

## О НЕКОТОРЫХ ОДНОМЕРНЫХ ДВИЖЕНИЯХ МЯГКОГО ГРУНТА

Э. Ф. Хайретдинов

(Москва)

Рассмотрен класс автомодельных решений уравнений одномерного (с плоскими волнами) движения мягкого грунта. Исследовано влияние сжимаемости грунта при разгрузке на характеристики движения.

1. Движения мягкого грунта описываются, в соответствии с [1], системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} &= 0, & \rho \left( \frac{dv_k}{dt} - f_k \right) + \frac{\partial p}{\partial x_k} &= \frac{\partial s_{k\alpha}}{\partial x_\alpha} \\ G(e_{ik} - 1/3 e_{\alpha\alpha} \delta_{ik}) &= \frac{Ds_{ik}}{Dt} + \omega s_{ik}, & e_{ik} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \\ \frac{Ds_{ik}}{Dt} &= \frac{ds_{ik}}{dt} - j(s_{i\alpha} \Omega_{k\alpha} + s_{k\alpha} \Omega_{i\alpha}), & \Omega_{ik} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \\ \omega &= \left( G \frac{W}{F} - \frac{d \ln \sqrt{F}}{dt} \right) e(I - F) e \left( G \frac{W}{F} - \frac{d \ln \sqrt{F}}{dt} \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$W = 1/2 e_{\alpha\beta} s_{\alpha\beta}, \quad I = 1/2 s_{\alpha\beta} s_{\alpha\beta}, \quad \rho = \rho(p, p_*), \quad F = F(p, p_*), \quad G = G(p, p_*)$$

$$\frac{dp_*}{dt} = \frac{dp}{dt} e(p - p_*) e\left(\frac{dp}{dt}\right), \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$$

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & (i = k), \\ 0 & (i \neq k), \end{cases} \quad e(\xi) = \begin{cases} 1 & (\xi \geq 0), \\ 0 & (\xi < 0), \end{cases} \quad j = \begin{cases} 1, \\ 0 \end{cases}$$

Здесь  $t$  — время;  $x_k$  — декартовы координаты;  $v_k$  — компоненты скорости;  $\rho$  — плотность;  $f_k$  — компоненты объемных внешних сил,  $p$  — гидродинамическое давление;  $s_{ik}$  — компоненты девиатора напряжений;  $j$  принимает значение 1, когда скорость изменения девиатора напряжений определяется] по Яуману [1], и нуль, если яумановские добавки игнорируются;  $F(p, p_*)$  и  $G(p, p_*)$  — функции, характеризующие механические свойства грунта.

В дальнейшем рассматриваются одномерные (с плоскими волнами) движения, происходящие в отсутствие силы тяжести и других объемных сил. Все параметры движения зависят лишь от одной координаты  $x = x_1$ , кроме того

$$v_2 = v_3 = 0, \quad s_{22} = s_{33} = -1/2 s_{11}, \quad s_{12} = s_{23} = s_{31} = 0$$

Система уравнений, описывающих движение, будет иметь вид

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \rho \frac{du}{dt} + \frac{\partial X}{\partial x} = 0, \quad \frac{d\Psi}{dt} + \omega\Psi = -\frac{4}{3} G \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$W = -\Psi \frac{\partial u}{\partial x}, \quad I = \frac{3}{4} \Psi^2, \quad u = v_1, \quad \Psi = -s_{11}, \quad X = p + \frac{1}{2} \Psi^2, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \quad (1.2)$$

Пусть к свободной поверхности грунта, занимавшего первоначально полупространство  $x > 0$ , в начальный момент  $t = \tau_0$  приложено давление  $P_0$ , которое затем изменяется во времени по закону

$$P = P_0 \varphi(t/\tau_0) \quad (1.3)$$

Функция  $\varphi(\xi)$  предполагается непрерывной и дифференцируемой при  $\xi \geq 1$ , кроме того,  $\varphi(1) = 1$ ,  $\varphi'(1) < 0$ ,  $\varphi(\xi) < 1$  при  $\xi > 1$  и  $\varphi(\xi) = 0$  при  $\xi < 1$ .

По грунту побежит ударная волна. Если скорость ее распространения будет сверхзвуковой (а это в дальнейшем всегда предполагается), решение уравнений (1.2) должно удовлетворять следующим граничным и начальным условиям:

$$\begin{aligned} u = h^*(t), \quad X = P_0 \varphi(t/\tau_0) & \quad \text{при } x = h(t) \\ u = (1 - \rho_1/\rho) s^*(t), \quad X = \rho_1 u s^* & \quad \text{при } x = s(t) \\ h(\tau_0) = s(\tau_0) = 0 & \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь уравнения  $x = h(t)$  и  $x = s(t)$  представляют соответственно законы движения поверхности грунта и ударной волны,  $\rho_1$  — плотность грунта перед ударной волной. Вид функций  $h(t)$  и  $s(t)$  заранее неизвестен и их определение — составная часть задачи.

В дальнейшем предполагается, что  $\rho_1 = \text{const}$  и вместо плотности  $\rho$  вводится удельная объемная деформация  $\varepsilon$  по формуле

$$\varepsilon = 1 - \rho_1/\rho$$

Кроме того, в дальнейшем рассматриваются только такие движения, для которых выполнены дополнительные условия

$$p < p_* \quad \text{при } x < s(t), \quad p = p_* \quad \text{при } x = s(t) \quad (1.5)$$

Достигается большая компактность в формулировке задачи, если записать ее в лагранжевых переменных, переход к которым совершается по формулам

$$t = \tau \quad dx = u d\tau + (1 - \varepsilon) dl \quad (1.6)$$

при этом удобно считать, что частицы, находящиеся на поверхности, имеют лагранжеву координату  $l = l_0 = \text{const}$ .

