Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

О СВОЙСТВАХ ПОТЕНЦИАЛА НАПРЯЖЕНИЙ УПРУГИХ ТЕЛ

Б. С. Турсунов

(Ленинград)

Обратимость деформаций идеально упругих тел приводит к требованию существования удельной энергии деформации — функции компонентов деформации, полностью характеризующей механические свойства материала тела. Напряжения связаны с этой функцией равенством

$$\sigma_{ij} = \partial\Phi/\partial\eta_{ij} \tag{0.1}$$

т. е. будут ее градиентом в шестимерном пространстве деформаций.

Для реальных упругих тел характерно возрастание работы, затрачиваемой на деформацию при изменении компонентов деформации в сторону удаления от естественного (ненапряженного) состояния тела. Это свойство можно назвать устойчивостью материала. Оно делает невозможным возрастание деформации твердых тел без увеличения на них нагрузки. Впервые на это свойство было обращено внимание в теории пластичности, где оно было сформулировано Друккером [1], как один из основных постулатов данной теории. Впоследствии тот же автор [2] заметил, что этот постулат не специфичен для теории пластичности, а является положением более общего характера, которое следует считать справедливым для любых твердых тел.

Для идеально упругих материалов требование устойчивости выражается в требовании выпуклости потенциала напряжений в шестимерном пространстве деформаций η_{ij}. Последнее вытекает из того, что для упругих материалов выражение постулата Друккера принимает вид

$$d\sigma_{ij}d\eta_{ij} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta_{kl}\partial\eta_{ij}}d\eta_{kl}d\eta_{ij} \geqslant 0 \qquad (i, j, k, l=1, 2, 3) \tag{0.2}$$

Знак равенства возможен либо в тривиальном случае отсутствия дополнительной нагрузки, либо в случае несжимаемого упругого материала, когда дополнительная нагрузка будет гидростатическим давлением. Отсюда видно, что квадратичная форма (0.2) должна быть знакоопределенной. Термин «реальное упругое тело», который применяется выше, требует некоторого пояснения. Поведение низкомолекулярных твердых тел, в частности металлов, будет упругим только при малых деформациях. С другой стороны, существует класс материалов, поведение которых наиболее полно отвечает теоретической модели идеально упругого тела. Это высокомолекулярные соединения, которые в высокоэластичном состоянии, как показали многочисленные опыты [3], ведут себя аналогично несжимаемым упругим телам, причем деформации могут достигать весьма больших значений.

Потенциал, как обычно, примем в виде

$$\Phi = \Phi\ (I_1, I_2, I_3) \tag{0.3}$$

причем для полимеров достаточно считать Φ функцией инвариантов I_2 и I_3 тензора деформации. В данной работе рассматривается вопрос об ограничениях, накладываемых условием (0.2) на потениал и его производные, и выясняется смысл этих ограничений.

1. Ограничения на упругий потенциал и упругие характеристики материала, вытекающие из постулата устойчивости (0.2). Введем в рассмотрение следующие соотношения:

$$
\begin{aligned}
&I_1 = \varepsilon_{ij}\delta_{ij},\ I_2 = {}^1/_2\,\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} - {}^1/_6\,I_1^2 \qquad \varepsilon_{ij} = \begin{cases} \eta_{ij} & i=j \\ {}^1/_2\,\eta_{ij} & i\neq j \end{cases} \\
&I_3 = -\varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj}\varepsilon_{ji} + 2I_1I_2 + {}^1/_9\,I_1^3
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

$$
\partial I_1 / \partial\varepsilon_{ij} = \delta_{ij}, \qquad \partial I_2 / \partial\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij} - {}^1/_3\,I_1\delta_{ij}
$$

$$
\partial I_3 / \partial\varepsilon_{ij} = -3\varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj} + 2I_1(\varepsilon_{ij} - {}^1/_3\,I_1\delta_{ij}) + (2I_2 + {}^1/_3\,I_1^2)\delta_{ij} \tag{1.2}
$$

Здесь η_{ij} — компоненты деформаций. Учитывая (1.2), из (0.2) получим

$$
\begin{aligned}
d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} = {} & \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_1^2} - \frac{1}{3}\frac{\partial\Phi}{\partial I_2}\right)(dI_1)^2 + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_1\partial I_2} + 2\frac{\partial\Phi}{\partial I_3}\right)2dI_1dI_2 + \\
& + 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_1\partial I_3}dI_1dI_3 + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_2^2} + 2I_1\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_2\partial I_3}\right)(dI_2)^2 + \\
& + \frac{\partial^2\Phi}{\partial I_3^2}(dI_3)^2 + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_2\partial I_3} + I_1\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_3^2}\right)2dI_2dI_3 + \\
& + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial I_2} + 2I_1\frac{\partial\Phi}{\partial I_3}\right)d\varepsilon_{kl}d\varepsilon_{kl} - 6\frac{\partial\Phi}{\partial I_3}d\varepsilon_{kl}d\varepsilon_{km}\varepsilon_{lm}
\end{aligned} \tag{1.3}
$$

Выберем систему отсчета так, чтобы координатные оси совпадали с главными осями тензора ε_{ij}. Тогда в силу (1.2) дифференциалы dI_k содержат только $d\varepsilon_{11}$, $d\varepsilon_{22}$ и $d\varepsilon_{33}$, и квадратичная форма будет состоять лишь из членов с попарными произведениями этих дифференциалов и с квадратами $d\varepsilon_{ij}$. Обозначим коэффициенты при $(d\varepsilon_{11})^2$, $(d\varepsilon_{22})^2$, ..., $(d\varepsilon_{23})^2$ через A_{11}, A_{22}, ..., A_{66}, а коэффициенты при $d\varepsilon_{11}d\varepsilon_{22}$, $d\varepsilon_{11}d\varepsilon_{33}$ и $d\varepsilon_{22}d\varepsilon_{33}$ через $2A_{12}$, $2A_{13}$ и $2A_{23}$ соответственно.

