

## О РАСПРОСТРАНЕНИИ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ВЯЗКО-УПРУГОЙ ЖИДКОСТИ

И. М. Руткевич

(Москва)

Исследуется распространение волн малой амплитуды в несжимаемой вязко-упругой жидкости, реологическое поведение которой описывается нелинейным дифференциально-операторным уравнением состояния.

Волны в линейной вязко-упругой среде подробно рассмотрены в работах [1,2]. В предлагаемой статье рассматриваются модели Олдройда [3], Де Уитта [4] и обобщения этих моделей на случай конечного спектра времен релаксации и ретардации. Для указанных моделей приводится инвариантная формулировка условий эволюционности системы уравнений гидродинамики. Для сред, обладающих мгновенной упругостью, установлены возможные типы коротких поперечных волн. Рассмотрены фазовые и групповые поляры точечного источника. Для высокочастотных поперечных волн приведены локальные характеристики отражения и преломления на границе олдройдовской жидкости с линейно упругим телом.

Малые возмущения рассмотрены при наличии в жидкости напряженного состояния, отличного от всестороннего давления.

**1. Формулировка условий эволюционности уравнений гидродинамики моделей, обладающих конечным набором времен релаксации и ретардации.** Система уравнений динамики несжимаемой вязко-упругой жидкости состоит из уравнения неразрывности

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1.1)$$

уравнения импульсов

$$\rho \, d\mathbf{v}/dt = -\nabla p + \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{F} \quad (1.2)$$

и тензорного уравнения состояния

$$P_r \left( \frac{D}{Dt} \right) \mathbf{T} = 2\eta Q_s \left( \frac{D}{Dt} \right) \mathbf{E} \quad (1.3)$$

В уравнении (1.3)  $\mathbf{T}$  — тензор «вязко-упругих» напряжений,  $\mathbf{E}$  — тензор скоростей деформаций,  $P_r(D/Dt)$ ,  $Q_s(D/Dt)$  — дифференциальные операторы, представляющие собой многочлены от  $D/Dt$

$$P_r \left( \frac{D}{Dt} \right) = \prod_{i=1}^r \left( 1 + \lambda_i \frac{D}{Dt} \right), \quad Q_s \left( \frac{D}{Dt} \right) = \prod_{i=1}^s \left( 1 + \theta_i \frac{D}{Dt} \right) \quad (1.4)$$

Величины  $\lambda_i$  и  $\theta_i$  образуют спектры релаксации и ретардации соответственно. Символ  $DA/Dt$  означает относительную конвективную производную тензора  $\mathbf{A}$ , определенную по одному из следующих правил:

$$\frac{DA}{Dt} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} - (\mathbf{A}\mathbf{E} + \mathbf{E}\mathbf{A}) + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{A} - \mathbf{A}\boldsymbol{\Omega} \quad (1.5)$$

$$\frac{DA}{Dt} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + (\mathbf{A}\mathbf{E} + \mathbf{E}\mathbf{A}) + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{A} - \mathbf{A}\boldsymbol{\Omega} \quad (1.6)$$

$$\frac{DA}{Dt} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{A} - \mathbf{A}\boldsymbol{\Omega} \quad (1.7)$$

В декартовой системе координат компоненты тензоров  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{\Omega}$  имеют вид

$$e_{ij} = 1/2(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad \omega_{ij} = 1/2(v_{j,i} - v_{i,j})$$

Символ (1.5) означает «контравариантную» производную по Олдройду, символ (1.6) — «ковариантную» производную по Олдройду, символ (1.7) — производную Яуманна — Де Уитта.

Модели типа (1.3), в которых относительные конвективные производные заменены частными производными по времени, применяются в теории линейной вязко-упругости. Аналогичные модели, содержащие нелинейные дифференциальные операторы, рассматривались в работах [5,6]. Используя простую механическую модель микро-структуры вязко-упругого материала, Д. Бленд [1] показал, что существуют два класса линейных вариантов модели (1.3). К первому классу относятся среды, обладающие мгновенной упругостью, для которых  $r = s + 1$ . Ко второму классу отнесены модели, обнаруживающие при мгновенном нагружении вязкое поведение. Для этих моделей  $r = s$ . Аналогичные классы будем рассматривать для сред с уравнением состояния (1.3) при различных законах дифференцирования (1.5) — (1.7).

Рассмотрим произвольное непрерывное движение среды, параметры которого  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ ,  $p(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$  удовлетворяют системе уравнений (1.1) (1.3). Наложим на параметры течения малые возмущения  $\delta\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\delta p(\mathbf{x}, t)$ ,  $\delta\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ . При обычных предположениях, проводимых при линеаризации, придем к системе линейных уравнений с частными производными относительно возмущений. Коэффициенты этой системы будут зависеть от параметров невозмущенного течения.