С учетом (1.5) и (1.6) уравнения (1.2) могут быть представлены в виде

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial l} = 0, \quad \rho_1 \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial X}{\partial l} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + \omega\Psi = -\frac{4}{3} G \frac{\partial u}{\partial l} (1 - \varepsilon)^{-1}, \quad p_* = p_*(l)$$

$$W = -\Psi \frac{\partial u}{\partial l} (1 - \varepsilon)^{-1}, \quad I = \frac{3}{4} \Psi^2, \quad \varepsilon = \varepsilon(p, p_*) = 1 - \frac{\rho_1}{\rho(p, p_*)} \quad (1.7)$$

Граничные условия (1.4) примут вид

$$\begin{aligned} X &= P_0 \varphi(\tau/\tau_0) && \text{при } l = l_0 \\ p &= p_*, u = \varepsilon s^*, X = \rho_1 u s_j^* && \text{при } l = l_0 + s(\tau) \\ s(\tau_0) &= 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

2. Механическая модель грунта определяется видом зависимостей

$$\varepsilon = \varepsilon(p, p_*), \quad F = F(p, p_*), \quad G = G(p, p_*)$$

В дальнейшем удельная объемная деформация представляется в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon &= (p_*/b)^n f(\pi), \quad \pi = p/p_*, \quad n = \text{const}, \quad b = \text{const} \quad (2.1) \\ f'(\pi) &> 0, \quad f(1) = 1, \quad 0 < n < 1, \quad f'(1) < n, \quad 0 < f_0 < 1 \quad (f_0 = f(0)) \end{aligned}$$

При  $p = p_*$

$$\pi = 1, \quad \varepsilon = \varepsilon_*(p_*) = (p_*/b)^n$$

т. е. нагрузочная ветвь диаграммы объемного деформирования представляется степенной кривой. Каждому значению  $p_*$  соответствует своя нагрузочная ветвь, но все они являются аффинно-подобными кривыми. Параметр  $f_0$  характеризует остаточные объемные деформации: при  $f_0 = 0$  остаточные деформации отсутствуют, при  $f_0 = 1$  отсутствует объемная упругость (т. е. вся объемная деформация является остаточной).

В соответствии с представлениями, развитыми в работе [1], движение мягкого грунта может происходить в двух режимах: с упруго-пластическим сдвигом, когда  $\omega > 0$ , и с упругим сдвигом, когда  $\omega = 0$ .

В упруго-пластическом режиме должно выполняться уравнение  $I = F(p, p_*)$  — условие пластичности. В последующем функция  $F(p, p_*)$  представляется в виде

$$F = 3/4 \alpha^2 p_*^2 g(\pi) \quad (\alpha = \text{const}, \quad g'(\pi) > 0, \quad g(1) = 1) \quad (2.2)$$

Функция  $G(p, p_*)$  аналогична модулю сдвига  $G_e$  для упругих тел, который выражается через модуль объемного сжатия  $K_e$  и коэффициент Пуассона  $\sigma$  упругого тела по формуле

$$G_e = \frac{3}{2} \frac{1-2\sigma}{1+\sigma} K_e$$

По аналогии с этой формулой можно написать

$$G(p, p_*) = \frac{3}{2} \kappa(p, p_*) K(p, p_*) \quad K = (1 - \varepsilon) \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right)^{-1} \quad (2.3)$$

Здесь функция  $\kappa(p, p_*)$  вбирает в себя неопределенность функции  $G(p, p_*)$ . Из физических соображений следует, что функция  $G(p, p_*)$  должна оставаться конечной, когда  $\partial \varepsilon / \partial p \equiv 0$ . Простейшее представление для функции  $\kappa(p, p_*)$ , которое обеспечивает выполнение этого условия, имеет вид

$$\kappa(p, p_*) = \alpha \gamma f'(\pi) \quad (\gamma = \text{const}) \quad (2.4)$$

Из (2.3) с учетом (2.4) следует

$$G(p, p_*) = 3/2 \alpha \gamma (p_*/\varepsilon_*) (1 - \varepsilon) \quad (2.5)$$

3. При упруго-пластическом режиме из условия пластичности  $I = F(p, p_*)$  в силу (1.2) и (2.2) следует

$$\Psi = \alpha p_* g(\pi) \quad (3.1)$$

При упругом режиме  $\omega = 0$ , следовательно

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = -\frac{4}{3} G \frac{\partial u}{\partial l} (1 - \varepsilon)^{-1} \quad \text{или} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = 2\alpha \gamma \rho_* f'(\pi) \frac{\partial \pi}{\partial \tau}$$

Здесь принято во внимание (2.5). Отсюда

$$\Psi = 2\alpha \gamma \rho_* (f(\pi) - f_0) \quad (3.2)$$

Здесь принято дополнительное условие, что напряжения обращаются в ноль все одновременно.

При переходе от упруго-пластического режима к упругому должны выполняться равенства

$$g(\pi) = 2\gamma (f(\pi) - f_0), \quad g'(\pi) = 2\gamma f'(\pi) \quad (3.3)$$

которые являются следствием предполагаемой непрерывности напряжений при переходе. Уравнения (3.3) показывают, что переход в каждой частице происходит, когда давление  $p$  достигает величины  $p_t = p_* \pi_t$ , где  $\pi_t$  — корень уравнения

$$\Gamma'(\pi_t) = 0 \quad (\Gamma(\pi) = 1/2 g(\pi) (f(\pi) - f_0)^{-1}) \quad (3.4)$$

При  $p > p_t$  в частице происходит упруго-пластический сдвиг, при  $p < p_t$  деформация сдвига является упругой. Уравнения (3.3) определяют постоянную  $\gamma = \Gamma(\pi_t)$  в (2.4). Из (3.1) и (3.2) следует, что

$$\Psi = \alpha p_* \psi(\pi), \quad \psi(\pi) = \begin{cases} g(\pi) (\pi > \pi_t), \\ 2\gamma (f(\pi) - f_0) (\pi < \pi_t) \end{cases} \quad (3.5)$$

В дальнейшем предполагается, что  $\pi_t < 1$ . Поэтому

$$\psi(1) = g(1) = 1$$

Из уравнений (1.8) следует, что в начальный момент  $\tau = \tau_0$  справедливы равенства

$$X = P_0, \quad p = p_* = \frac{P_0}{1 + \alpha}, \quad \Psi = \frac{\alpha P_0}{1 + \alpha}, \quad \varepsilon_0 = \left( \frac{P_0}{(1 + \alpha)b} \right)^n$$

$$u = u_0 = \left( \frac{P_0 \varepsilon_0}{\rho_1} \right)^{1/2}, \quad s(\tau_0) = c_0 = \left( \frac{P_0}{\rho_1 \varepsilon_0} \right)^{1/2}$$

Для дальнейшего удобно привести уравнения (1.7) и граничные условия (1.8) к безразмерному виду, полагая

$$\tau = \tau_0 \bar{\tau}, \quad l = l_0 \bar{l}, \quad u = u_0 \bar{u}, \quad p = \frac{P_0}{1 + \alpha} \bar{p}, \quad p_* = \frac{P_0}{1 + \alpha} \bar{p}_* \quad (3.6)$$

$$\Psi = \frac{\alpha P_0}{1 + \alpha} \bar{\Psi}, \quad X = P_0 \bar{X}, \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \bar{\varepsilon}, \quad s(\tau) = l_0 (S - 1)$$