Форма (1.3) разбивается на две: одна по переменным $d\varepsilon_{11}$, $d\varepsilon_{22}$, $d\varepsilon_{33}$, другая по переменным $d\varepsilon_{12}$, $d\varepsilon_{13}$, и $d\varepsilon_{23}$. В соответствии с этим и условия положительной определенности формы (1.3)

$$
\det\|A_{lm}\| > 0 \qquad (l, m = 1, 2, 3) \tag{1.4}
$$

$$
\begin{gathered}
D_4 = A_{44}D_3 > 0, \quad A_{44} > 0; \qquad D_5 = A_{55}A_{44}D_3 > 0, \quad A_{55} > 0 \\
D_6 = A_{66}A_{55}A_{44}D_3 > 0, \quad A_{66} > 0
\end{gathered} \tag{1.5}
$$

распадаются на условия положительной определенности для каждой формы в отдельности. Именно (1.4) относится к первой, а (1.5) — ко второй. Это делает возможным раздельное рассмотрение каждой квадратичной формы. Дополнительное напряжение $d\sigma_{ij}$ вызывает два независимых одно от другого класса изменений $d\varepsilon_{ij}$ тензора ε_{ij}: изменение инвариантов — первая форма и поворот главных осей — вторая. Отсюда становится понятной и отмеченная выше особенность квадратичной формы (1.3).

Рассмотрим первую форму. Вместо условий (1.4) введем следующие:

$$
\begin{gathered}
(1)\quad A_{11} + A_{22} + A_{33} > 0 \\
(2)\quad A_{11}A_{22} + A_{11}A_{33} + A_{22}A_{33} - A_{12}^2 - A_{13}^2 - A_{23}^2 > 0 \\
(3)\quad \det\|A_{kl}\| > 0 \qquad (k, l = 1, 2, 3)
\end{gathered} \tag{1.6}
$$

Можно показать, что эти условия эквивалентны (1.4). Для этого достаточно привести симметричную матрицу коэффициентов квадратичной формы к диагональному виду с некоторыми элементами B_{11}, B_{22}, B_{33}. Тогда условия (1.4) равносильны положительности этих элементов, и условия (1.6) соответственно принимают вид

$$B_{11} + B_{22} + B_{33} > 0, \quad B_{11} B_{22} + B_{11}B_{33} + B_{22}B_{33} > 0, \quad B_{11}B_{22}B_{33} > 0$$

Из первого условия следует, что по крайней мере один элемент, например B_{11}, должен быть положительным, а из последнего ясно, что отрицательных элементов может быть только два (B_{22} и B_{33}). Перепишем второе условие в виде

$$B = B_{22}\,(B_{11} + {}^1\!/_2 B_{33}) + B_{33}\,(B_{11} + {}^1\!/_2 B_{22})$$

Величины в скобках положительны, поэтому все выражение отрицательно. Следовательно, предположение об отрицательности B_{22} и B_{33} неверно, и (1.4) и (1.6) оказываются эквивалентными.

Для принятой системы отсчета $\varepsilon_{11} = \eta_1$, $\varepsilon_{22} = \eta_2$, $\varepsilon_{33} = \eta_3$, где η_i — главные деформации, связанные с инвариантами I_k соотношениями

$$\eta_1 = {}^2\!/_3\sqrt{3}I_2^{1/2} \sin(\varphi + {}^2\!/_3\pi) + {}^1\!/_3 I_1, \quad \eta_2 = {}^2\!/_3\sqrt{3}I_2^{1/2} \sin\varphi + {}^1\!/_3 I_1$$
$$\eta_3 = {}^2\!/_3 \sqrt{3}I_2^{1/2} \sin(\varphi + {}^4\!/_3\pi) + {}^1\!/_3 I_1, \quad \varphi = {}^1\!/_3 \arcsin({}^1\!/_2 \sqrt{3}I_3 / I_2^{3/2})$$
$$-{}^1\!/_6\pi \leqslant \varphi \leqslant {}^1\!/_6\pi \tag{1.7}$$

Использовав (1.1), (1.2) для вычисления коэффициентов A_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), получим из (1.6)

$$3\partial^2\Phi / \partial I_1^2 + \Psi_1 > 0, \quad \Psi_1\partial^2\Phi / \partial I_1^2 + \Psi_2 > \Psi_3, \quad \Psi_2\partial^2\Phi / \partial I_1^2 \geqslant \Psi_4 \tag{1.8}$$

