Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

К ФОРМУЛИРОВКЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ УПРОЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

В. М. Корнев

(Новосибирск)

Напряженное состояние оболочки часто разбивается на две части: одну плавную (основная часть решения), вторую быстро затухающую от границы области внутрь (обычный краевой эффект [1] и простой краевой эффект при колебаниях [2] или устойчивости [3]).

Ниже приводятся непротиворечивые граничные условия для вырожденной задачи (основная часть решения). Сформулирована теорема о возмущении линейной краевой задачи обыкновенного дифференциального уравнения оператором высшего порядка, причем малый параметр входит не только в возмущающий оператор (см. [4], дополнение III), но и в граничные условия (малый параметр характеризует тонкостенность оболочки). По сути дела формулировка теоремы 7 из [4] (дополнение III) приспособлена к задачам, возникающим в теории оболочек [1]. Рассматривается получение краевых условий вырожденной задачи системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Приведены примеры упрощенных теорий и граничных условий для них при некоторых типах закрепления торцов оболочек вращения. В частном случае разбираются упрощенные теории цилиндрических оболочек. Дано сравнение граничных условий упрощенных уравнений с результатами других авторов.

§ 1. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение, коэффициенты которого постоянные

$$A_\varepsilon u = \varepsilon^l a_{k+l} \frac{d^{k+l}u}{dx^{k+l}} + \ldots + a_k \frac{d^k u}{dx^k} + \ldots + a_0 u = 0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1) \tag{1.1}$$

Пусть уравнение (1.1) при краевых условиях, содержащих малые параметры

$$L_{im}u = \sum_{j=0}^{k+l-1} b_{ijm} \frac{d^j u}{dx^j} = \varphi_{im} \qquad \begin{matrix} (x=0, & m=0; & i=1,\ldots,r) \\ (x=1, & m=1; & i=1,\ldots, & k+l-r) \end{matrix} \tag{1.2}$$

имеет, и притом единственное, решение при любых правых частях в (1.2), когда ε — достаточно малая положительная величина.

Допустим, характеристическое уравнение, соответствующее (1.1), имеет l больших корней порядка $O(\varepsilon^{-1})$ и k конечных корней, причем из l больших корней p имеют отрицательную вещественную часть, а $(l-p)$ — положительную вещественную часть.

Назовем краевые условия записанными в канонической форме, если они разрешены относительно членов, характеризующихся максимумом параметра μ ($\mu = n - k^*$, k^* — целые числа).

$$L_{im}{}^* u = \varepsilon^{k^*} \frac{d^n u}{dx^n} + \sum_{j=0}^{n_i^*-1} c_{ijm} \frac{d^j u}{dx^j} = \Phi_{im} \tag{1.3}$$

$$x = 0, \quad m = 0; \quad i = 1, \ldots, r; \quad \mu_1{}^0 < \mu_2{}^0 < \ldots < \mu_r{}^0$$

$$x = 1, \quad m = 1; \quad i = 1, \ldots, \quad k + l - r; \quad \mu_1{}^* < \mu_2{}^* < \ldots < \mu^*_{k+l-r}$$

Здесь μ, n, k^* — функции целочисленных аргументов

$$\mu = \mu\,(i, m), \qquad n = n\,(i, m), \qquad k^* = k\,(i, m)$$

Заметим, что при переходе от i-го граничного условия к $(i + 1)$-му параметр μ увеличивается, т. е. $\mu\,(i) < \mu\,(i + 1)$. В соотношениях (1.3) нет малых параметров ε в отрицательных степенях, т. е. $k\,(i, m) \geqslant 0$ для всех i и m. Кроме того, малый параметр ε не служит общим множителем выражения $L_{im}{}^* u = \Phi_{im}$. В частном случае, когда $k\,(i, m) \equiv 0$, запись граничных условий (1.3) совпадает с канонической формой, введенной в дополнении III из [4].

Теорема 1. Если задача

$$A_0 u_0 = a_k \frac{d^k u_0}{dx^k} + \ldots + a_0 u_0 = 0 \tag{1.4}$$

$$L_{im}{}^0 u_0 = \Phi_{im}{}^0 \; (x = 0, \;\; m = 0; \; i = 1, \ldots, r - p; \; x = 1, \;\; m = 1; \;\; i = 1, \ldots, k - r + p) \tag{1.5}$$

имеет, и притом единственное, решение, то решение u_ε задачи (1.1), (1.2) стремится к решению задачи (1.4), (1.5), когда $\varepsilon \to 0$.