До сих пор постоянная  $l_0$  была неопределенной. Пришла пора избавиться от этой неопределенности, что лучше всего сделать, положив  $l = c_0 \tau_0$ ,  $c_0 = s^*(\tau_0)$ . В безразмерной форме уравнения (1.7) примут вид (черта над безразмерными величинами опущена)

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial l} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial X}{\partial l} = 0, \quad \varepsilon = p_*^n f(\pi), \quad p_* = p_*(l)$$

$$X = p_* \chi(\pi), \quad \pi = p/p_*, \quad \chi(\pi) = \frac{\pi + \alpha \psi(\pi)}{1 + \alpha} \quad (3.7)$$

Граничные условия (1.8) примут вид

$$p_* = 1, \quad \chi(\pi) = \varphi(\tau) \quad \text{при } l = 1 \quad (3.8)$$

$$u = \varepsilon S^*, \quad p_* = u S^*, \quad \pi = 1 \quad \text{при } l = S(\tau)$$

$$S(1) = S^*(1) = 1$$

4. Можно показать (ранее при  $g(\pi) = \pi$  это было сделано в [2]), что существует однопараметрическое семейство функций  $\chi_0(\tau, k)$  (через  $k$  обозначен параметр этого семейства) такое, что когда функция поверхностного давления  $\varphi(\tau)$  из (3.8.1.) принадлежит этому семейству, решение уравнений (3.7), удовлетворяющее граничным условиям (3.8), может быть выражено в виде

$$u = u_*(l) \vartheta(\xi), \quad p = p_*(l) \pi(\xi), \quad \xi = l S^{-1} \quad (4.1)$$

где  $\vartheta(\xi)$  и  $\pi(\xi)$  удовлетворяют некоторым обыкновенным дифференциальным уравнениям. Действительно, если искать решение системы (3.7) вида (4.1), она приведет к уравнениям

$$\chi(\pi) = \frac{u_* S^*}{p_* S} \xi \frac{d\vartheta}{d\xi} - \frac{p_*}{l p_*} \chi'(\pi) \xi \frac{d\pi}{d\xi} \quad (4.2)$$

$$\vartheta = \frac{p_*^n S^*}{u_* S} f'(\pi) \xi \frac{d\pi}{d\xi} - \frac{u_*}{l u_*} \xi \frac{d\vartheta}{d\xi}$$

Так как  $\vartheta$  и  $\pi$  по предположению зависят лишь от  $\xi$ , необходимо, чтобы в уравнениях (4.2) коэффициенты зависели лишь от  $\xi$  или были постоянными. Поэтому

$$l p_*^* / p_* = -m = \text{const}, \quad l u_*^* / u_* = -k = \text{const}$$

Отсюда

$$p_* = l^{-m}, \quad u_* = l^{-k}$$

В силу того, что  $l = \xi S(\tau)$ , следует

$$\frac{u_* S^*}{p_* S} = -\frac{1}{m} \xi^{m-k+1} S^{m-k} S^*$$

$$\frac{p_*^n S^*}{u_* S} = -\frac{1}{k} \xi^{k-mn+1} S^{k-mn} S^*$$

Отсюда

$$m = 2k/(1+n), \quad S^* S^* = 1$$

где введено обозначение

$$\mu = \frac{1-n}{1+n} k$$

Следовательно

$$p_*(l) = l^{-2k/(1+n)}, \quad u_*(l) = l^{-k} \quad (4.3)$$

$$S(\tau) = ((1+\mu)\tau - \mu)^{1/(1+\mu)} \quad (4.4)$$

Система (4.2) теперь примет вид

$$\begin{aligned} \frac{2k}{1+n} \chi(\pi) &= \chi'(\pi) \xi \frac{d\pi}{d\xi} - \xi^{2+\mu} \frac{d\vartheta}{d\xi} \\ k\vartheta &= \xi \frac{d\vartheta}{d\xi} - f'(\pi) \xi^{2+\mu} \frac{d\pi}{d\xi} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Решение системы (4.5) определяется начальными условиями

$$\pi(1) = \vartheta(1) = 1 \quad (4.6)$$

Легко убедиться, что условия на ударной волне (3.8.2) автоматически удовлетворятся вследствие (4.3), (4.4) и (4.6). Теперь очевидно, что совокупность функций, определенных формулой

$$\chi_0(\tau) = \chi(\pi(\xi))_{\xi=S^{-1}} \quad (4.7)$$

как раз и образует то однопараметрическое семейство (с параметром  $k$ ), о котором говорилось в начале этого раздела. Решения системы (3.7), соответствующие функциям  $\varphi(\tau)$  из семейства  $\chi_0(\tau, k)$ , имеют вид, определенный формулами (4.1), и являются поэтому автомоделными решениями. Исследование свойств этих решений сводится к изучению решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4.5), удовлетворяющих начальным условиям (4.6). Удобно уравнения (4.5) преобразовать, вводя вместо  $\xi$  переменную

$$\eta = \xi^{-(1+\mu)} \quad (4.8)$$

Функции  $\vartheta(\eta)$  и  $\pi(\eta)$  будут удовлетворять обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{d\pi}{d\eta} &= \frac{2k}{1+n+(1-n)k} \frac{\eta\chi(\pi) + 1/2(1+n)\vartheta}{f'(\pi) - \eta^2\chi'(\pi)} \\ \frac{d\vartheta}{d\eta} &= \frac{2k}{1+n+(1-n)k} \frac{f'(\pi)\chi(\pi) + 1/2(1+n)\chi'(\pi)\vartheta}{f'(\pi) - \eta^2\chi'(\pi)} \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\chi(\pi) = \frac{\pi + \alpha\psi(\pi)}{1+\alpha}, \quad \psi(\pi) = \begin{cases} g(\pi) & (\pi > \pi_1) \\ 2\gamma(f(\pi) - f_0) & (\pi < \pi_1) \end{cases}$$

$\pi_1$  — корень уравнения

$$\Gamma'(\pi_1) = 0, \quad \gamma = \Gamma(\pi_1), \quad \Gamma(\pi) = 1/2g(\pi)(f(\pi) - f_0)^{-1}$$

■ начальным условиям

$$\pi(1) = \vartheta(1) = 1 \quad (4.10)$$

Интегрирование уравнений (4.9) с начальными условиями (4.10) при заданных функциях  $f(\pi)$ ,  $g(\pi)$  и постоянных  $n$ ,  $k$  может быть с большой легкостью выполнено численным методом.