Знак равенства в последнем из соотношений (1.8) относится к случаю несжимаемого материала. В неравенствах (1.8)

$$\Psi_1 = 2I_2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial I_2^2} + 6I_3 \frac{\partial^2\Phi}{\partial I_2\,\partial I_3} + 2\frac{\partial\Phi}{\partial I_2} + 6I_2^2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial I_3^2}$$

$$\Psi_2 = (4I_2^3 - 3I_3^2)\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_2^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_2^2} - \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_2\,\partial I_3}\right)^2\right] + \frac{2I_2}{3}\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_2^2}\frac{\partial\Phi}{\partial I_2} -$$
$$- 2I_3 \frac{\partial^2\Phi}{\partial I_2^2}\frac{\partial\Phi}{\partial I_2} + 2I_3 \frac{\partial^2\Phi}{\partial I_2\,\partial I_3}\frac{\partial\Phi}{\partial I_2} - 8I_2^2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial I_2\,\partial I_3}\frac{\partial\Phi}{\partial I_3} +$$
$$+ 2I_2^2 \frac{\partial_3\Phi}{\partial I_3^2}\frac{\partial\Phi}{\partial I_2} - 6I_2I_3 \frac{\partial^2\Phi}{\partial I_3^2}\frac{\partial\Phi}{\partial I_3} + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial I_2}\right)^2 - 4I_2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial I_3}\right)^2$$

$$\Psi_3 = 2I_2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_1\,\partial I_2}\right)^2 + 6I_3 \frac{\partial^2\Phi}{\partial I_1\,\partial I_2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_1\,\partial I_3} + 6I_2^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_1\,\partial I_3}\right)^2$$

$$\Psi_4 = \left[(4I_2^3 - 3I_3^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_3^2} + \frac{2I_2}{3}\frac{\partial\Phi}{\partial I_2} - 2I_3\frac{\partial\Phi}{\partial I_3}\right]\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_1\,\partial I_2}\right)^2 -$$
$$- \left[2(4I_2^3 - 3I_3^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_2\,\partial I_3} - 2I_3\frac{\partial\Phi}{\partial I_2} + 8I_2^2\frac{\partial\Phi}{\partial I_3}\right]\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_1\,\partial I_2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_1\,\partial I_3} +$$
$$+ \left[(4I_2^3 - 3I_3^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_2^2} + 2I_2^2\frac{\partial\Phi}{\partial I_2} - 6I_2I_3\frac{\partial\Phi}{\partial I_3}\right]\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_1\,\partial I_3}\right)^2 \tag{1.9}$$

Введем в рассмотрение обобщенные упругие модули согласно [4]

$$K = \frac{1}{3}\frac{\sigma}{I_1}, \quad G = \frac{1}{2}\frac{J_2^{1/2}}{I_2^{1/2}}, \quad \omega = \psi - \varphi, \quad -\frac{\pi}{3} \leqslant \omega \leqslant \frac{\pi}{3} \tag{1.10}$$

Они связаны с потенциалом Φ соотношениями

$$\partial\Phi / \partial I_1 = KI_1, \qquad \partial\Phi / \partial I_2 = 2G\cos\omega, \qquad \partial\Phi / \partial\varphi = 4GI_2\sin\omega$$

Здесь

$$\sigma = \sigma_{ij}\delta_{ij}, \qquad J_2 = {}^1/_2\sigma_{ij}\sigma_{ij} - {}^1/_6\sigma^2, \qquad J_3 = -\sigma_{ik}\sigma_{kj}\sigma_{ji} + 2\sigma J_2 + {}^1/_9\sigma^3$$

$$\psi = {}^1/_3 \arcsin({}^1/_2\sqrt{3}J_3 / J_2^{3/2}), \qquad -{}^1/_6\pi \leqslant \psi \leqslant {}^1/_6\pi \tag{1.11}$$

Потенциал Φ в (1.9) считается функцией инвариантов I_1, I_2 и I_3, а в (1.11) — инвариантов I_1, I_2 и φ. Соответственно этому $\partial\Phi / \partial I_2$ имеет в этих соотношениях разный смысл.

Из равенства производных $\partial^2\Phi / \partial I_2\partial\varphi$ и $\partial^2\Phi / \partial\varphi\partial I_2$ следует

$$\cos\omega\, \partial G / \partial\varphi - G\sin\omega\, \partial\omega / \partial\varphi = 2G\sin\omega +$$

$$+ 2I_2(\sin\omega\, \partial G / \partial I_2 + G\cos\omega\, \partial\omega / \partial I_2) \tag{1.12}$$

Учитывая замечание относительно $\partial\Phi / \partial I_2$ и используя (1.7), (1.11) и (1.12) для вычисления производных, входящих в (1.9), получим

$$\Psi_1 = -\frac{2}{\sin\omega}\left(2I_2G\frac{\partial\omega}{\partial I_2} - \frac{\partial G}{\partial\varphi}\right) = \frac{2}{\cos\omega}\left[2I_2\frac{\partial G}{\partial I_2} + G + G\left(\frac{\partial\omega}{\partial\varphi} + 1\right)\right]$$

$$\Psi_2 = \frac{4G}{3}\left[\left(2I_2\frac{\partial G}{\partial I_2} + G\right)\left(\frac{\partial\omega}{\partial\varphi} + 1\right) - 2I_2\frac{\partial G}{\partial\varphi}\frac{\partial\omega}{\partial I_2}\right] \tag{1.13}$$

$$\Psi_3 = 8I_2\left[\left(\frac{\partial G}{\partial I_1}\right)^2 + \left(G\frac{\partial\omega}{\partial I_1}\right)^2\right]$$

$$\Psi_4 = \frac{16I_2}{3}\left[\left(-\sin\omega\frac{\partial G}{\partial\varphi} + \frac{G}{\cos\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi} + 2I_2\frac{\sin^2\omega}{\cos\omega}\frac{\partial G}{\partial I_2} + \right.\right.$$

$$\left. + G\frac{1+\sin^2\omega}{\cos\omega}\right)\left(\frac{\partial G}{\partial I_1}\right)^2 - 2G\left(\cos\omega\frac{\partial G}{\partial\varphi} - 2I_2\sin\omega\frac{\partial G}{\partial I_2} - G\sin\omega\right)\frac{\partial G}{\partial I_1}\frac{\partial\omega}{\partial I_1} +$$

$$\left. + G^2\left(\sin\omega\frac{\partial G}{\partial\varphi} + 2I_2\cos\omega\frac{\partial G}{\partial I_2} + G\cos\omega\right)\left(\frac{\partial\omega}{\partial I_1}\right)^2\right]$$