Необходимо отметить, что $L_{im}{}^\circ$, $\Phi_{im}{}^\circ$ в (1.5) отличаются от (1.3), поскольку $L_{im}{}^\circ$, $\Phi_{im}{}^\circ$ членов при малых параметрах ε не содержат.

Доказательство. Асимптотическое решение задачи (1.1), (1.2) разыскивается в виде

$$u_\varepsilon = \sum_{s=0}^{S} \varepsilon^s u_s + \varepsilon^\alpha \sum_{s=0}^{S} \varepsilon^s v_s + \varepsilon^\beta \sum_{s=0}^{S} \varepsilon^s w_s + z_S \tag{1.6}$$

Здесь z_S — остаточный член разложения, v_s и w_s — функции типа погранслоя вблизи точек $x = 0$ и 1 соответственно, обе эти функции строятся с учетом сглаживающего множителя, как в [4], α и β — некоторые постоянные.

Подставляется асимптотическое решение (1.6) в (1.1) и (1.3), причем для v_s и w_s используется представление операторов A_ε и $L_{im}{}^*$ с учетом растяжения масштабов в окрестности точек $x = 0$ и $x = 1$, как в [4]. Приравниваются в полученных выражениях коэффициенты при одинаковых степенях ε [4]. Основная часть решения определяется из $A_0 u_0 = 0$. Краевые условия для этого уравнения — (1.5).

Из граничных условий для решений типа погранслоя вблизи $x = 0$ и 1 подбираются постоянные α и β. Например, для правильного построения итерационного процесса α определяется из соотношения, см. (1.3),

$$\alpha = n\,(r - p + 1,\ 0) - k\,(r - p + 1,\ 0)$$

Следующие приближения — задачи, получающиеся после приравнивания нулю выражений при следующих степенях ε. Необходимо только учесть, что для u_s, v_s ($s \neq 0$) граничные условия несколько усложняются против соответствующих граничных условий из [4] (дополнение III). Это связано с тем, что кроме погранслоя, определяемого возмущающим оператором высшего порядка, присутствуют возмущения граничных условий как в основной части краевых условий

$$L_{im}{}^{*}u_{\varepsilon}=\Phi_{im} \qquad (m=0, i=1,\ldots,r-p; m=1, i=1,\ldots,k-r+p)$$

так и в граничных условиях для решения типа погранслоя. Возмущение краевого условия разобрано в [4] (§ 4, пункт 2).

Теперь очевидно, что схема доказательства теоремы 7 из [4] (дополнение III) полностью переносится на данную теорему.

Следовательно, асимптотическое представление решения (1.1) и (1.2) в виде (1.6) справедливо, а потому $\lim u_{\varepsilon}=u_0$ при $\varepsilon\to 0$. Что и требовалось доказать.

Таким образом, теорема позволяет для вырожденного (упрощенного) уравнения $A_0u_0=0$ получить из (1.2) непротиворечивые граничные условия (1.5). В самом деле решение u_ε полной задачи (1.1), (1.2) отличается от решения вырожденной задачи (1.4) — (1.5) только членами за малым параметром ε^s, причем $s>0$.

Если некоторым образом из (1.2) получены упрощенные граничные условия для того же уравнения (1.4), отличные от (1.5), то решение в виде (1.6) не может быть построено, поскольку разложение (1.6) единственно. И следовательно, такие упрощенные граничные условия противоречивы, ибо решение u_ε полной и $u_0{}^*$ вырожденной задач в этом случае ничего общего не имеют при $\varepsilon\to 0$.

Пример 1. Рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка, которое возмущается оператором четвертого порядка,

$$\varepsilon^2u^{(4)}-u''=0$$

при краевых условиях

$$u_0+u''=2, \qquad u'-\varepsilon^k u''=1 \ (x=0,1)$$

Условия теоремы выполнены, следовательно, граничные условия для вырожденного уравнения $u^{\mathrm{II}}=0$ ($\varepsilon\to 0$) в зависимости от значения параметра k имеют вид

$$\begin{array}{cccc} k=0 & k=1 & k\geqslant 2 & \\ u_0+u_0''=2 & u_0+u_0''-u_0'=1 & u_0'=1 & (x=0,\ 1) \end{array}$$

Отметим, при $k=0$ можно пользоваться теоремой 7 из [4] (дополнение III), а при $k>0$ необходимо применять сформулированную теорему 1.