Функции  $f(\pi)$  и  $g(\pi)$  задавались аналитически в виде

$$f(\pi) = \frac{(1-nf_0)\pi + nf_0}{(1-n)\pi + n}, \quad g(\pi) = (1-\beta)\pi + \beta \quad (\beta = \text{const}) \quad (4.11)$$

Решение находилось методом Рунге — Кутта на ЭВЦМ М-20 Вычислительного центра Московского университета. Постоянная  $\beta$  была принята равной 0.01, постоянным  $n$  и  $f_0$  давались значения от 0.1 до 0.9. Решения системы (4.9) обладают, как нетрудно убедиться, следующим асимптотическим представлением при  $\eta \rightarrow \infty$ :

$$\pi = C_1 \eta^{-2k/(1+n+(1-n)k)}, \quad \vartheta = C_2 \eta_1^{-k/(1+\mu)} \\ \left( C_1 = \text{const}, C_2 = \text{const}, \mu = \frac{1-n}{1+n} k \right) \quad (4.12)$$

При выводе формул (4.12) предполагалось, что выполнено условие  $\pi < \pi_1$ .

Уравнения (4.12) показывают, что в плоскости  $(\eta^{-1}, \pi)$  интегральные кривые, соответствующие  $k < 1$ , будут приходить в начало координат с бесконечным наклоном, при  $k = 1$  наклон будет конечным. Этим случаям ( $k \leq 1$ ) соответствует бесконечный импульс приложенного к поверхности грунта давления.

При  $k > 1$  интегральные кривые в плоскости  $(\eta^{-1}, \pi)$  будут касаться оси значений переменной  $\eta^{-1}$  в начале координат. Импульс давления в этом случае будет конечным. Численное интегрирование проводилось для значений  $k \geq 1$ ; обнаружилось, что необходимо] выбирать  $k < k_1(n, f_0)$ , ибо при  $k \geq k_1$  машина не могла продолжить решение системы (4.9) за некоторое значение  $\eta_1(k, n, f_0)$  переменной  $\eta$ . Это было связано с тем, что при  $\eta = \eta_1$  обращалась в ноль величина  $f'(\pi) - \eta^2 \chi'(\pi)$ , содержащаяся в знаменателях правых частей уравнений (4.9). Функции  $\pi_1(\eta)$  и  $\vartheta_1(\eta)$ , найденные из условия одновременного обращения в ноль числителей и знаменателей правых частей, которое сводится к равенствам

$$f'(\pi) - \eta^2 \chi'(\pi) = 0, \quad \eta \chi(\pi) + \frac{1}{2}(1+n)\vartheta = 0$$

образуют особое решение системы (4.9). При  $k \geq k_1$  решение системы (4.9), удовлетворяющее начальным условиям (4.10), пересекается с особым решением в точке  $\eta = \eta_1$ . (Аналитическое исследование этой ситуации хотя и возможно, но выходит за рамки настоящей работы)<sup>1</sup>. Функции

<sup>1</sup> Можно отметить, что  $k_1 = \infty$  при  $f_0 = 1$ . При  $f_0 = 0.1$  было установлено, что  $k_1 < 4$  при  $n = 0.7$  и  $k_1 < 2$  при  $n = 0.5$ .

Любопытный факт обнаруживается с помощью формул (4.12), если рассматривать смещение поверхности грунта, которое пропорционально величине]

$$\theta_1 = \int_1^{\infty} \vartheta(\eta) d\eta$$

Очевидно, что

$$\theta_1 = \infty \text{ при } k \leq 2/(1+n), \quad \theta_1 < \infty \text{ при } k > 2/(1+n)$$

Если  $n < 1$ , то при  $1 < k < 2/(1+n)$  смещение поверхности может оказаться неожиданно большим, хотя импульс поверхностного давления будет конечным.

$\pi(\eta)$ , соответствующие  $k > 1$ , имеют область отрицательных значений при  $\eta > \eta_0(n, f_0, k)$  ( $\pi(\eta_0) = 0$ ), тогда как функции  $\vartheta(\eta)$  всегда положительны. При одних и тех же  $n$  и  $k$  отрицательные значения  $\pi$  тем больше по абсолютной величине, чем больше  $f_0$ . Основным интересом представляет определение функций поверхностного давления  $\chi_0(\tau, k)$ , которые соответствуют найденным решениям (4.9).

Из формул (4.1), (4.4) и (4.8) следует

$$\eta = ((1 + \mu)\tau - \mu) l^{-(1+\mu)} \left( \mu = \frac{1-n}{1+n} k \right) \quad (4.13)$$

