Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

О СВЯЗИ МЕЖДУ МАТЕМАТИЧЕСКИМИ ОЖИДАНИЯМИ ТЕНЗОРОВ НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ В СТАТИСТИЧЕСКИ ИЗОТРОПНЫХ ОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ ТЕЛАХ

В. В. Новожилов

(Ленинград)

Предметом рассмотрения будут упругие твердые тела, следующие закону Гука

$$\sigma_{ij} = c_{ijmn}\varepsilon_{mn} \tag{0.1}$$

причем тензор модулей упругости c_{ijmn} считается стационарной случайной функцией координат x_k с изотропным математическим ожиданием

$$\langle c_{ijmn}\rangle = \lambda^\circ\delta_{ij}\delta_{mn} + \mu^\circ(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{jm}\delta_{in}) \tag{0.2}$$

где λ°, μ° — инвариантные физические константы, δ_{ij} — тензор Кронекера.

К числу таких тел относятся, например (в области малых деформаций), поликристаллы, не имеющие преобладающих направлений анизотропии, или квазиизотропные композитные тела.

В настоящее время подробно исследован случай макроскопически однородного деформирования статистически изотропных однородных тел [1-4] и др. При этом связь между математическими ожиданиями тензоров напряжения и деформации может быть записана в виде

$$\langle\sigma_{ij}\rangle = 2\mu\langle\varepsilon_{ij}\rangle + \lambda\langle\varepsilon_{kk}\rangle\delta_{ij} \tag{0.3}$$

где μ и λ — «эффективные» константы Ляме, не совпадающие с μ° и λ°. Указанные константы могут быть вычислены по заданным статистическим характеристикам стационарного случайного тензора c_{ijmn} путем решения трехмерной нелинейной стохастической задачи. В первом приближении соответствующее решение было получено в [1]. Наиболее общие и достоверные результаты в данном направлении можно найти в [4]. Более трудным является общий случай, когда поля тензоров σ_{ij}, ε_{ij} нестационарны. Он рассматривался в [5], где, однако, использовалось произвольное допущение, что центрированную часть случайного вектора перемещений точек тела можно представить в виде

$$u_i^* = u_i - \langle u_i\rangle = a_{ik}\langle u_k\rangle \tag{0.4}$$

где a_{ik} — случайный тензор, значение которого заимствовано из решения стационарной задачи для тела с идентичными статистическими свойствами.

Ниже нестационарная задача рассматривается без каких-либо гипотез. Решение строится в форме ряда, удовлетворяющего уравнениям равновесия объемного элемента тела и уравнениям сплошности деформации. Коэффициенты этого ряда суть стационарные тензоры, не зависящие ни от формы тела, ни от внешних сил, на него действующих. Они являются характеристиками упругих свойств тела, определяющимися по заданному стационарному случайному тензору c_{ijmn}.

Из построенного решения вытекают соотношения между математическими ожиданиями тензоров напряжения и деформации, имеющие вид, аналогичный соотношениям между напряжениями и деформациями в мультимоментной теории упругости ([6,7] и др.), и дифференциальные уравнения для математического ожидания тензора деформации. Тем самым в предлагаемой работе дается статистическая интерпретация моментной и мультимоментной теории упругости применительно к квазиизотропным упругим телам и намечается алгоритм вычисления входящих в эту теорию физических констант по заданному случайному полю тензора модулей упругости. Основная идея работы была высказана уже в [8], где рассматривались приводимые в дальнейшем ряд (2.1) и реккурентные системы (4.6), (4.7), (4.8). Однако при написании цитированной статьи [8] автор еще не располагал результатами конкретных вычислений и вынужден был прибегать к соображениям интуитивного характера, что привело к ошибке, суть которой состоит в неудачном выборе детерминированного тензора $\varepsilon_{ij}{}^{\vee}$, по которому велось разложение решения. Дальнейшее исследование показало, что непротиворечивость предлагаемого метода обеспечивается лишь при условии, что в качестве $\varepsilon_{ij}{}^{\vee}$ берется математическое ожидание тензора деформации, т. е., надо полагать, $\varepsilon_{ij}{}^{\vee} = \langle\varepsilon_{ij}\rangle$. Приводимые ниже результаты корректируют работу [8] в указанном направлении.