§ 2. Задачи линейной теории оболочек — задачи для системы двух дифференциальных уравнений относительно функций нормального прогиба и напряжений [1]. Вообще говоря, эта система к одному разрешающему уравнению не сводится, поэтому приспособим формулировку теоремы 1 к исследованию систем обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими коэффициентами, когда малый параметр ε (в теории оболочек он характеризует тонкостенность конструкции) входит в систему уравнений и граничные условия. Воспользуемся векторными обозначениями

$$B_\varepsilon U'=AU \qquad (0\leqslant x\leqslant 1) \tag{2.1}$$

$$L_mU=\varphi_m \qquad (m=0 \text{ при } x=0,\ m=1 \text{ при } x=1) \tag{2.2}$$

Здесь A и B_ε — квадратные матрицы с аналитическими коэффициентами порядка $l + k$, причем у B_ε отличны от нуля члены b_{ij}, стоящие только на главной диагонали $i = j$, кроме того, $b_{ii} = O(\varepsilon)$ при $i > k$, $b_{ii} = 0(1)$ при $i \leqslant k$; U — вектор-функция; L_m — матрицы ($m = 0$ число строк r, $m = 1$ число строк $k + l - r$), φ_m — вектор. Матрицы B_ε, A и L_m содержат члены при малых параметрах. О возможности сведения произвольной системы к виду (2.1) см. [5], § 37, 38.

Рассматривается такая задача (2.1), в которой при $\varepsilon = 0$ порядок вырожденной (по [5] укороченной) системы $k < k + l$. Допустим, характеристический полином порядка $k + l$ (см. § 1), соответствующий $A - \lambda B_\varepsilon$ имеет при каждом $x \in [0, 1]$ l больших корней порядка $O(\varepsilon^{-1})$ и k — конечных корней, причем из l больших корней p имеют отрицательную вещественную часть, а $l - p$ — положительную.

Замечание. В данном анализе не изучается случай, когда число конечных корней и корней порядка $O(\varepsilon^{-1})$ меняется при $x \in [0,1]$, см., например, [6].

По аналогии с § 1 вводится определение: краевые условия называются записанными в канонической форме, если они разрешены относительно членов, характеризующихся максимумом параметра μ, и при переходе от предыдущего к последующему граничному условию параметр μ увеличивается ($\mu(i) < \mu(i + 1)$)

$$L_m^* U = \Phi_m \qquad (m = 0 \ \text{при} \ x = 0, \ \ m = 1 \ \text{при} \ x = 1) \tag{2.3}$$

Прямоугольные матрицы L_m^* имеют вид

$$L_m^* = \begin{Vmatrix} L_m^0 & G_\sigma \\ C_5 & 'C_7 \end{Vmatrix} \tag{2.4}$$

Число столбцов в L_m° совпадает при $m = 0, 1$ и равно k, а число строк $r - p$ при $m = 0$ и $k - r + p$ при $m = 1$. Как и в § 1, ни в одно из краевых условий (2.3) ε в отрицательной степени не входит и не является общим множителем. Этот параметр μ подсчитывается по следующему правилу:

$$\mu = -k^* - n \qquad (k^* \geqslant 0, \ \ n \geqslant 0)$$

где $k^* = k(i, j)$, $n = n(i, j)$ — степени малого параметра при членах в L_m^* и в решении типа погранслоя v_i около $x = 0$ и w_i около $x = 1$ ($c_{0j} = 0(1)$, $c_{1j} = 0(1)$)

$$\begin{aligned} v_i &= \sum_{j=1}^{p} c_{0j}\varepsilon^n \exp\left(-\frac{q_{0j}x}{\varepsilon}\right) \qquad (i = k + 1, \ldots, k + p) \\ w_i &= \sum_{j=1}^{l-p} c_{1j}\varepsilon^n \exp\frac{q_{1j}(x-1)}{\varepsilon} \qquad (i = k + p + 1, \ldots, k + l) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Погранслои v_i и w_i — затухающие от границы внутрь области решения систем уравнений с постоянными коэффициентами

$$B^{*0}V' = A^{*0}V, \qquad B^{*1}W' = A^{*1}W$$

Квадратные матрицы B^{*0}, B^{*1}, A^{*0}, A^{*1}, имеющие порядок l, соответствуют правым нижним углам матриц B_ε и A, если в последних положить $x = 0$ и $x = 1$,

$$B_\varepsilon = \begin{Vmatrix} B_0 & C_2 \\ C_1 & B^* \end{Vmatrix}, \qquad A = \begin{Vmatrix} A_0 & C_4 \\ C_3 & A^* \end{Vmatrix} \tag{2.6}$$