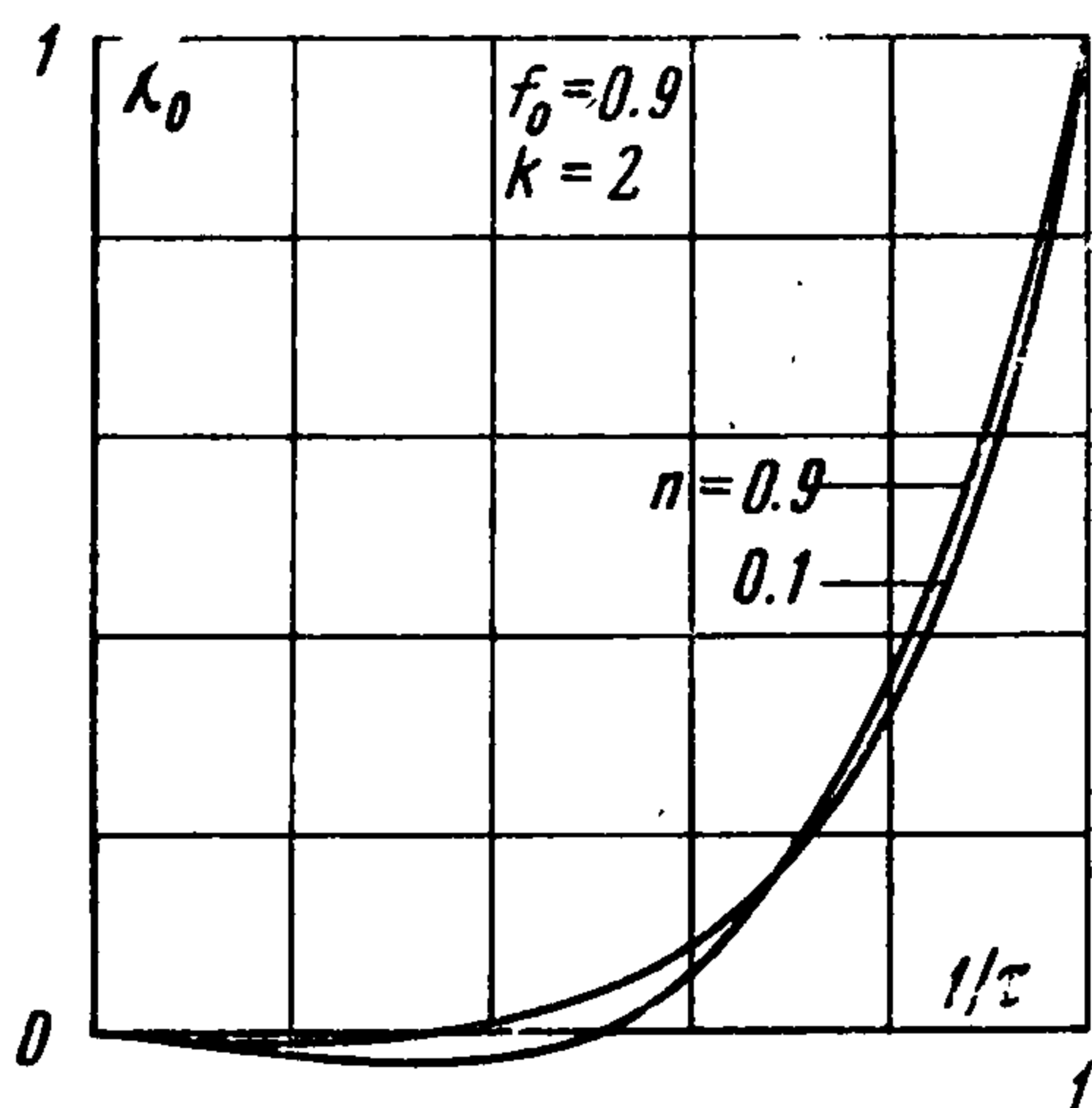
Отсюда

$$(\eta)_{l=1} = (1 + \mu)\tau - \mu \quad (4.14)$$

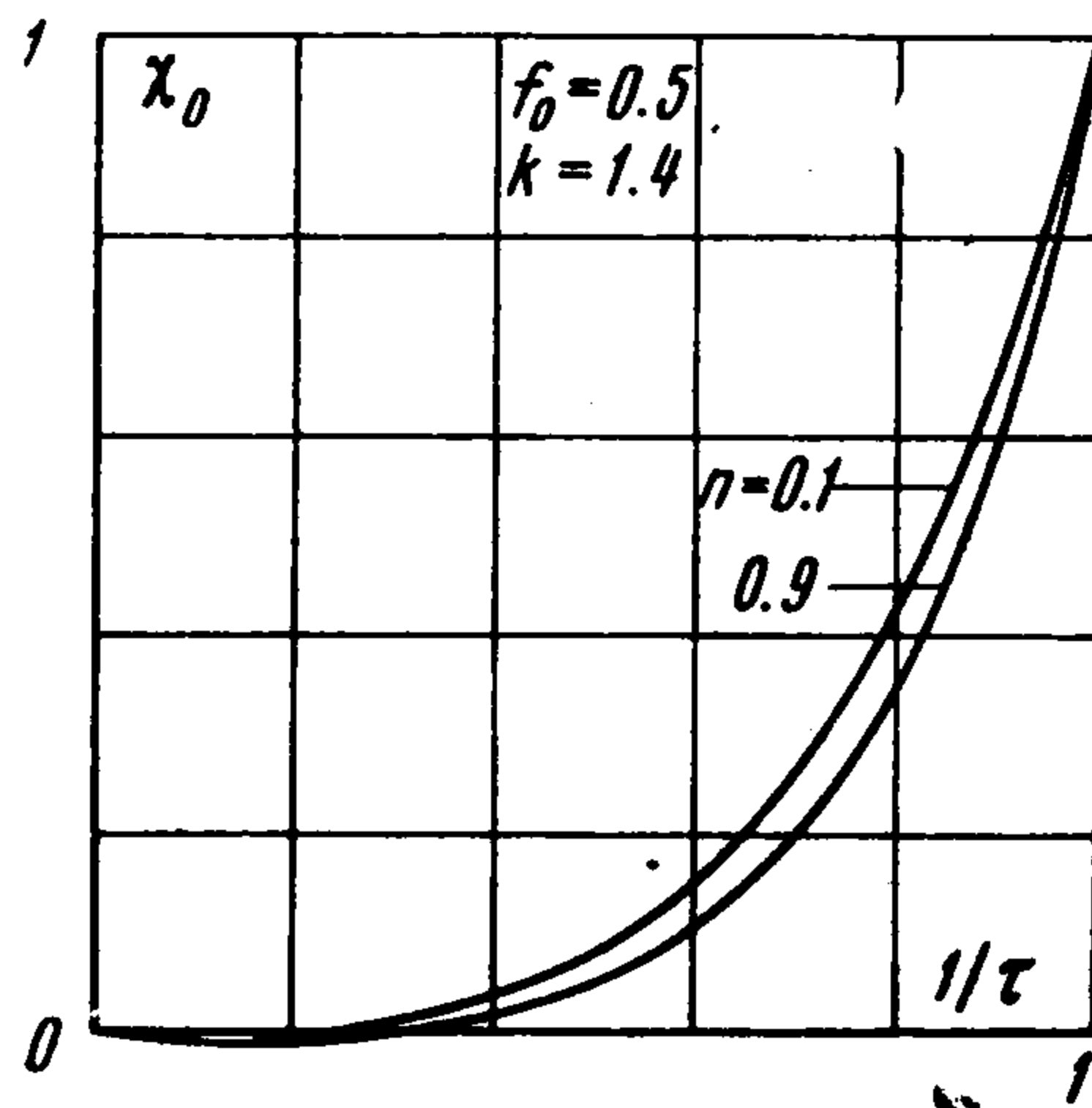
Следовательно

$$\chi_0(\tau, k) = \chi(\pi(\eta))_{\eta=(1+\mu)\tau-\mu} \quad (4.15)$$

Область отрицательных значений у функций  $\chi_0(\tau, k)$  при  $k > 1$  говорит о наличии фазы разрежения при изменении во времени приложенного к поверхности давления.