1. Рассматриваемая проблема сводится к решению уравнений линейной теории упругости

$$\begin{gathered}\partial_j\sigma_{ij} + F_i = \partial_j c_{ijmn}\varepsilon_{mn} + F_i = 0\\ \epsilon^{imk}\epsilon^{jnl}\frac{\partial^2\varepsilon_{mn}}{\partial x_k\partial x_l} = 0\\ \sigma_{ij}N_j = c_{ijmn}\varepsilon_{mn}N_j = f_i \text{ (на } \Omega)\end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь x_s — ортогональные декартовы координаты, ε_{ij} — компоненты тензора деформации, σ_{ij} — компоненты тензора напряжения, c_{ijmn} — тензор модулей упругости, Ω — поверхность, ограничивающая тело, N_j — единичный вектор внешней нормали к этой поверхности, F_i, f_i — внешние объемные и поверхностные силы, ϵ^{imk} — единичный антисимметричный псевдотензор Леви-Чивита

$$\epsilon^{imk} = \begin{cases}\pm 1\\ 0\end{cases} \tag{1.2}$$

принимающий верхнее значение, если все его индексы различны, и нижнее, если хотя бы одна пара его индексов одинакова. Знак плюс в (1.2) должен быть взят при

$$i,\ m,\ k = 1, 2, 3, \sim 3, 1, 2 \sim 2, 3, 1$$

знак минус — при всех других чередованиях индексов.

Входящее в (1.1) произведение таких тензоров может быть выражено через единичные тензоры Кронекера, а именно

$$\begin{gathered}\epsilon^{imk}\epsilon^{jnl} = \delta_{ij}\delta_{mn}\delta_{kl} - \delta_{mj}\delta_{in}\delta_{kl} + \delta_{jm}\delta_{kn}\delta_{il} -\\ - \delta_{jk}\delta_{mn}\delta_{il} + \delta_{jk}\delta_{in}\delta_{ml} - \delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{lm}\end{gathered} \tag{1.3}$$

В предыдущих, а также во всех последующих формулах используется соглашение о суммировании по дважды встречающимся («немым») индексам.

Тензор модулей упругости считается известной стационарной случайной функцией координат.

Подразумевается, что задано его математическое ожидание $\langle c_{ijmn}\rangle$ (0.1) и корреляционный тензор восьмого ранга

$$C_{ijmn}^{klpq}(M_1M_2) = \langle \overset{\bullet}{c}_{ijmn}(M_1)\,\overset{\bullet}{c}_{klpq}(M_2)\rangle \tag{1.4}$$

где M_1 и M_2 — две произвольные точки тела, а

$$\overset{\bullet}{c}_{ijmn}(M) = c_{ijmn}(M) - \langle c_{ijmn}(M)\rangle \tag{1.5}$$

Ввиду стационарности c_{ijmn} момент связи (1.4) будет функцией только

$$\xi_s = x_s^{(1)} - x_s^{(2)} \tag{1.6}$$

причем

$$C_{ijmn}^{klpq}(\xi_s) = C_{klpq}^{ijmn}(-\xi_s) \tag{1.7}$$

Наиболее общая форма корреляционного тензора $C_{ijmn}^{klpq}(\xi_s)$ приводится в [3].

Внешние силы, действующие на тело F_i, f_i, считаются в дальнейшем детерминированными величинами.

2. Следуя методу, предложенному в [8], будем искать случайный тензор деформации ε_{ij} в форме разложения

$$\varepsilon_{ij} = \check{\varepsilon}_{ij} + \alpha_{ijmn}\check{\varepsilon}_{mn} + \beta_{ijmnp}\frac{\partial\check{\varepsilon}_{mn}}{\partial x_p} + \gamma_{ijmnpq}\frac{\partial^2\check{\varepsilon}_{mn}}{\partial x_p\,\partial x_q} + \ldots \tag{2.1}$$

где $\check{\varepsilon}_{ij}(x_k)$ — детерминированный симметричный тензор второго ранга, а тензоры четвертого ранга α_{ijmn}, пятого ранга β_{ijmnp}, шестого ранга γ_{ijmnpq} и т. д. суть случайные функции координат x_k.

