \quad U_* = \varepsilon p(t) f_*(t) = \varepsilon p(T) f_*(T)$$

Предположим, что при $t_0 \leqslant t \leqslant T$ функция $f_*(t)$ не меняет знак, тогда согласно (1.7) $p(t) < 0$. В этом случае управление, полученное из принципа максимума, совпадает с управлением, найденным из условия минимума производной dx/dt. Полученное таким образом управление u_* сразу находится в виде функций от фазовых координат x, y, т. е. в форме синтеза. Такой прием определения управления широко применяется в задачах небесной механики (обзор и библиографию работ см. в книге [4]) и носит название локальной оптимальности. Приведенные выше результаты показывают, что локально оптимальные траектории близки к оптимальным только в простейших случаях, к ним относятся, например, задачи рассмотренные ниже в п. 3, 4. В общем случае характер управления уже в первом приближении носит более сложный вид. Управление в задаче п. 5, например, нельзя найти из условия локальной оптимальности.

Будем говорить, что в системе возможны резонансные эффекты, если соизмеримы хотя бы две из частот ω_i, ω_j, т. е. существуют взаимно простые целые числа m, l такие, что

$$\omega_i - \frac{m}{l}\omega_j \sim O(\varepsilon) \tag{2.13}$$

Схема расчетов в этом случае несколько видоизменяется. Для простоты считаем, что соизмеримы только две частоты (2.13). Вместо y_i введем новую переменную x_{n+1} — сдвиг фаз соотношением

$$x_{n+1} = y_i - \frac{m}{l} y_j \tag{2.14}$$

Систему (2.1) сводим к стандартному виду

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(x, y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_s, x_{n+1}, u)\\
&\frac{dx_{n+1}}{dt} = \omega_i - \frac{m}{l}\omega_j + \varepsilon\left(F_i - \frac{m}{l}F_j\right)\\
&\frac{dy_1}{dt} = \omega_1 + \varepsilon F_1(x, y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_s, x_{n+1}, u)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{dy_{i-1}}{dt} = \omega_{i-1} + \varepsilon F_{i-1}\\
&\frac{dy_{i+1}}{dt} = \omega_{i+1} + \varepsilon F_{i+1}\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{dy_s}{dt} = \omega_s + \varepsilon F_s
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Согласно условию (2.13) здесь медленно меняются x, x_{n+1}, быстро изменяющимися переменными являются $s - 1$ фаз $y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots$ $\ldots, y_s$. Далее, к (2.15) применяем принцип максимума и усредним независимым образом по $s - 1$ компоненте вектора фаз, считая медленно изменяющиеся переменные постоянными.

При некоторых m и l может оказаться, что решение (2.15) не отличается от решения системы (2.7) для нерезонансного случая, будем говорить, что при этих m и l отсутствуют резонансные эффекты (хотя условия резонанса (2.13) выполнены).

Задача усложняется, если частоты зависят от медленно изменяющихся переменных: $\omega = \omega(x)$. Производные от некоторых импульсов в этом случае ~ 1. Это приводит к появлению дополнительных резонансных режимов, кроме того, условия возникновения резонансов (2.13) могут изменяться в процессе движения. При усреднении здесь возникают те же трудности, что и в задачах существенно нелинейных колебаний при прохождении через зоны резонанса [5, 6].

Приведенные выше формулы дают возможность решить задачу в первом приближении. Следуя стандартной процедуре асимптотического интегрирования [1], можно построить и более высокие приближения.

В качестве примера приложения изложенного подхода рассмотрим три простейшие задачи.

3. Задача об оптимальном параметрическом возбуждении. Пусть некоторая колебательная система описывается уравнением

$$d^2z \,/\, d\tau^2 + (1 - \varepsilon u)z = 0 \tag{3.1}$$

Здесь u — управление, подчиненное условию $0 \leqslant u \leqslant 1$. Из всех возможных законов управления $u(\tau)$ на интервале $\tau_0 \leqslant \tau \leqslant T$ следует найти такой, чтобы интеграл энергии

$$h = {}^1\!/_2\,(z^2 + z^{\cdot 2}) \tag{3.2}$$

принимал в конце процесса наименьшее (наибольшее) значение.