Фиг. 1

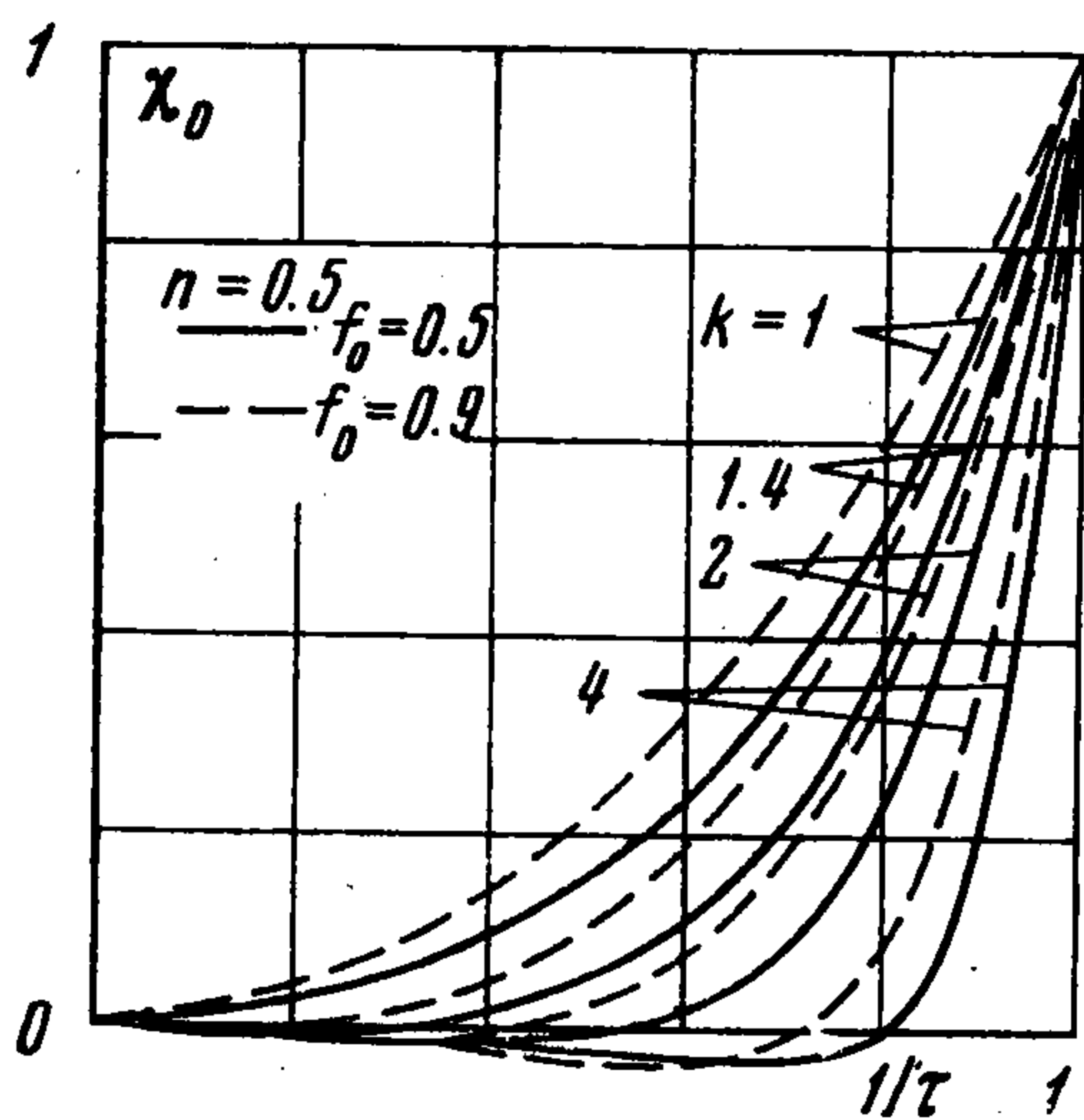


Фиг. 2

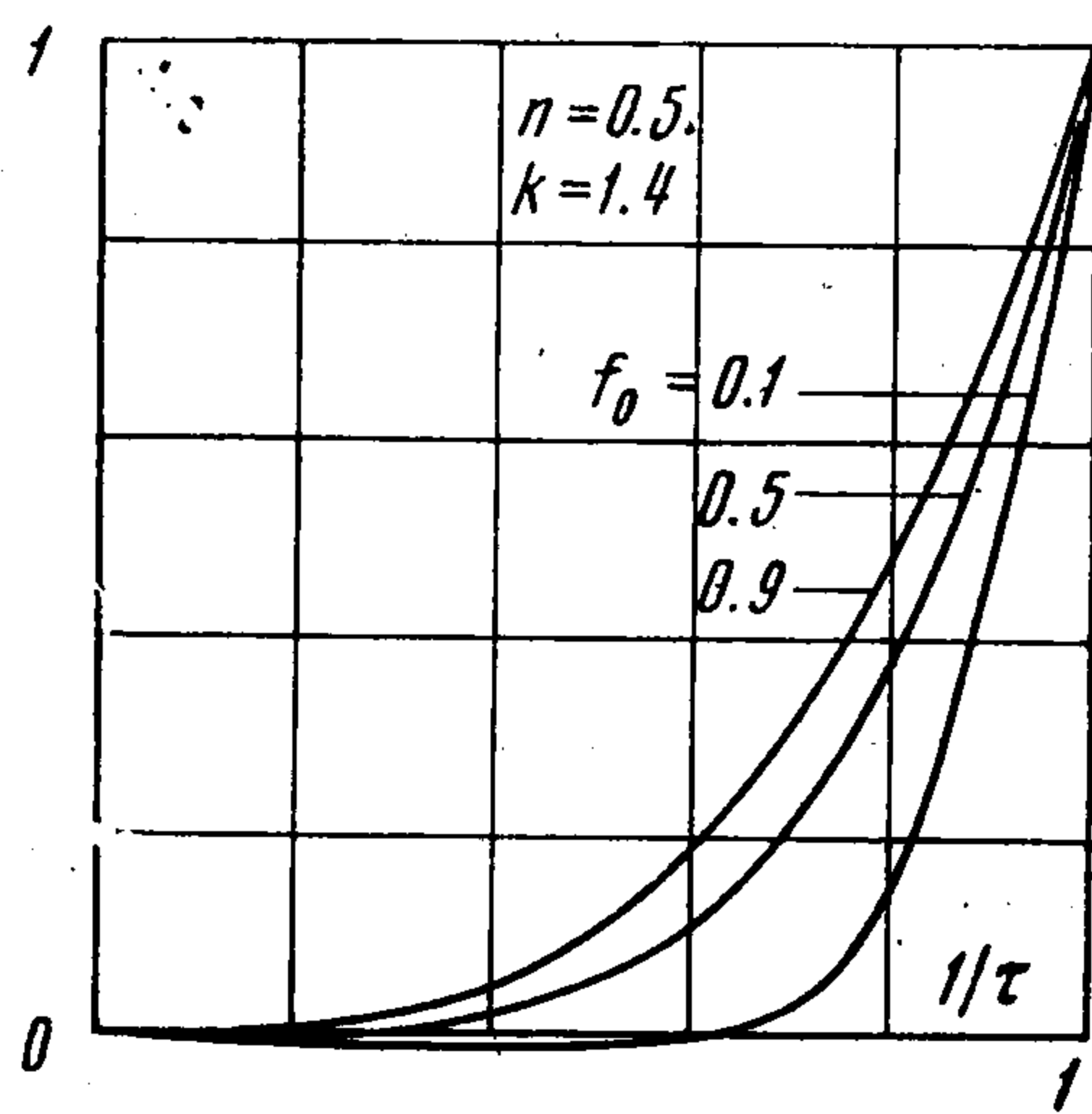
На фиг. 1 и 2 изображены функции  $\chi_0(\tau)$ , соответствующие фиксированным значениям параметров  $k$  и  $f_0$  и различным значениям  $n$ . При этом на обеих фигурах нанесены только кривые, соответствующие крайним значениям  $n$ , равным 0.1 и 0.9. Характер кривых на фиг. 1 и 2 наводит на мысль, что функции  $\chi_0$ , соответствующие постоянным значениям  $k$  и  $f_0$ , мало отличаются одна от другой при различных  $n$ .