Функция Ψ_4 обращается в нуль либо на девиаторной оси $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3$, когда $I_2 = 0$, либо при $\partial G / \partial I_1 = \partial\omega / \partial I_1 = 0$. Можно показать, что других случаев обращения в нуль не может быть.

Выражение в скобках для Ψ_4 есть квадратичная форма по величинам $\partial G / \partial I_1$ и $\partial\omega / \partial I_1$. Обозначим коэффициенты при $(\partial G / \partial I_1)^2$, $(\partial G / \partial I_1)(\partial\omega / \partial I_1)$ и $(\partial\omega / \partial I_1)^2$ через L, $2M$ и N соответственно. Обращение функции Ψ_4 в нуль возможно при $M^2 - LN \geqslant 0$. Нетрудно показать, что $M^2 - LN = -{}^3/_4\Psi_2$. Если дискриминант равен нулю, то $\Psi_2 = 0$, и нарушается последнее неравенство (1.8). Равенство здесь может иметь место только для несжимаемого материала. Если $M^2 - LN > 0$, то $\Psi_2 < 0$; при этом для выполнения последнего неравенства (1.8) необходимо, чтобы $\partial^2\Phi / \partial I_1^2 < 0$, а для выполнения второго требуется, чтобы $\Psi_1 < 0$, и нарушается первое. Другие случаи равенства нулю Ψ_4 ($L = M = N = 0$; $L = M = 0$, $\partial G / \partial I_1 = 0$ и т. д.) сводятся к рассмотренным выше.

Поскольку Ψ_4 — знакоопределенная квадратичная форма, L и N должны быть одного знака и $LN - M^2 > 0$, то есть $\Psi_2 > 0$. Отсюда сразу следует и знакоопределенность Ψ_1. Например, если $\Psi_1 = 0$, то из первого и второго соотношений (1.13) получим

$$2I_2 G \frac{\partial\omega}{\partial I_2} = \frac{\partial G}{\partial\varphi}, \qquad 2I_2 \partial G / \partial I_2 + G = -G(\partial\omega / \partial\varphi + 1)$$

$$\Psi_2 = -\,{}^4/_3 G^2 [(\partial\omega / \partial\varphi + 1)^2 + 4I_2^2 (\partial\omega / \partial I_2)^2] < 0$$

В двух отмеченных выше случаях равенства нулю Ψ_4 (и соответственно Ψ_3) приходим к таким же выводам относительно Ψ_1 и Ψ_2. Например, из последнего неравенства (1.8) сразу следует, что $\partial^2\Phi / \partial I_1^2$ и Ψ_2 должны быть одного знака, точнее положительны, так как в противном случае нарушается либо второе неравенство (1.8), если $\Psi_1 > 0$, либо первое, если $\Psi_1 < 0$, либо оба неравенства, если $\Psi_1 = 0$. Остается определить знаки Ψ_1 и Ψ_4. Для этого нужно сначала выяснить ряд свойств функций ω и G. Из (1.11) получим

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{1}{2I_2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right) : \left(\frac{\partial\Phi}{\partial I_2}\right), \qquad G = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial I_2}\right)^2 + \frac{1}{4I_2^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\frac{1}{\cos^2\omega}\frac{\partial\omega}{\partial I_2} = \frac{1}{2I_2(\partial\Phi / \partial I_2)^2}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial I_2}\left(-\frac{1}{I_2}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial I_2\,\partial\varphi}\right) - \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_2^2}\right]$$

$$\frac{1}{\cos^2\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi} = \frac{1}{2I_2(\partial\Phi / \partial I_2)^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial I_2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} - \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_2\,\partial\varphi}\right)$$

$$\frac{\partial G}{\partial\varphi} = \frac{1}{4G}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial I_2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_2\,\partial\varphi} + \frac{1}{4I_2^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right) \tag{1.14}$$

Используя (1.7), найдем

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = 2\sqrt{3}\,I_2^{3/2}\cos 3\varphi\,\frac{\partial\Phi}{\partial I_3}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = -6\sqrt{3}\,I_2^{3/2}\sin 3\varphi\,\frac{\partial\Phi}{\partial I_3} + 12I_2^3\cos^2 3\varphi\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_3^2} \tag{1.15}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_2\,\partial\varphi} = 3\sqrt{3}\,I_2^{1/2}\cos 3\varphi\,\frac{\partial\Phi}{\partial I_3} + 2\sqrt{3}\,I_2^{3/2}\cos 3\varphi\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_2\,\partial I_3} + \sqrt{3}\,I_2^{1/2}\sin 3\varphi\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_3^2}\right)$$

Эти соотношения в комбинации с (1.14) позволяют сделать следующие выводы относительно ω:

1) величина $\omega = 0$ при $I_2 = 0$, так как $\partial\Phi / \partial I_2 \neq 0$ вследствие непрерывности ω; одновременное равенство нулю ${}^1/_2\, I_2^{-1}\, \partial\Phi / \partial\varphi$ и $\partial\Phi / \partial I_2$ исключается ввиду $G > 0$;

2) знак ω определяется знаком $\partial\Phi / \partial\varphi$. Это следует из (1.11) и $G > 0$;

3) величина ω есть однозначная и ограниченная функция инвариантов, что видно из (1.10) и первого соотношения (1.14).