С помощью стандартной замены переменных

$$z = x\cos y, \qquad dz/d\tau = -x\sin y \tag{3.3}$$

сводим (3.1) и (3.2) к стандартному виду

$$x^{\cdot} = -\varepsilon ux\cos y\sin y, \qquad y^{\cdot} = 1 - \varepsilon u\cos^2 y \tag{3.4}$$

$$h = 0.5\,x^2 \tag{3.5}$$

Из (3.5) следует, что исходная задача эквивалентна минимизации (максимизации) амплитуды x. Из условия максимума

$$H = \lambda - \varepsilon\, u\cos^2 y\,[\lambda + xp\,\mathrm{tg}\, y] \tag{3.6}$$

находим

$$u = \theta\,(-\lambda - xp\,\mathrm{tg}\, y) \tag{3.7}$$

Здесь введена функция Хевисайда: $\theta(z) = 0$ при $z < 0$ и $\theta(z) = 1$ при $z > 0$.

Краевые условия имеют вид

$$x(\tau_0) = x_0, \qquad y(\tau_0) = y_0, \qquad p(T) = -1, \;\; \lambda(T) = 0 \tag{3.8}$$

Подставляя (3.7) в (3.6), получим

$$U = \lambda - \varepsilon\,[\lambda\cos^2 y + xp\cos y\sin y]\,\theta\,[-\lambda - xp\,\mathrm{tg}\, y]$$

После осреднения имеем

$$U_* = \lambda - \frac{\varepsilon}{2\pi}\left[xp + \frac{\lambda\pi}{2} + \lambda \operatorname{arc\,tg}\frac{\lambda}{xp}\right]$$

Пользуясь формулами (2.11), с учетом (3.8), находим

$$\lambda = \theta,\ p = -\frac{x(T)}{x(\tau)},\ x = x_0 \exp\frac{-\varepsilon(\tau-\tau_0)}{2\pi},\ y = y_0 + \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right)(\tau - \tau_0) \quad (3.9)$$

Подставляя (3.9) в (3.7), получим оптимальный (в первом приближении) закон управления

$$u = \theta\,(\pm \operatorname{tg} y) = \theta\,(\mp y\dot{y})$$

Здесь в выражениях $\pm\ \mp$ верхний знак соответствует оптимальному уменьшению амплитуды колебаний, нижний — увеличению.

4. Вращательное движение. Изложенная схема может быть использована для расчета оптимального управления существенно нелинейными системами. В качестве примера рассмотрим здачу об оптимальном уменьшении энергии вращающегося маятника. Уравнение движения запишем в виде

$$d^2y/dt^2 + w \sin y = 0 \quad (4.1)$$

Требуется выбрать управление $w(t)$ из интервала $w_2 \leqslant w \leqslant w_1$ так, чтобы в конце движения угловая скорость была наименьшей. Считаем, что на протяжении всего процесса маятник совершает быстрое вращательное движение. Следуя [7], введем новые переменные x, время τ, начальную угловую скорость Ω соотношениями

$$dy/dt = \Omega + x, \quad \tau = \varepsilon^{-1}t, \quad \Omega = \varepsilon^{-1}$$

где $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр. Получим систему, эквивалентную уравнению (4.1)

$$dx/d\tau = -\varepsilon w \sin y, \qquad dy/d\tau = 1 + \varepsilon x$$

Краевые условия для оптимальной задачи следующие:

$$x(\tau_0) = 0, \quad y(\tau_0) = \Omega, \quad p(T) = -1, \quad \lambda(T) = 0$$

Выпишем функцию H, оптимальный закон изменения w, усредненную функцию U_*

$$H = \lambda + \varepsilon x\lambda - \varepsilon p w \sin y$$

$$w = w_1\,\theta(-p \sin y) + w_2\,\theta(p \sin y)$$

$$U_* = \lambda(1 + \varepsilon x) + \frac{\varepsilon p}{\pi}(w_1 - w_2)$$

Окончательное решение задачи имеет вид

$$x = \frac{(w_2 - w_1)}{\pi}(t - t_0), \quad y = \Omega + \Omega(t - t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2\pi}(w_2 - w_1) + O(\Omega^{-1})$$

5. Стабилизация движения. Вопрос о выборе оптимального закона стабилизации колебательной системы, находящейся под действием возмущающих сил, возникает в разнообразных задачах теории нелинейных колебаний. Динамика таких процессов при простейших законах стабилизации изучалась во многих работах. Метод усреднения, по-видимому, может оказаться исключительно эффективным для решения задач синтеза стабилизирующих систем. Решим в качестве примера задачу о стабилизации относительного движения спутника на околокруговой орбите.

Считаем, что на спутнике установлены два двигателя малой тяги, создающие некоторый управляющий момент D. Пусть главная центральная ось инерции спутника, момент инерции относительно которой равен B, все время перпендикулярна плоскости орбиты. Момент инерции относительно двух других осей инерции обозначим через A, C $(A > C)$.