Пусть задача (2.1), (2.2) при произвольном векторе φ_m имеет и притом единственное решение, когда $\varepsilon > 0$ — достаточно малая величина, а число краевых условий (2.2) при $x = 0$ и 1 превосходит соответственно числа p и $l - p$ $(r > p,\ k + l - r > l - p)$, т. е. выполнено условие регулярности вырождения [4]. «Грубо говоря, условие регулярности означает, что краевые условия не должны быть слишком неравно распределены между двумя граничными точками» ([5], стр. 272).

Теорема 2. Если задача

$$B_0 U_0' = A_0 U_0 \tag{2.7}$$

$$L_m{}^0 U_0 = \Phi_m \quad (m = 0 \text{ при } x = 0,\ m = 1 \text{ при } x = 1) \tag{2.8}$$

имеет, и притом единственное, решение, то решение U_ε задачи (2.1), (2.2) стремится к решению задачи (2.7), (2.8), когда $\varepsilon \to 0$.

Матрицы $B_0, A_0, L_m{}^0$ и вектор $\Phi_m{}^0$ определены выше в (2.3), (2.4) и (2.6).

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 7 из [4] (дополнение III), см. рассуждения § 1.

Таким образом, сформулированная теорема позволяет для вырожденной задачи $B_0 U_0' = A_0 U_0$ получить непротиворечивые граничные условия (2.8).

Пример 2. Рассматривается система дифференциальных уравнений четвертого порядка

$$B_\varepsilon U' = AU \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

$$B_\varepsilon = \begin{Vmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon b_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon b_{44} \end{Vmatrix}, \qquad A = \begin{Vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{Vmatrix}, \qquad U = \begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Vmatrix}$$

при краевых условиях

$$u_1 + u_3 = 2, \qquad u_2 + \varepsilon^{k-1} u_4 = 1 \qquad (x = 0{,}1)$$

Здесь b_{ij} и a_{ij} — аналитические функции, k — некоторое число. Пусть условия теоремы 2 выполнены, тогда для вырожденной (упрощенной) системы второго порядка $(\varepsilon \to 0)$

$$b_{11} u_{01}' = a_{12} u_{02}, \qquad b_{22} u_{02}' = 0$$

непротиворечивые граничные условия

$$k = 0 \qquad\qquad k = 1 \qquad\qquad k \geqslant 2$$

$$u_{01} + u_{03} = 2 \qquad u_{01} + u_{03} - u_{02} = 1 \qquad u_{02} = 1 \qquad (x = 0.1)$$

Отметим, что при $b_{11} = b_{22} = b_{33} = b_{44} = 1$ и $a_{12} = a_{22} = a_{34} = a_{43} = 1$ разобранный пример совпадает с примером 1.

§ 3. Изучаются только оболочки вращения. Задачи теории оболочек есть задачи для системы двух дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных [1]

$$h_0^2 N\Phi + L\Phi + \lambda M\Phi = F \tag{3.1}$$

Краевые условия для системы (3.1) имеют вид

$$R_i\Phi = \varphi_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{3.2}$$

Здесь L, N, M — линейные дифференциальные операторы с двумя независимыми переменными, причем порядок оператора N больше L, а M имеет или тот же порядок, что и L, или больше; λ — параметр нагрузки или собственной частоты (для задач прочности $\lambda \equiv 0$); R_i — линейные дифференциальные операторы, определенные на контуре оболочки; φ_i и F — заданные нагрузки (смещения) по контуру и на срединной поверхности соответственно; h_0 — безразмерная толщина оболочки.