Рассматривая совместно (1.14) и (1.15), найдем, что при $I_2 = 0$

$$\partial\omega / \partial\varphi = \partial G / \partial\varphi = I_2 \partial\omega / \partial I_2 = 0$$

Отсюда и из (1.13) в силу $\Psi_2 > 0$ вытекает положительность $2I_2 \partial G / \partial I_2 + G$ и соответственно положительность Ψ_1 и коэффициента N при $I_2 = 0$. Величины Ψ_1 и Ψ_4 в силу знакопостоянства должны оставаться положительными во всей области устойчивости, а из последнего соотношения (1.8) такой же вывод следует в отношении $\partial^2\Phi / \partial I_1^2$. Итак, соотношения (1.8) эквивалентны следующим

$$\partial^2\Phi / \partial I_1^2 > 0, \quad \Psi_1 > 0, \quad \Psi_2 > 0, \quad \Psi_4 > 0$$
$$\Psi_1 \partial^2\Phi / \partial I_1^2 + \Psi_2 > \Psi_3, \qquad \Psi_2 \partial^2\Phi / \partial I_1^2 > \Psi_4 \tag{1.16}$$

Последние два неравенства из (1.16) говорят о том, что зависимости функций G и ω по переменной I_1 определяются тем, как эти же функции зависят от I_2 и φ и не могут быть произвольными.

Существенную роль для дальнейшего анализа ограничений (1.16) играет знак $(\partial G / \partial\varphi)(\partial\omega / \partial I_2)$ в выражении для Ψ_2 в (1.13). Если эта величина неотрицательна, то из второго и третьего соотношений (1.16) и из первых двух (1.13) сразу следует

$$2I_2 \partial G / \partial I_2 + G > 0, \qquad \partial\omega / \partial\varphi + 1 > 0$$
$$(2I_2 \partial G / \partial I_2 + G)(\partial\omega / \partial\varphi + 1) > 2I_2 (\partial G / \partial\varphi)(\partial\omega / \partial I_2) \geqslant 0 \tag{1.17}$$

Присоединив к последним первое неравенство (1.16) и использовав (1.10), получим

$$\frac{\partial\sigma}{\partial I_1} > 0, \quad \frac{\partial J_2^{1/2}}{\partial I_2^{1/2}} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} > 2I_2^{1/2} \frac{\partial J_2^{1/2}}{\partial\varphi} \frac{\partial\psi}{\partial I_2} \geqslant 0, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial J_2^{1/2}}{\partial I_2^{1/2}} > 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} > 0 \tag{1.18}$$

Из второго неравенства (1.18) видно, что зависимости $J_2^{1/2}$ от φ и ψ от I_2 должны носить вполне определенный характер, что связано с тем, как J_2 зависит от I_2 и ψ от φ. Остальные неравенства (1.18) требуют, чтобы σ, $J_2^{1/2}$ и ψ были возрастающими по соответствующим переменным.

Выясним, при каких условиях величина $(\partial G / \partial\varphi)(\partial\omega / \partial I_2)$ неотрицательна. Предварительно заметим, что при совпадении знаков у ω и $\partial\omega / \partial I_2$ выполнение условия $\Psi_1 > 0$ возможно только тогда, когда совпадают знаки у $\partial G / \partial\varphi$ и $\partial\omega / \partial I_2$.

Для ω как однозначной, непрерывной и ограниченной функций переменных I_2 и φ будут участки возрастания и убывания по переменной I_2. Пусть $\omega > 0$ (для случая $\omega < 0$ аналогичные рассуждения приводят к такому же результату). На участке возрастания знаки ω и $\partial\omega / \partial I_2$ совпадают, а тогда такой же знак будет и у $\partial G / \partial\varphi$. В точках экстремума $\partial\omega / \partial I_2 = 0$. На участке убывания ω и $\partial\omega / \partial I_2$ имеют разные знаки, и знак $\partial G / \partial\varphi$ может не совпадать со знаком $\partial\omega / \partial I_2$. Это означает, что $\partial\psi / \partial\varphi$ или $\partial J_2^{1/2} / \partial I_2^{1/2}$ могут изменить знак на обратный.