Относительное движение описываем углом φ — между направлением на перигей орбиты и главной центральной осью инерции спутника, момент инерции относительно которой равен C. С точностью до величин порядка отношения размеров спутника к размерам орбиты уравнение относительного движения имеет вид [8]

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = \frac{E^2}{2}(1 + e\cos\vartheta)^3 \sin 2(\alpha + \gamma) - \varkappa u \tag{5.1}$$

$$3 \geqslant E^2 = \frac{3(C-A)}{B}, \quad \varkappa = \frac{DP^3}{B\mu}, \quad \tau = t\sqrt{\mu}\,P^{-3/2}, \quad u = \frac{D}{D_1}$$

Здесь e — эксцентриситет орбиты, ϑ — истинная аномалия, P — фокальный параметр орбиты, D_1 — некоторая характерная величина управляющего момента, $^1/_2\,\pi - \alpha - \gamma$ — угол между радиусом-вектором центра масс и осью инерции спутника, момент инерции относительно которой равен C, α — угол между вектором скорости и направлением нормальным к радиусу-вектору центра масс. Имеет место формула

$$\sin\alpha = \frac{e\sin\vartheta}{\sqrt{1 + 2e\cos\vartheta + e^2}} \tag{5.2}$$

Между введенными углами существует связь

$$\gamma = {}^1/_2\pi + \vartheta - \alpha - \varphi \tag{5.3}$$

Считаем величины e и $\varkappa$ малыми одного порядка, тогда пренебрегая эволюцией орбиты центра масс спутника, имеем

$$\alpha = e\sin\vartheta + O(e^2), \qquad \frac{d\vartheta}{d\tau} = 1 + 2e\cos\vartheta + O(e^2) \tag{5.4}$$

С учетом (5.3), (5.4) линеаризуем уравнение (5.1) для малых γ, получим

$$\frac{d^2\gamma}{d\tau^2} + E^2\gamma = \varkappa u - e\,[(1 + E^2)\sin\vartheta + 3\gamma E^2\cos\vartheta] = -\psi \tag{5.5}$$

Следуя [9], задачу оптимальной стабилизации относительного движения спутника сформулируем следующим образом: построить синтез управления $u(\gamma, \gamma^{\cdot}, \tau)$ так, чтобы за фиксированное время движения T функционал

$$J = \varkappa\int_0^T (u^2 + c^2\gamma^2)\,d\tau \tag{5.6}$$

принимал наименьшее значение. Здесь c — некоторая постоянная. Первый член в подынтегральном выражении есть интегральный штраф за большое значение управляющего момента, второй член является интегральным штрафом за большое отклонение угла γ.

Введем новые переменные x_1, x_2, y соотношениями

$$\gamma = x_1 \cos y, \quad \frac{d\gamma}{d\tau} = -Ex_1 \sin y, \quad \frac{dx_2}{d\tau} = \varkappa (u^2 + c^2\gamma^2) \tag{5.7}$$

Уравнения относительного движения и движения центра масс имеют стандартный вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= \frac{\psi}{E} \sin y, & \frac{dx_2}{d\tau} &= \varkappa (u^2 + c^2 x_1^2 \cos^2 y) \\ \frac{dy}{d\tau} &= E + \frac{\psi}{Ex_1} \cos y, & \frac{d\vartheta}{d\tau} &= 1 + 2e \cos \vartheta \end{aligned} \tag{5.8}$$

Здесь медленно изменяются x_1, x_2, быстро меняющимися переменными являются y, ϑ. Функциям x_1, x_2, y, ϑ поставим в соответствие импульсы $p_1, p_2, \lambda_1, \lambda_2$.

Краевые условия для вариационной задачи следующие:

$$\begin{gathered} x_1(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \; p_2(T) = -1 \\ x_2(0) = p_1(T) = \lambda_1(T) = \lambda_2(T) = 0 \end{gathered} \tag{5.9}$$