Вообще говоря, в операторы R_i малый параметр h_0 может не входить. Например, для теории пологих оболочек граничные условия выписываются без малого параметра. В то же время уточненные варианты теории оболочек малый параметр h_0 содержат как при младших, так и при старших производных в R_i.

Кроме того, надо учитывать, что F и φ_i могут быть осциллирующими функциями. Поэтому имеет смысл рассматривать «задачи, в которых при беспредельном уменьшении h_0 в уравнении (3.1) по определенному закону увеличивается и осцилляция граничных условий (3.2) или свободного члена в (3.1)», см. [1], введение.

И наконец, для задач о собственных колебаниях и устойчивости «наименьшему собственному значению λ в ряде случаев соответствуют собственные функции с весьма большим ... числом узловых линий» [1].

Во всех этих трех случаях получается после разделения переменных система обыкновенных дифференциальных уравнений при некоторых граничных условиях. И в системе, и в краевых условиях имеются члены за малыми параметрами (разделение переменных всегда можно провести для полных оболочек вращения, если торцы оболочек перпендикулярны их оси).

Полученная задача для системы уравнений к задачам (1.1), (1.2); (2.1), (2.2) чаще всего не сводится. Это связано с тем, что порядок больших корней характеристического уравнения может отличаться от $O(\varepsilon^{-1})$. Поэтому вместо ε вводится в систему и краевые условия другой малый параметр $\delta = \varepsilon^{\gamma}$, где γ — порядок больших корней относительно ε характеристического уравнения, а затем применяется теорема 1, либо 2, т. е. вычеркиваются последние p и $l - p$ краевые условия в (1.3) либо в (2.3) и опускаются члены при малых параметрах.

В том случае, когда порядок больших корней различен, например $O(\varepsilon^{-\gamma_1})$ и $O(\varepsilon^{-\gamma_2})$, из двух чисел выбирается наибольшее $\gamma_1 > \gamma_2$. Все рассуждения проводятся сначала для корней порядка $-\gamma_1$ ($\delta_1 = \varepsilon^{\gamma_1}$). Получается первая вырожденная (упрощенная) задача (см. теоремы 1, 2). Эта первая вырожденная задача еще раз упрощается. Теперь уже упрощения проводятся для $\delta_2 = \varepsilon^{\gamma 2}$. Применяя еще раз теорему 1 либо 2, получают вторую вырожденную (упрощенную) задачу.

Таким образом, для упрощенных теорий оболочек указана процедура получения непротиворечивых граничных условий (1.5) либо (2.7), причем решение полных уравнений теории оболочек от решения упрощенных уравнений отличается незначительно, если параметр δ достаточно мал.

§ 4. Рассмотрим некоторые примеры более подробно. Оценим влияние типа закрепления на торцах цилиндрической оболочки, нагруженной внешним поперечным или гидростатическим давлением на параметр критической нагрузки, когда расчеты проводятся по приближенной теории (теория пологих оболочек) и уточненной теории типа [7]. Полученные оценки сравним с численными расчетами из [3, 8].

В рассматриваемой задаче наименьшему собственному значению λ соответствует определенное число волн потери устойчивости n по окружности. Когда закрепление — закрепление типа шарнира или заделки

$$n^2 = O(\varepsilon^{-1}), \qquad \varepsilon = (h / R)^{1/2}$$

Здесь R — радиус оболочки, h — ее толщина.

Исследуется характеристическое уравнение дифференциального выражения, полученного из (3.1) после разделения переменных. Порядок корней краевого эффекта, которым соответствует осциллирующее решение, —$O(\varepsilon^{-1})$. Корни, которые порождают неосциллирующий краевой эффект, имеют порядок $O(\varepsilon^{-1/2})$. Основная часть решения, захватывающая всю область, осциллирует [3, 8].

Граничные условия типа шарнира и заделки, рассмотренные в [3, 8], после разделения переменных содержат малые параметры. Исключение составляют граничные условия

$$N_1 = v = w = M_1 = 0 \tag{4.1}$$

Здесь N_1 — усилие вдоль образующей, w — нормальный прогиб, v — перемещение по дуговой координате, M_1 — изгибающий момент. Эти условия принимают вид после разделения переменных

$$f = f'' = f^{(4)} = f^{(6)} = 0 \tag{4.2}$$

Если в полном уравнении восьмого порядка при краевых условиях (4.1) на обоих торцах устремить малый параметр к нулю $\varepsilon \to 0$ ($h \to 0$), то краевые условия для вырожденной (укороченной) задачи (см. [4], дополнение III) — $f_0 = f_0'' = 0$ (вырожденное уравнение имеет четвертый порядок), а граничные условия для еще более упрощенной теории (уравнение второго порядка) — $f_0 = 0$.