Это действительно так, если только  $f_0$  не слишком мало. Для большинства мягких грунтов  $f_0 \geq 0.5$ , поэтому высказанное соображение для таких грунтов должно быть справедливо. На фиг. 3 показано, что меняются профили поверхностного давления в зависимости от  $k$  при постоянных  $n$  и  $f_0$ . Сравнение кривых на фиг. 3 позволяет утверждать, что при одинаковых законах изменения приложенного к поверхности грунта давления интенсивность ударной волны в грунте убывает тем медленнее, чем меньше остаточные объемные деформации (вид нагрузочной ветви диаграммы объемного деформирования предполагается неизменным). Этот вывод основан на том факте, что близким профилям функции  $\chi_0$  (например, кривая  $\chi_0$ , соответствующая  $k = 1.4$ ,  $f_0 = 0.5$ , расположена вблизи кривой  $\chi_0$ , соответствующей  $k = 2$ ,  $f_0 = 0.9$ , так что без грубой ошибки их можно не различать), т. е. примерно одинаковым законам из-

менения поверхностного давления при меньшем  $f_0$  соответствует меньшее  $k$  (при одном и том же  $n$ ). А чем меньше  $k$ , тем интенсивней ударная волна, как это следует из формулы (4.4). (Для моментов времени, близких к начальному, справедливость данного утверждения может быть доказана совершенно строго путем рассмотрения производ-