В силу того что $\psi = \operatorname{arctg} {}^1/_3\sqrt{3}\mu$ и $\nu = \sqrt{3}\operatorname{tg}\varphi$, знак $\partial\psi / \partial\varphi$ определяется знаком $\partial\mu / \partial\nu$. Если предположить, что $\mu = \mu(I_2, \nu)$ образует семейство плавных кривых на плоскости $\mu\nu$, пересекающихся только в точках $\nu = 0, \pm 1$ (как это имеет место в экспериментах), то наибольшие по абсолютной величине отклонения $\partial\mu / \partial\nu$ от единицы будут в этих точках. Перемена знака у $\partial\mu/\partial\nu$ на противоположный в этих точках возможна только при увеличении отклонения кривой от прямой $\mu = \nu$, то есть при возрастании $|\omega|$, тогда как на участке убывания происходит обратное. Следовательно, для таких кривых перемена знака у $\partial\psi / \partial\varphi$ невозможна. Что касается касательного модуля $\partial J_2^{1/2} / \partial I_2^{1/2}$, то по экспериментальным данным известно, что он всегда положителен. Итак, неравенства (1.18) будут точными следствиями первых трех неравенств (1.16) либо при совпадении знаков у ω и $\partial\omega / \partial I_2$, либо для таких плавных кривых $\mu = \mu(I_2, \nu)$, которые на плоскости $\mu\nu$ пересекаются только в точках $\nu = 0, \pm 1$.

Для несжимаемого материала $\partial^2\Phi / \partial I_1^2 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0$ остаются только второе и третье условия (1.16), и все наши рассуждения сохраняют силу.

Рассмотрим ограничения, связанные со второй квадратичной формой. Найдя при помощи (1.1), (1.2) коэффициенты A_{44}, A_{55} и A_{66}, запишем условия (1.5) в виде

$$\frac{\partial\Phi}{\partial I_2} + 3\left(\eta_3 - \frac{1}{3}I_1\right)\frac{\partial\Phi}{\partial I_3} > 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial I_2} + 3\,(\eta_2 - {}^1/_3 I_1)\,\frac{\partial\Phi}{\partial I_3} > 0$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial I_2} + 3(\eta_1 - {}^1/_3 I_1)\,\frac{\partial\Phi}{\partial I_3} > 0 \qquad (1.19)$$

Если учесть (1.7) и вычислить $\partial\Phi / \partial I_2$ и $\partial\Phi / \partial I_3$, помня при этом, что производные $\partial\Phi / \partial I_2$ в (1.11) и (1.19) имеют разный смысл, то из (1.19) получим

$$\cos\omega - \sin\omega\,\frac{\sin 3\varphi - 2\sin(\varphi + {}^4/_3\pi)}{\cos 3\varphi} > 0$$

$$\cos\omega - \sin\omega\,\frac{\sin 3\varphi - 2\sin\varphi}{\cos 3\varphi} > 0$$

$$\cos\omega - \sin\omega\,\frac{\sin 3\varphi - 2\sin(\varphi + {}^2/_3\pi)}{\cos 3\varphi} > 0 \qquad (1.20)$$

По этим неравенствам, придавая φ разные значения, легко найти область изменений ω. Она определяется двумя прямыми на плоскости $\omega\varphi$

$$-{}^1/_6\pi - \varphi < \omega < {}^1/_6\pi - \varphi \qquad (1.21)$$

Соотношения (1.16) и (1.19) образуют полную систему ограничений, налагаемых условием устойчивости на упругий потенциал и его производные.

В заключение этого пункта рассмотрим применение условий устойчивости на двух простых примерах. Потенциал для тела Гука имеет вид

$$\Phi = {}^1/_2 K^\circ I_1^2 + 2G^\circ I_2, \qquad K^\circ = E / 3(1 - 2\nu), \qquad G = E / 2\,(1 + \nu)$$

(ν — коэффициент Пуассона).

Из условий устойчивости следует $K^\circ > 0$, $G^\circ > 0$, что равносильно ограничению

$$-1 < \nu < {}^1/_2 \qquad (1.22)$$

Потенциал для тела Мурнагана [6] в наших инвариантах имеет вид

$$\Phi = \mathrm{const} - p_0 I_1 + {}^1/_6\,(3\lambda + 2\mu) I_1^2 + 2\mu I_2 + {}^1/_{27}(9l + n) I_1^3 +$$
$$+ {}^1/_3\,(6m - n)\,I_1 I_2 - {}^1/_3 n I_3 \qquad (1.23)$$

где p_0 — гидростатическое давление, λ, μ — коэффициенты Лямэ, l, m, n — упругие константы.

Для большей наглядности в (1.23) можно положить $6m = n$. Подчинив такой потенциал условиям (1.16) и (1.19), получим

$$3(\lambda + 2\mu) + 2I_1(9l + n) > 0, \quad \mu > 0, \quad 3\mu^2 - n^2 I_2 > 0 \tag{1.24}$$
$$2\mu - (\eta_1 - {}^1/_3 I_1)n > 0, \quad 2\mu - (\eta_2 - {}^1/_3 I_1)n > 0, \quad 2\mu - (\eta_3 - {}^1/_3 I_1)n > 0$$

Предельное значение I_1 определится из первого неравенства, а I_2 — из последних четырех. Можно считать I_1 и I_2 заданными и искать ограничения на l, m, n. Например, комбинируя первое и второе неравенства при малых I_1, получим для ν ограничения, совпадающие с (1.22). Если учесть (1.7) в (1.24), то видно, что выполнение третьего из них обеспечивает выполнение последних трех неравенств в (1.24). Отсюда получим

$$-\frac{\mu\sqrt{3}}{I_2^{1/2}} < n < \frac{\mu\sqrt{3}}{I_2^{1/2}} \tag{1.25}$$

Зная пределы изменения n, μ, λ, нетрудно из первого соотношения (1.24) найти пределы изменения последней константы l.