Идея метода состоит в выборе детерминированного тензора $\check{\varepsilon}_{ij}$ таким образом, чтобы коэффициенты ряда (2.1) были стационарными случайными функциями, полностью определяющимися по заданному случайному тензору c_{ijmn} и не зависящими ни от формы тела, ни от его размеров, ни от внешних сил, на него действующих.

Данная идея может быть осуществлена, если принять, что коэффициенты ряда (2.1) являются центрированными случайными функциями, т. е.

$$\langle\alpha_{ijmn}\rangle = \langle\beta_{ijmnp}\rangle = \langle\gamma_{ijmnpq}\rangle = \ldots = 0 \tag{2.2}$$

При этом детерминированный тензор $\check{\varepsilon}_{ij}$ оказывается отождествленным математическому ожиданию тензора деформации

$$\check{\varepsilon}_{ij} = \langle\varepsilon_{ij}\rangle \tag{2.3}$$

Здесь, ранее и в дальнейшем символ $\langle\ \rangle$ означает осреднение по множеству реализаций.

Воспользовавшись (0.1) и (2.1), имеем следующий ряд для тензора напряжений:

$$\sigma_{ij} = A_{ijmn}\check{\varepsilon}_{mn} + B_{ijmnp}\frac{\partial\check{\varepsilon}_{mn}}{\partial x_p} + C_{ijmnpq}\frac{\partial^2\check{\varepsilon}_{mn}}{\partial x_p\,\partial x_q} + \ldots \tag{2.4}$$

где

$$A_{ijmn} = c_{ijmn} + c_{ijrs}\alpha_{rsmn},\quad B_{ijmnp} = C_{ijrs}\beta_{rsmnp},\quad C_{ijmnpq} = C_{ijrs}\gamma_{rsmnpq} \tag{2.5}$$

Коэффициенты ряда (2.4) не являются центрированными величинами, в соответствии с чем

$$\langle\sigma_{ij}\rangle = \langle A_{ijmn}\rangle\check{\varepsilon}_{mn} + \langle B_{ijmnp}\rangle\frac{\partial\check{\varepsilon}_{mn}}{\partial x_p} + \langle C_{ijmnpq}\rangle\frac{\partial^2\check{\varepsilon}_{mn}}{\partial x_p\,\partial x_q} + \ldots \tag{2.6}$$

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij} - \langle\sigma_{ij}\rangle = \overset{*}{A}_{ijmn}\check{\varepsilon}_{mn} + \overset{*}{B}_{ijmnp}\frac{\partial\check{\varepsilon}_{mn}}{\partial x_p} + \overset{*}{C}_{ijmnpq}\frac{\partial^2\check{\varepsilon}_{mn}}{\partial x_p\,\partial x_q} + \ldots \tag{2.7}$$

где

$$\overset{*}{A}_{ijmn} = A_{ijmn} - \langle A_{ijmn}\rangle,\qquad \overset{*}{B}_{ijmnp} = B_{ijmnp} - \langle B_{ijmnp}\rangle \tag{2.8}$$

и т. д.

Подставив в систему уравнений (1.1)

$$\sigma_{ij} = \langle\sigma_{ij}\rangle + \sigma_{ij}^*, \quad \varepsilon_{ij} = \langle\varepsilon_{ij}\rangle + \varepsilon_{ij}^* \tag{2.9}$$

приходим к двум системам

$$\frac{\partial\langle\sigma_{ij}\rangle}{\partial x_j} + F_i = 0, \quad \epsilon^{imk}\epsilon^{jnl}\frac{\partial^2 \check{\varepsilon}_{mn}}{\partial x_k\,\partial x_l} = 0, \quad \langle\sigma_{ij}\rangle N_j = f_i \quad (\text{на } \Omega) \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial\sigma_{ij}^*}{\partial x_j} = 0, \quad \epsilon^{imk}\epsilon^{jnl}\frac{\partial^2 \varepsilon_{mn}^*}{\partial x_k\,\partial x_l} = 0, \quad \sigma_{ij}^* N_j = 0 \quad (\text{на } \Omega) \tag{2.11}$$

Рассмотрим их последовательно.

3. Как было оговорено выше, коэффициенты ряда (2.1) предполагаются стационарными случайными функциями координат. При этом стационарными случайными функциями будут и коэффициенты ряда (2.4), определяющиеся формулами (2.5) как произведения стационарных случайных функций.