Минимизируемый функционал $J = x_2(T)$. Выпишем для нерезонансного случая функцию H, оптимальное управление и функцию U

$$H = \frac{\psi p_1}{E} \sin y + \lambda_1 \left[E + \frac{\psi \cos y}{Ex_1}\right] + \varkappa p_2 (u^2 + c^2 x_1^2 \cos^2 y) + \lambda_2 (1 + 2e \cos \vartheta)$$

$$u = \frac{1}{2Ep_2}\left[p_1 \sin y + \frac{\lambda_1 \cos y}{x_1}\right] \tag{5.10}$$

$$U = -\frac{\varkappa}{4E^2 p_2}\left[p_1 \sin y + \frac{\lambda_1 \cos y}{x_1}\right]^2 + \frac{e}{E}\left(p_1 \sin y + \frac{\lambda_1 \cos y}{x_1}\right)[(1 + E^2) \sin \vartheta + $$
$$+ 3x_1 E^2 \cos y \cos \vartheta] + \varkappa p_2 c^2 x_1^2 \cos^2 y + \lambda_2 (1 + 2e \cos \vartheta) + \lambda_1 E$$

После усреднения, используя (2.9) (5.9), получим

$$U_* = -\frac{\varkappa}{8E^2 p_2}\left[p_1^2 + \frac{\lambda_1^2}{x_1^2}\right] + \frac{\varkappa}{2} p_2 c^2 x_1^2 + E\lambda_1 + \lambda_2 \tag{5.11}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \; p_2 = -1, \quad y = y_0 + E\tau, \quad \vartheta = \vartheta_0 + \tau$$

Интегрируя систему

$$\frac{dx_1}{d\tau} = \frac{\varkappa p_1}{4E^2}, \quad \frac{dx_2}{d\tau} = \frac{\varkappa}{2}\left[c^2 x_1^2 + \frac{p_1^2}{4E^2}\right], \quad \frac{dp_1}{d\tau} = \varkappa x_1 c^2 \tag{5.12}$$

получим

$$\begin{gathered} x = x_{10}[\operatorname{ch} \tau k + \Phi \operatorname{sh} \tau k], \quad p_1 = p_{10}\left[\operatorname{ch} \tau k + \frac{\operatorname{sh} \tau k}{\Phi}\right] \\ J = \frac{\varkappa c^2 x_{10}^2}{2k} \operatorname{sh}^2 kT\, [2\Phi + (1 + \Phi^2) \operatorname{cth} kT] \\ k = \frac{\varkappa c}{2E}, \quad \Phi = \frac{p_{10}}{2Ecx_{10}} \end{gathered} \tag{5.13}$$

Из условий (5.9) находим

$$p_{10} = -2cx_{10} \operatorname{th} kT \tag{5.14}$$

Подставляя (5.14) в (5.10), (5.13), получим

$$x = x_{10}\frac{\operatorname{ch} k(T-\tau)}{\operatorname{ch} kT}, \quad J = cx_{10}^2 \operatorname{th} kT, \quad p = -2cx \operatorname{th} k(T-\tau)$$

Из найденного решения следует, что амплитуда колебаний спутника относительно вектора скорости монотонно убывает, величина управляющего момента осциллирует с частотой относительного движения и с медленно убывающей амплитудой, равной нулю при $\tau = T$. Выразим значение u через фазовые координаты, получим решение задачи синтеза оптимальной коррекции

$$u = -c\frac{d\gamma}{d\tau} \operatorname{th} k(T-\tau) \tag{5.15}$$

Система (5.8) имеет резонансные эффекты при $E = 1$, $E = 0.5$, их исследование проводится по схеме п.2.

Управления, найденные в рассмотренных примерах, могут отличаться от точных оптимальных управлений на величину ~ 1, однако приближенные значения функционалов, фазовых координат аппроксимируют точные значения с погрешностью $\sim \varepsilon$, $\varkappa$ на интервале движения $T \sim \varepsilon^{-1}$, $\varkappa^{-1}$ соответственно. В этом смысле найденные управления являются оптимальными в первом приближении.

Поступила 13 IX 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1958.
2. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.
3. Волосов В. М. Некоторое виды расчетов в теории нелинейных колебаний, связанные с усреднением. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 1, стр. 3—53.
4. Гроздовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В. Механика космического полета с малой тягой. М., «Наука», 1966.
5. Митропольский Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. М., «Наука», 1964.
6. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Методы расчета стационарных резонансных колебаний и вращательных движений некоторых нелинейных систем. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1968, т. 8, № 2, стр. 251—294.
7. Моисеев Н. Н. Асимптотика быстрых вращений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 1, стр. 145—158.
8. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М., «Наука», 1963.
9. Kumar K. S. P. On the optimum stabilisation of a satellitte IEEE Transactions on Acraspacc and Electronic Systems, AES-1, 1965, No. 2, pp. 82, 83. (Рус. перев.: Кумар К. С. П. Оптимальная стабилизация спутника. «Механика». Период. сб. перев. иностр. ст., 1967, № 4, стр. 62—64.)