При других типах закрепления канонический вид в отличие от (4.2) определяется по максимуму параметра μ (см. § 1). Канонический вид граничных условий для одного из вариантов заделки (вырожденное уравнение имеет четвертый порядок)

$$N_1 = v = w = w_{,x} = 0 \tag{4.3}$$

$$f = 0\ (\mu_1 = 0),\quad f'' = 0\ (\mu_2 = 2),\ \nabla\nabla\ \ f' = 0\ (\mu_3 = 3),\ f^{(4)} = 0\ (\mu_4 = 4)$$

где x — координата вдоль оси цилиндра, $\nabla f = f'' - n^2 f$. Канонический вид граничных условий при закреплении

$$N_1 = S = w = M_1 = 0 \tag{4.4}$$

более громоздкий, чем (4.3). Формально равенства (4.4) переписываются так

$$f'' = f''' = 0 \tag{4.5}$$

$$\varepsilon^2 f^{(4)} \sum_{j=0}^{\infty} a_j \varepsilon^j + f = 0,\quad \varepsilon^2 \left(\varepsilon f^{(6)} \sum_{j=0}^{\infty} b_j \varepsilon^j + f^{(4)} \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varepsilon^j\right) + f = 0$$

Ряды считаются сходящимися. Если в выражении для M_1 коэффициент Пуассона положить равным нулю, то перед скобкой в последнем условии (4.5) малый параметр входит в первой степени. Именно этот случай анализируется дальше.

Следуя правилу, краевым условиям надо придать вид (вырожденное уравнение имеет четвертый порядок)

$$\begin{gathered} a_0 (\varepsilon^2 f^{(4)} - f'') + \varepsilon^2 f^{(4)} \sum_{j=1}^{\infty} a_j \varepsilon^j + f = 0 \qquad (\mu_1 = 1) \\ f'' = 0\ (\mu_2 = 2),\qquad f''' = 0 \quad (\mu_3 = 3) \\ \varepsilon \left(\varepsilon f^{(6)} \sum_{j=0}^{\infty} b_j \varepsilon^j + f^{(4)} \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varepsilon^j\right) + f = 0 \qquad (\mu_4 = 4) \end{gathered} \tag{4.6}$$

Уже по одной записи граничных условий (4.3) и (4.6) в каноническом виде можно судить о порядке поправок к параметру критической нагрузки λ_0. Параметр λ_0 определяется для шарнирно опертой на обоих торцах оболочки (см. (4.1)). Для краевых условий (4.3) и (4.6) по сравнению с (4.2) «испорченным» оказывается третье условие. Поэтому относительная поправка $|\lambda / \lambda_0|$ для условий (4.3) или (4.6) большой быть не может, что и показали расчеты [3].

Наибольшая относительная поправка получается, если окажется «испорченным» основное граничное условие в (4.2) либо первое, либо второе. Это имеет место, когда рассматриваются закрепления краев оболочки, имеющие ограничение на перемещение u в направлении оси цилиндра. Например, для заделки

$$u = w = S = w_{,x} = 0$$

канонический вид граничных условий (вырожденная задача имеет четвертый порядок)

$$f' = 0\ (\mu_1 = 1),\quad \nabla\nabla f = 0\ (\mu_2 = 2),\quad f''' = 0\ (\mu_3 = 3),\quad f^{(5)} = 0\ (\mu_4 = 5)$$

Вычисления, проведенные в [8], показали, что граничное условие $u = 0$ существенно изменяет величину критической нагрузки.