Очевидно, что математические ожидания этих коэффициентов должны быть изотропными тензорами, поскольку иначе зависимость между математическими ожиданиями тензоров напряжения и деформации носила бы анизотропный характер, что противоречило бы предположению о статистической изотропии рассматриваемого тела.

Наиболее общей формой изотропного постоянного тензора четвертого ранга является выражение

$$\langle A_{ijmn}\rangle = a_1\delta_{ij}\delta_{mn} + a_2(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{jm}\delta_{in}) \tag{3.1}$$

где a_1 и a_2 — скалярные константы. Тензоры пятого (и вообще нечетных рангов) изотропными быть не могут, в соответствии с чем

$$\langle B_{ijmnp}\rangle = 0 \tag{3.2}$$

Наиболее общей формой изотропного постоянного тензора шестого ранга является выражение

$$\begin{aligned}\langle C_{ijmnpq}\rangle = {} & g_1\delta_{ij}\delta_{mn}\delta_{pq} + {}^1/_2\, g_2(\delta_{mp}\delta_{nq} + \delta_{np}\delta_{mq})\delta_{ij} + \\ & + {}^1/_2\, g_3(\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{jp}\delta_{iq})\delta_{mn} + {}^1/_2\, g_4(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{jm}\delta_{in})\delta_{pq} + \\ & + {}^1/_4\, g_5[(\delta_{jp}\delta_{nq} + \delta_{np}\delta_{jq})\delta_{im} + (\delta_{ip}\delta_{nq} + \delta_{in}\delta_{pq})\delta_{jm} + \\ & + (\delta_{jp}\delta_{mq} + \delta_{mp}\delta_{jq})\delta_{in} + (\delta_{ip}\delta_{mq} + \delta_{mi}\delta_{pq})\delta_{jn}]\end{aligned} \tag{3.3}$$

где g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 — скалярные константы. В (3.1), (3.3) учтено, что рассматриваемые тензоры должны, как это ясно из (2.6), допускать перестановку пар индексов (i, j), (m, n), (p, q).

Подставив (3.1), (3.2), (3.3) в (2.6), получаем

$$\begin{aligned}\langle\sigma_{ij}\rangle = {} & 2a_2\check{\varepsilon}_{ij} + a_1\check{\varepsilon}_{kk}\delta_{ij} + g_1\Delta\check{\varepsilon}_{kk}\delta_{ij} + g_2\frac{\partial^2\check{\varepsilon}_{kl}}{\partial x_k\,\partial x_l}\delta_{ij} + g_3\frac{\partial^2\check{\varepsilon}_{kk}}{\partial x_i\,\partial x_j} + \\ & + g_4\Delta\check{\varepsilon}_{ij} + g_5\left(\frac{\partial^2\check{\varepsilon}_{ik}}{\partial x_j\,\partial x_k} + \frac{\partial^2\check{\varepsilon}_{jk}}{\partial x_i\,\partial x_k}\right) + \ldots\end{aligned} \tag{3.4}$$

Это выражение может быть несколько преобразовано, если учесть, что тензор $\check{\varepsilon}_{ij}$ подчиняется соотношениям Сен-Венана $(2.10)_2$, которые при использовании (1.3) приводятся к виду

$$\Delta \check{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial^2 \check{\varepsilon}_{kk}}{\partial x_i\, \partial x_j} - \frac{\partial^2 \check{\varepsilon}_{ik}}{\partial x_j\, \partial x_k} - \frac{\partial^2 \check{\varepsilon}_{jk}}{\partial x_i\, \partial x_k} = 0 \tag{3.5}$$

В (3.4) и (3.5) введено обычное обозначение

$$\Delta(\ ) = \frac{\partial^2(\ )}{\partial x_k\, \partial x_k} \tag{3.6}$$

Из (3.5) вытекает, что

$$\Delta \check{\varepsilon}_{kk} = \frac{\partial^2 \check{\varepsilon}_{kl}}{\partial x_k\, \partial x_l}, \qquad \frac{\partial^2 \check{\varepsilon}_{ik}}{\partial x_j\, \partial x_k} + \frac{\partial^2 \check{\varepsilon}_{kj}}{\partial x_i\, \partial x_k} = \Delta \check{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial^2 \check{\varepsilon}_{kk}}{\partial x_i\, \partial x_j} \tag{3.7}$$