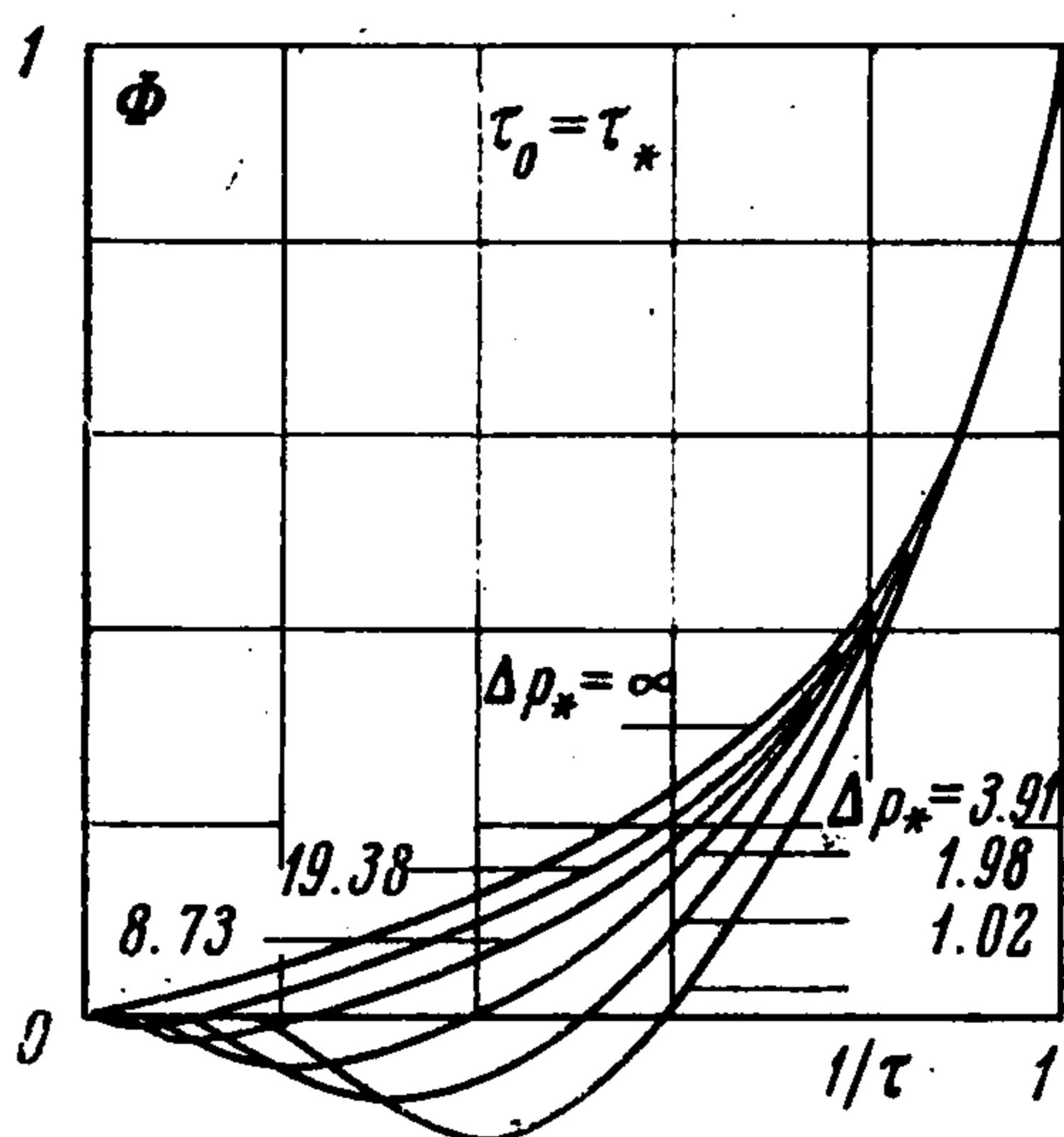


Фиг. 3

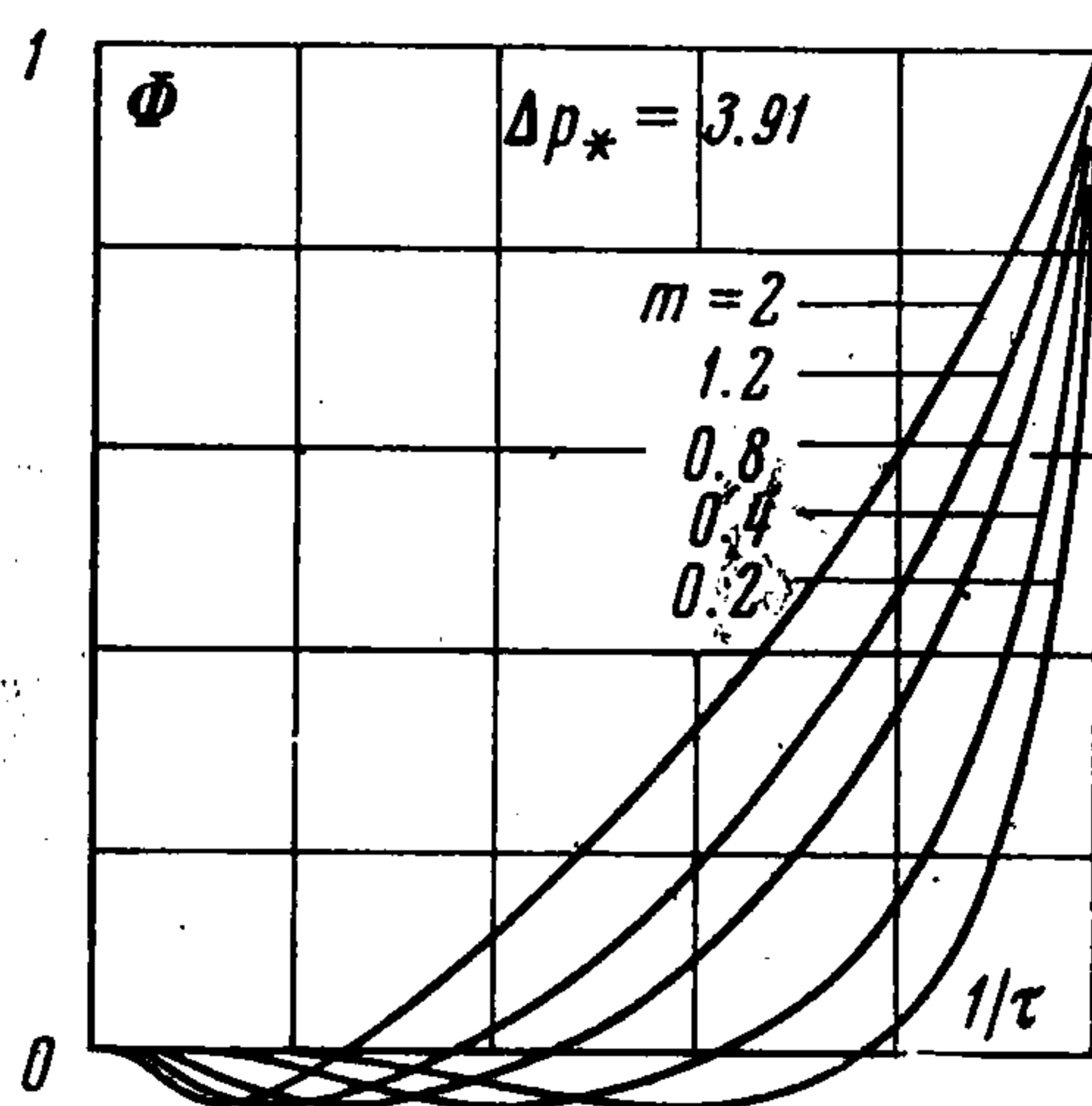


Фиг. 4

ной  $d\chi_0/d\tau$ ). На фиг. 4 показано, как меняется профиль поверхностного давления при постоянных  $k$  и  $n$  в зависимости от  $f_0$ . Так как закон движения ударной волны при этом один и тот же, на фиг. 4 показано, сколь значительно влияние упругости грунта при разгрузке на его движение: профили давления, соответствующие меньшим зна-



Фиг. 5



Фиг. 6

чениям  $f_0$ , значительно менее наполнены, чем профили для больших значений  $f_0$ , в полном соответствии с выводом о влиянии упругости грунта при разгрузке на закон затухания ударной волны.

Практически интересно знать, насколько отличаются профили  $\chi_0(\tau, k)$  от реальных профилей, возникающих при взрыве заряда на поверхности грунта.

На фиг. 5 показаны профили давления  $\Phi(\tau, \Delta p_*)$  при «точечном» сферическом взрыве в воздухе [3] ( $\Delta p_*$  — перепад давления на воздушной ударной волне).

Кривые, показанные на фиг. 5, соответствуют определенному выбору масштаба времени  $\tau_0$ : для каждой кривой  $\tau_0 = \tau_*$ , где  $\tau_*$  — время прихода в рассматриваемую точку поверхности грунта ударной волны заданной интенсивности  $\Delta p_*$ . При другом выборе  $\tau_0$  кривые фиг. 5 преобразуются аффинно-подобным образом. Фиг. 6 показывает, как трансформируется функция давления  $\Phi(\tau)$ , соответствующая  $\Delta p_* = 3.91$ , при различном выборе масштаба времени  $\tau_0$  в соответствии с формулой  $\tau_0 = \tau_*/m$ .

Сравнение фиг. 3 и 6 позволяет предположить, что выбором постоянных  $k$  и  $m$  (при данных  $n$ ,  $f_0$  и  $\Delta p_*$ ) можно пытаться добиться, чтобы профили давления  $\chi_0$  и  $\Phi$  были близкими. Конечно, излишний оптимизм при этом неуместен, так как, вообще говоря, функции  $\Phi(\tau)$  и  $\chi_0(\tau)$  никак одна с другой не связаны. Можно считать счастливой случайностью, что при некоторых реально встречающихся значениях параметров  $f_0$  и  $\Delta p_*$  эти попытки оказываются успешными.

Найденные автомодельные решения позволяют оценить влияние сжимаемости грунта при разгрузке на параметры движения и в случаях, когда автомодельность отсутствует. Они могут служить для проверки эффективности приближенных методов решения.

Работа выполнена под руководством С. С. Григоряна, которому выражается искренняя признательность. Автор благодарен Г. И. Петрашню за полезные замечания и советы.

Поступила 27 VIII 1969

Институт механики МГУ

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян С. С. Об основных представлениях динамики грунтов. ПММ, 1960, т. 24, вып. 6.
2. Хайретдинов Э. Ф. Некоторые точные решения уравнений одномерного (с плоскими волнами) неустановившегося движения грунта. Докл. АН СССР, 1966, т. 169, № 4.
3. Охочимский Д. Е., Кондрашева И. Л., Власова З. П., Казакова Р. К. Расчет точечного взрыва с учетом противодействия. Тр. Матем. ин-та им. Стеклова АН СССР, 1957, т. 50.