Когда изучаются оболочки со свободным краем, необходимо использовать уточненные уравнения устойчивости и соответствующие им краевые условия [7], например [3], § 2. В граничные условия уточненных теорий входят члены, стоящие при малых множителях. На свободном крае все силовые факторы равны нулю ($Q_1{}^*$ — обобщенная поперечная сила)

$$N_1 = S = M_1 = Q_1{}^* = 0 \tag{4.7}$$

Подробная запись (4.7) после разделения переменных приведена в § 2 [3]. Краевые условия для вырожденной задачи формулируются в зависимости от числа волн n по окружности. Когда $n = 2$ ($R / h = 100$), граничные условия вырожденной задачи четвертого порядка имеют вид

$$f_0'' = 0 \ (\mu_1 = 2), \ f_0''' = 0 \ (\mu_2 = 3) \tag{4.8}$$

Вырожденная задача второго порядка для первой формы по продольной координате смысла не имеет, поскольку неосциллирующий краевой эффект захватывает всю оболочку (см. [3]).

В том случае, когда $n^2 = O(\varepsilon^{-1})$ (таково n для наименьшей критической нагрузки второй формы потери устойчивости по продольной координате цилиндрической оболочки, один край которой шарнирно оперт, а другой свободен, $R / h = 100$), граничные условия той же предельной задачи четвертого порядка приобретают вид

$$f_0 - b_0 f_0''' = 0, \ f_0'' = 0 \tag{4.9}$$

Первое условие (4.9) соответствует граничному условию, см. (4.4) и (4.5) (коэффициент Пуассона отличен от нуля в M_1)

$$b_0 (\varepsilon^3 f^{(6)} - f''') + b_1 \varepsilon^4 f^{(6)} + \varepsilon^2 c_0 f^{(4)} + \varepsilon^3 f^{(6)} \sum_{j=2}^{\infty} b_j \varepsilon^j + \varepsilon^2 f^{(4)} \sum_{j=1}^{\infty} c_j \varepsilon^j + f = 0 \tag{4.10}$$

Переход от (4.10) к первому условию (4.9) осуществляется при $\varepsilon \to 0$. В условии (4.10) уже опущены члены, не влияющие на результат. Эти члены появляются в связи с тем, что надо рассматривать более точные выражения, чем (4.5).

Так как корень, соответствующий неосциллирующему краевому эффекту для второй формы, имеет порядок $O(\varepsilon^{-1/2})$, граничные условия вырожденной задачи второго порядка таковы, $f_0'' = 0$. Очевидно, основная часть второй формы выпучивания по продольной координате — полуволна синусоиды для оболочки, закрепление которой по торцам есть шарнирное опирание (4.1) и свободный край (4.7), см. [3], фиг. 1 $m = 1$.

Таким образом, для одного и того же уравнения четвертого порядка получены разные граничные условия (4.8), (4.9), хотя исходные условия закрепления совпадали и имели вид (4.7).

Процедура определения граничных условий для приближенных теорий оболочек в [9, 10] не всегда приводит к результатам, совпадающим с изложенными выше.

Сформулированная теорема 1 (напомним, что эта теорема является видоизменением теоремы 7 из [4]), позволяет единообразно подойти к формулировке граничных условий упрощенных уравнений теории оболочек. Непосредственно теорема 7 [4] из пяти рассмотренных вариантов граничных условий применима только к (4.1), см. (4.2).

§ 5. Определение непротиворечивых краевых условий в общем случае для оболочек вращения требует достаточно громоздких, но простых выкладок.

Ниже сравниваются непротиворечивые краевые условия вырожденной задачи четвертого порядка (см. теорему 2) и граничные условия для упрощенных уравнений устойчивости круговых конических оболочек при гидростатическом давлении [6, 11]. Сравнение проводится для торца $x = 1$, (см. [6]). Все обозначения в этом параграфе совпадают с обозначениями работы [6], поскольку они введены там удачно

$$k^2 = O(\varepsilon^{-1/2}) \quad \psi = \varphi = 0, \quad \psi = \varphi = 0 \quad \psi = \varphi = 0$$

$$k^2 = O(\varepsilon^{-1}) \quad \psi = \varphi = 0 \quad \psi = p\psi' - \nu\varphi = 0 \quad \psi = \varphi = 0$$

$$k^2 = O(\varepsilon^{-3/2}) \quad \psi = \varphi = 0 \quad \psi = \psi' = 0 \quad —$$

Здесь ψ и φ — функции нормального прогиба и напряжений вдоль образующей, k — круговая частота изменения напряженного состояния после потери устойчивости при обходе оболочки по параллели, ε — малый параметр. Столбцу 1 соответствуют полные граничные условия (1.5) из [6]; 2 — (1.4) из [6]; 3 — (10) из [11]. Все граничные условия первого столбца совпадают с упрощенными краевыми условиями (2.3) системы (2.1) [6], во втором столбце последняя строка совпадает с упрощенными условиями (2.2) системы (2.1) [6]. Прочерк в третьем столбце заменяет громоздкую запись. Ни один из вариантов граничных условий последнего столбца не совпадает с упрощенными с краевыми условиями (12) из [11].