Формулы (3.7) позволяют привести (3.4) к более простому виду

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = 2a_2 \check{\varepsilon}_{ij} + a_1 \check{\varepsilon}_{kk} \delta_{ij} + b_1 \frac{\partial^2 \check{\varepsilon}_{kk}}{\partial x_i\, \partial x_j} + b_2 \Delta \check{\varepsilon}_{ij} + b_3 \Delta \check{\varepsilon}_{kk} \delta_{ij} + \ldots \tag{3.8}$$

где

$$b_1 = g_3 + g_5$$
$$b_2 = g_4 + g_5 \tag{3.9}$$
$$b_3 = g_1 + g_2$$

Из того факта, что математическое ожидание тензора деформации $\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \check{\varepsilon}_{ij}$ подчиняется соотношениям Сен-Венана, следует, что

$$\check{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \check{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \check{u}_j}{\partial x_i}\right) \tag{3.10}$$

где вектор $\check{u}_s$ — математическое ожидание вектора перемещения.

Подставив (3.10) в (3.8), а (3.8) затем введя в (2.10), придем к системе из трех уравнений в частных производных с тремя неизвестными $\check{u}_s$.

Эта система (при учете в ряду (3.8) всех его членов) будет иметь бесконечно высокий порядок. Если же в ряду (3.8) сохранить только те члены, какие были выписаны выше, то получится система вдвое более высокого порядка, чем система уравнений классической теории упругости. Эта последняя система будет идентична по виду системе уравнений моментной теории упругости [1, 7] и др.

При этом пока что остается неизвестным 1) как определить скалярные константы a_1, a_2, g_1, ..., g_5, входящие в ряд (3.4) по заданным статистическим характеристикам случайного поля тензора модулей упругости c_{ijmn}; 2) какие граничные условия должны быть поставлены на поверхности, ограничивающей тело, чтобы задача стала вполне определенной? Подстановка ряда (3.4) в $(2.10)_3$ дает всего три краевых условия, что, очевидно, недостаточно.

Для ответа на эти два вопроса надо обратиться к рассмотрению системы (2.11).

4. Подставим ряд (2.7) в уравнение $(2.11)_1$ и потребуем, чтобы это уравнение выполнялось за счет равенства нулю коэффициентов при тензоре $\check{\varepsilon}_{ij}$ и всех его частных производных. Аналогично поступим и с уравнением неразрывности $(2.11)_2$, подставив в него ряд (2.1). В результате получится

последовательность уравнений

$$\frac{\partial A^{*}_{ijmn}}{\partial x_j} = 0, \qquad \epsilon^{irk}\epsilon^{jsl}\frac{\partial^2 \alpha_{rsmn}}{\partial x_k \partial x_l} = 0 \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial B^{*}_{ijmnp}}{\partial x_j} = -A^{*}_{ipmn}, \qquad \epsilon^{irk}\epsilon^{jsl}\frac{\partial^2 \beta_{rsmnp}}{\partial x_k \partial x_l} = \Phi_{ijmnp} \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial C^{*}_{ijmnpq}}{\partial x_j} = -B^{*}_{iqmnp} - B^{*}_{ipmnq}, \quad \epsilon^{irk}\epsilon^{jsl}\frac{\partial^2 \gamma_{ijmnpq}}{\partial x_k \partial x_l} = \Psi_{ijmnpq} \tag{4.3}$$

в которых

$$\Phi_{ijmnp} = -[\epsilon^{irk}\epsilon^{jsp} + \epsilon^{irp}\epsilon^{jsk}]\frac{\partial \alpha_{rsmn}}{\partial x_k} \tag{4.4}$$

$$\Psi_{ijmnpq} = -\frac{1}{2}[\epsilon^{irq}\epsilon^{jsk} + \epsilon^{irk}\epsilon^{isq}]\frac{\partial \beta_{rsmnp}}{\partial x_k} -$$
$$-\frac{1}{2}[\epsilon^{irp}\epsilon^{jsk} + \epsilon^{irk}\epsilon^{jsp}]\frac{\partial \beta_{rsmnq}}{\partial x_k} - \tag{4.5}$$
$$-\frac{1}{2}[\epsilon^{irp}\epsilon^{jsq} + \epsilon^{irq}\epsilon^{jsp}]\,\alpha_{rsmn}$$

При написании (4.4) и (4.5) в развернутом виде следует учесть (1.3).