2. О роли тензорно-нелинейных членов в соотношении (0.1). Как известно, удельный вес тензорно-нелинейных членов в соотношениях напряжение-деформация определяется величиной ω. Интервал изменения ω будем искать из последнего условия устойчивости в (1.18). Согласно [5], справедливо следующее соотношение между параметрами Лоде μ и ν

$$\mu = \nu\frac{6(3+\nu^2)^2 - \theta(9-\nu^2)(3-\nu^2)}{6(3+\nu^2)^2 - 2\theta\nu^2(9-\nu)} \tag{2.1}$$

Здесь θ — некоторая функция I_2 и ν, характеризующая отклонение кривой $\mu = \mu(I_2, \nu)$ от прямой $\mu = \nu$. Из (2.1) видно, что на плоскости $\mu\nu$ кривые $\mu = \mu(\theta, \nu)$ обязательно проходят через начало координат и точки (1.1) и (—1, —1), что соответствует началу координат и точкам $({}^1/_6\pi, {}^1/_6\pi)$ и $(-{}^1/_6\pi, -{}^1/_6\pi)$ на плоскости $\psi\varphi$. Отсюда и из последнего неравенства (1.18) сразу следует, что кривые $\psi = \psi(I_2, \varphi)$ должны находиться в первой и третьей четвертях и $|\omega| < {}^1/_6\pi$.

В работе [5] интервал изменения θ равен $(-3, {}^{16}/_3)$. Заметим, что при некоторых значениях θ из этого интервала μ и ν (соответственно ψ и φ) будут иметь разные знаки, что невозможно для устойчивого материала.

Например, если $\nu = 0.1$, то достаточно взять $\theta > 2.05$, и μ будет отрицательной величиной.

Четвертое условие в (1.18) равносильно положительности производной $\partial\mu / \partial\nu$. Определение интервала изменений θ из (2.1) при помощи последнего условия оказывается возможным только в предположении о независимости θ от ν. При этом (2.1) образует однопараметрическое семейство плавных кривых на плоскости $\mu\nu$, пересекающихся только в начале координат и в точках (1.1), (—1, —1). Теперь становится понятным и смысл допущения, рассмотренного ранее при анализе условий устойчивости. Найдем $\partial\mu / \partial\nu$ из (2.1). Числитель полученного выражения приравняем нулю

$$2\nu^2(-\nu^6 + 15\nu^4 - 27\nu^2 - 243)\theta^2 + 6(\nu^2 + 3)(\nu^6 - 99\nu^4 + 243\nu^2 - 81)\theta + 36(\nu^2 + 3)^4 = 0 \tag{2.2}$$

Задаваясь рядом значений ν, найдем корни θ_1 и θ_2 в виде двух кривых; область между ними будет областью устойчивости для разных ν.

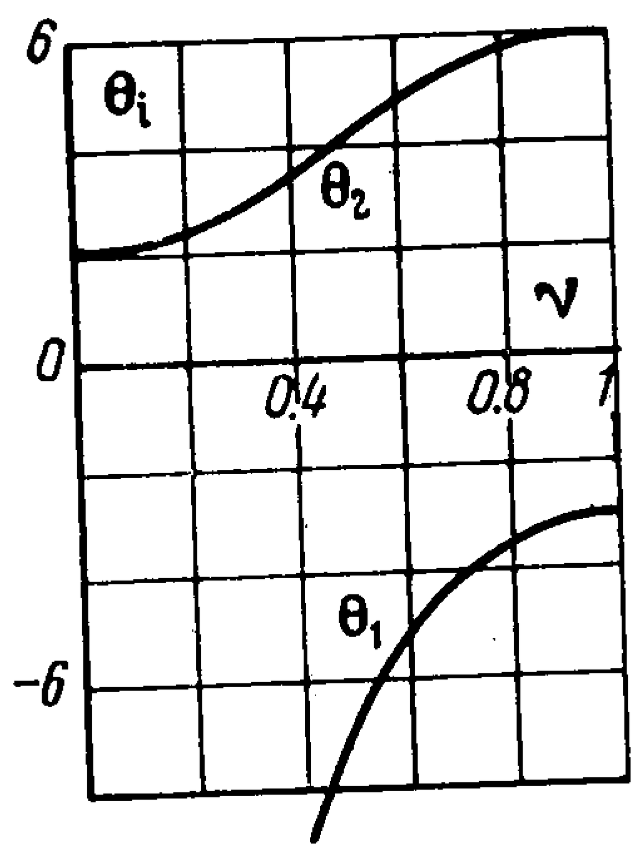
Приведем несколько таких точек

$$\begin{array}{lllll} \nu \to 0, & \nu = \pm 0.32, & \nu = \pm 0.63, & \nu = \pm 0.89, & \nu = \pm 1.00 \\ \theta_1 \to -\infty, & \theta_1 = -24.50, & \theta_1 = -4.94, & \theta_1 = -3.01, & \theta_1 = -3.00 \\ \theta_2 \to 2, & \theta_2 = 2.70, & \theta_2 = 4.94, & \theta_2 = 5.99, & \theta_2 = 6.00 \end{array}$$