Последовательность действий при определении приведенных в таблице непротиворечивых краевых условий вырожденной задачи такова: сначала исследуются преобразованные системы уравнений, описывающие устойчивость оболочек: (1.2) из [6] и (9) из [11]; устанавливается наличие четырех больших по модулю корней, причем два из них имеют отрицательную действительную часть, а два — положительную действительную часть; вводится соответствующий малый параметр (см. § 3); определяются краевые эффекты (2.5) и вырожденная система уравнений четвертого порядка (см. (2.1) [6]); граничные условия (1.4) и (1.5) из [6] и (10) из [11] записываются в каноническом виде (2.3), (2.4) (предварительно проводится подсчет параметра μ); теперь остается только вычеркнуть два последних условия в (2.3), в оставшихся первых двух, если имеются члены за малым параметром ε, устремить этот малый параметр к нулю $\varepsilon \to 0$; после всего этого переходим к старым обозначениям.

Таким образом, как и в предыдущем параграфе, обнаружена существенная зависимость краевых условий вырожденной задачи от частоты осцилляции k. На то, что такое явление может иметь место, указано в [1], стр. 4.

Проведенное разделение напряженного состояния оболочки вращения на две части дает возможность применять к каждой из частей свои методы решения, а именно: основную часть решения (вырожденная задача со своими граничными условиями) разумно строить вариационными либо численными методами, поскольку эта часть решения, как правило, плавно меняется, а подправлять полученное решение краевым эффектом, эффективное построение которого хорошо известно [1, 4]. Например, в работах [6, 12] основная часть решения в задачах устойчивости оболочек вращения выписана в явном виде с большой точностью. Расчленение граничных условий в линейной теории оболочек позволяет перейти к анализу более сложных задач [13, 14], возникающих при расчете тонкостенных подкрепленных конструкций.

Поступила 9 XII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Некоторые математические проблемы линейной теории упругих тонких оболочек. Усп. матем. н., 1960, т. 15, вып. 5.
2. Болотин В. В. Краевой эффект при колебаниях упругих оболочек. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
3. Корнев В. М. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки, нагруженной внешним поперечным давлением с учетом краевого эффекта. Инж. ж. МТТ, 1967, № 3.
4. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. I. Усп. матем. н., 1960, т. 15, вып. 3.
5. Вазов В. Асимптотические разложения решений дифференциальных уравнений. М., «Мир», 1968.
6. Алумяэ Н. А. Асимптотическое интегрирование уравнений статической устойчивости конической оболочки вращения. ПММ, 1957, т. 21, вып. 1.
7. Власов В. З. Избр. тр. т. 1, Изд-во АН СССР, 1962.
8. Sobel L. N. Effect of boudary conditions on the stability of cylinders subsect to laterol and axial pressure. AIAA Journal, 1964, vol. 2, No. 8.
9. Саченков А. В. Об устойчивости цилиндрической оболочки при произвольных краевых условиях под действием равномерного поперечного давления. Изв. Казанск. фил. АН СССР, Сер. физ.-мат. и техн. н., 1958, т. 127, № 12.
10. Даревский В. М., Кшнякин Р. И. Устойчивость консольной цилиндрической оболочки с подкрепленным краем при действии внешнего давления. Докл. АН СССР, 1960, т. 131, № 6.
11. Kornecki A. Buckling of trancated conical shells under uniform static pressure. AIAA Journal, 1967, vol. 5, No. 11.
12. Корнев В. М. Определение критических нагрузок и форм потери устойчивости упругих оболочек вращения. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 1.
13. Черных К. Ф. Простой краевой эффект и расчленение граничных условий в линейной теории тонких оболочек. Изв. АН СССР, Механ., 1965, № 1.
14. Михайловский Е. И., Черных К. Ф. Расчленение граничных условий в линейной теории оболочек (случай подкрепленного неасимптотического края). В кн.: «Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды». М., «Наука», 1969, стр. 321—326.