Выше было оговорено, что коэффициенты ряда (2.1) считаются центрированными стационарными функциями координат, и было указано, что при этом стационарными случайными функциями являются и коэффициенты ряда для тензора напряжений (2.4).

Воспользовавшись (2.5) и учитывая сделанное выше замечание, можно привести системы уравнений (4.1), (4.2), (4.3) к виду

$$\frac{\partial c_{ijrs}\alpha_{rsmn}}{\partial x_j} = -\frac{\partial c_{ijmn}}{\partial x_j}, \qquad \epsilon^{irk}\epsilon^{jsl}\frac{\partial^2 \alpha_{rsmn}}{\partial x_k \partial x_l} = 0 \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial c_{ijrs}\beta_{rsmnp}}{\partial x_j} = -c^{*}_{ipmn} - c_{iprs}\alpha_{rsmn} + \langle c_{iprs}\alpha_{rsmn}\rangle \tag{4.7}$$

$$\epsilon^{irk}\epsilon^{jsl}\frac{\partial^2 \beta_{rsmnp}}{\partial x_k \partial x_f} = \Phi_{ijmnp}$$

$$\frac{\partial c_{ijrs}\gamma_{rsmnpq}}{\partial x_j} = -\frac{1}{2}c_{iqrs}\beta_{rsmnp} - \frac{1}{2}c_{iprs}\beta_{rsmnq} +$$
$$+\frac{1}{2}\langle c_{iqrs}\beta_{rsmnp}\rangle + \frac{1}{2}\langle c_{iprs}\beta_{rsmnq}\rangle$$

$$\epsilon^{irk}\epsilon^{jsl}\frac{\partial^2 \gamma_{rsmnpq}}{\partial x_k \partial x_l} = \Psi_{ijmnpq} \tag{4.8}$$

Система (4.6) распадается на шесть независимых систем уравнений (по числу различных комбинаций индексов m, n). Каждая из них идентична системе уравнений линейной теории упругости. Роль тензора деформации в этих системах играет тензор $\alpha_{ij(mn)}$. Тензором модулей упругости является c_{ijrs}, а объемные внешние силы задаются формулой

$$F_i = \frac{\partial c_{ij(mn)}}{\partial x_j} \tag{4.9}$$

Требование стационарности тензора α_{ijmn} (в некотором смысле аналогичное требованию периодичности решения) заменяет для указанных шести систем дифференциальных уравнений краевые условия.

С учетом этого замечания задача определения тензора α_{ijmn} полностью решается путем интегрирования шести систем (4.6).

По существу именно эта задача и рассматривалась в работах [1, 2, 4], посвященных исследованию связи между математическими ожиданиями тензоров ε_{ij} и σ_{ij} для поликристаллов, в частном случае когда

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \text{const}, \qquad \langle \sigma_{ij} \rangle = \text{const}$$

После определения α_{ijmn} становится возможным отыскание и следующего коэффициента ряда (2.1), т. е. β_{ijmnp}. Для этого надо воспользоваться системой (4.7), которая распадается на 18 независимых систем уравнений (по числу различных комбинаций индексов m, n, p). Каждая из указанных систем идентична уравнениям линейной теории упругости при наличии в теле внутренних напряжений. Роль тензора деформации в этих уравнениях играет тензор $\beta_{ij(mnp)}$, тензором модулей упругости является c_{ijmn}; внешние объемные силы определяются выражением

$$F_{i(mnp)} = -\overset{*}{c}_{i(pmn)} - c_{i(p)rs}\,\alpha_{rs(mn)} + \langle c_{i(p)rs}\alpha_{rs(mn)} \rangle \tag{4.10}$$

а тензор несовместимости — формулой (4.4).

Требование стационарности тензора β_{ijmnp} эквивалентно заданию краевых условий для указанных выше 18 систем дифференциальных уравнений.