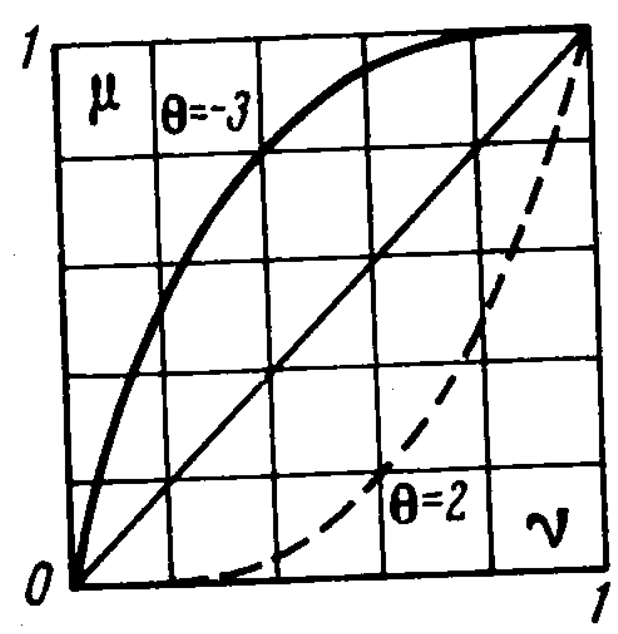
По этим данным требуемый интервал определится в виде

$$-3 < \theta < 2 \tag{2.3}$$

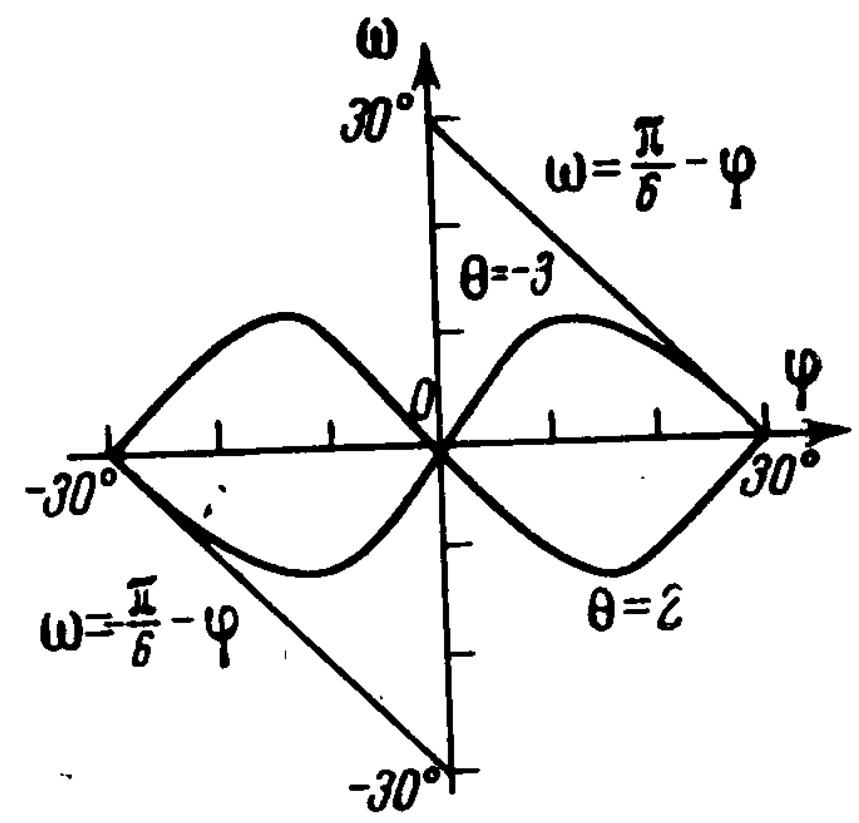
На фиг. 1 нанесены кривые θ_1 и θ_2, а на фиг. 2 — кривые $\mu = \mu(\nu)$ для $\theta = 2$, $\theta = -3$. Видно, что предельное состояние для первой кривой



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

наступает при $\nu = +0$, а для второй — при $\nu = 1 - 0$. Интервалу (2.3) соответствует следующий интервал по ω

$$|\omega| < 13^\circ \tag{2.4}$$

Кривые $\mu = \mu(\nu)$ для $\theta = 2$ и $\theta = -3$ перестроим в кривые $\omega = \omega(\varphi)$ на плоскости $\omega\varphi$. Наложим на полученные кривые прямые $\omega = {}^1/_6\pi - \varphi$ и $\omega = -{}^1/_6\pi - \varphi$ (фиг. 3). Видно, что прямые лежат над и под кривыми, поэтому область изменений ω целиком определяется двумя этими кривыми. Это означает, что при одновременном изменении инвариантов и повороте главных осей тензора ε_{ij} выполнение (1.16) влечет за собой выполнение (1.19), тогда как обратное неверно. Поэтому, чтобы материал был устойчивым, необходимо и достаточно соблюдения (1.16).

Автор благодарит А. А. Вакуленко за критические замечания, высказанные при обсуждении работы.

Поступила 28 VIII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Drucker D. C. Some implications of work hardening and ideal plasticity. Quarterly of applied Mathematics, 1950, 7, No. 4, pp. 411—418.
2. Друккер Д. С. О постулате устойчивости материала в механике сплошной среды. Механика. Период. сб. переводов иностр. статей, 1964, № 3.
3. Трелоар Л. Физика упругости каучука. М., Изд-во иностр. лит., 1953.
4. Новожилов В. В. Теория упругости. Л., Судпромгиз, 1958.
5. Вакуленко А. А. О связях между напряжениями и деформациями в изотропных и первоначально изотропных неупругих средах. В сб.: Исследования по упругости и пластичности, сб. № 2, Л., Изд. Ленингр. ун-та, 1963, 3—47.
6. Murnaghan F. D. Finite deformation of an elastic solid. N. Y., Wiley, London, Chapman, 1951.