Аналогично и система (4.8), а также все последующие за нею системы уравнений для коэффициентов ряда (2.1), распадается на независимые системы уравнений, каждая из которых идентична уравнениям линейной теории упругости для тела с внутренними напряжениями, причем роль граничных условий для всех этих систем уравнений играет требование стационарности их решений. Тем самым все коэффициенты ряда (2.1) могут быть последовательно определены путем решения описанных выше рекуррентных систем дифференциальных уравнений в частных производных.

5. В результате указанных выше операций построены два ряда — (2.1), (2.4). Первый из них выражает тензор деформации, в второй — тензор напряжений через математическое ожидание тензора деформации и его частные производные по координатам. Эти ряды обладают следующими свойствами:

— их коэффициенты являются стационарными случайными функциями координат, не зависящими ни от формы тела, ни от его размеров, ни от действующих на него внешних сил. Последние считаются при этом детерминированными векторами;

ряд (2.4) тождественно удовлетворяет системе уравнений (2.11.1);

ряд (2.1) тождественно удовлетворяет системе уравнений (2.11.2).

Поскольку известен ряд (2.4), постольку известен и ряд (3.8), выражающий математическое ожидание тензора напряжений через математическое ожидание тензора деформации.

Тем самым изложенное выше исчерпывает вопрос о связи между осредненными напряжениями и деформациями в статистически изотропных, однородных линейно упругих телах.

Однако еще не до конца объяснен путь вычисления математического ожидания тензора деформации $\langle\varepsilon_{ij}\rangle = \varepsilon_{ij}{}^{\vee}$ в каждом конкретном частном случае (т. е. в зависимости от размеров тела, его формы и действующих на него внешних сил).

Для этого тензора выше была получена система дифференциальных уравнений (2.10.1.2) бесконечно высокого порядка, для которой пока что имеются всего три граничных условия (2.10.3), недостаточные для однозначного определения $\varepsilon_{ij}{}^{\vee}$. Недостающие граничные условия могут быть сформулированы, если учесть, что до сих пор еще не использовано равенство (2.11.3), определяющее граничное значение центрированного случайного вектора $\sigma_{ij}{}^*N_j$.

Из последнего равенства можно получить бесконечное множество граничных условий для детерминированного тензора $\varepsilon_{ij}{}^{\vee}$ и его частных производных по координатам. Эти условия можно вывести, например, путем приравнивания нулю на поверхности, ограничивающей тело моментов компонент случайного вектора $\sigma_{ij}{}^*N_j$. Такой путь наиболее очевиден, однако он приводит к нелинейным краевым условиям.

Альтернативной возможностью является вывод граничных условий для тензора $\varepsilon_{ij}{}^*$ и его частных производных из вариационной задачи, сформулированной таким образом, чтобы ее Эйлеровы уравнения совпадали с системой $(2.10)_1$, записанной в перемещениях $u_s{}^{\vee}$. Данный способ приводит к линейным граничным условиям. Получающаяся при этом система уравнений для определения математического ожидания случайного вектора перемещения точек тела u_s совпадает с уравнениями мультимоментной теории упругости [6,7].

Поступила 12 IX 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Лившиц И. М., Розенцвейг Л. Н. К теории упругих свойств поликристаллов. Ж. эксперимент. и теор. физ., 1946, т. 16, № 11.
2. Даринский Б. М., Шермергор Т. Д. Упругие модули поликристаллов кубической структуры. ПМТФ, 1965, № 4.
3. Ломакин В. А. О деформации микронеоднородных тел. ПММ, 1965, т. 29, вып. 5.
4. Болотин В. В., Москаленко В. Н. Задача об определении упругих постоянных микронеоднородной среды. ПМТФ, 1968, № 1.
5. Ломакин В. А. О теории деформирования микронеоднородных тел и ее связи с моментной теорией упругости. ПММ, 1966, т. 30, вып. 5.
6. Green A. E., Rilvin R. S. Multipolar continuum mechanics. Arch. Rat. Mech. Anal., 1964, vol. 17, No. 2, pp. 113—147.
7. Mindlin R. D. Micro-structure in linear elasticity. Arch. Rat. Mech. Anal., 1964, vol. 16, No. 1.
8. Новожилов В. В. О связи между напряжениями и упругими деформациями в поликристаллах. В кн.: «Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды». М., «Наука», 1969.