В окрестности произвольной точки пространства независимых переменных  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  представим возмущения в виде плоской волны

$$(\delta v_i, \delta p, \delta T_{ij}) = \text{Re} [(w_i, q, \sigma_{ij}) \exp i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)] \quad (1.8)$$

считая комплексные амплитуды возмущений  $w_i$ ,  $q$ ,  $\sigma_{ij}$  постоянными.

Для того, чтобы получить волны вида (1.8) в качестве решений, надо предположить постоянство коэффициентов системы уравнений. При этом в достаточно малой окрестности точки  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  будем считать коэффициенты системы равными их значениям в этой точке. Подобный подход оправдан при рассмотрении коротковолновых возмущений, для которых на расстояниях порядка длины волны изменение коэффициентов системы пренебрежимо мало. Тогда при исследовании системы уравнений на эволюционность можно использовать метод постоянных коэффициентов (см., например, [7]).

При рассмотрении коротких волн и при выводе условий эволюционности в линеаризованных уравнениях (1.1) — (1.3) достаточно сохранить только члены со старшими производными по времени и координатам от возмущений  $\delta v_i$ ,  $\delta p$ ,  $\delta T_{ij}$ . Тогда линеаризованные уравнения неразрывности и импульсов примут вид

$$\text{div } \delta\mathbf{v} = 0, \quad \rho d\delta\mathbf{v}/dt = -\nabla\delta p + \text{div } \delta\mathbf{T} \quad (1.9)$$

К уравнениям (1.9) следует присоединить линеаризованное уравнение состояния. При этом будем рассматривать два случая.

Первый случай  $r = s + 1$ . Присоединяемые уравнения для правил дифференцирования (1.5) — (1.7) соответственно будут иметь вид

$$\begin{aligned} a \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}} \left( \frac{d\delta T}{dt} - \delta E \cdot T - T\delta E + \delta \Omega \cdot T - T\delta \Omega \right) &= 2\eta b \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}} \delta E \\ a \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}} \left( \frac{d\delta T}{dt} + \delta E \cdot T + T\delta E + \delta \Omega \cdot T - T\delta \Omega \right) &= 2\eta b \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}} \delta E \\ a \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}} \left( \frac{d\delta T}{dt} + \delta \Omega \cdot T - T\delta \Omega \right) &= 2\eta b \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}} \delta E \\ a &= \prod_{i=1}^r \lambda_i, \quad b = \prod_{i=1}^{r-1} \theta_i \quad (r > 1); \quad a = \lambda, \quad b = 1 \quad (r = 1) \end{aligned} \quad (1.10)$$

При подстановке решений вида (1.8) в уравнения (1.9) придем к соотношениям

$$w_i n_i = 0, \quad -\rho c w_i = -q n_i + \sigma_{ij} n_j \quad (c = \omega/k - \nu n, \quad n = k/k)$$

Подставляя решения вида (1.8) в уравнения (1.10), получим

$$\begin{aligned} c^{r-1} \left[ c\sigma_{ij} + \left( T_{kj} n_k + \eta \frac{b}{a} n_j \right) w_i + \left( T_{ik} n_k + \eta \frac{b}{a} n_i \right) w_j \right] &= 0 \\ c^{r-1} \left[ c\sigma_{ij} + \eta \frac{b}{a} (n_j w_i + n_i w_j) - (T_{kj} n_i + T_{ik} n_j) w_k \right] &= 0 \\ c^{r-1} \left[ c\sigma_{ij} + \left( \eta \frac{b}{a} n_j + \frac{1}{2} T_{kj} n_k \right) w_i + \left( \eta \frac{b}{a} n_i + \frac{1}{2} T_{ik} n_k \right) w_j - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (T_{kj} n_i + T_{ik} n_j) w_k \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Каждая из трех групп уравнений (1.12) вместе с уравнениями (1.11) образует систему десяти линейных алгебраических однородных уравнений относительно десяти амплитуд возмущений  $w_i$ ,  $q$ ,  $\sigma_{ij}$ . Обращение в нуль детерминантов указанных систем будет условием существования у этих систем нетривиальных решений.

При вычислении детерминантов удобно рассматривать все величины в специальной прямоугольной декартовой системе координат  $S$ . Ось  $x_1$  системы  $S$  направим по вектору  $n$ . Направления осей  $x_2$ ,  $x_3$  выберем так, чтобы недиагональный элемент  $T_{23}$  невозмущенного тензора «вязко-упругих» напряжений был равен нулю. Если площадка  $x_2 x_3$  не подвергнута равномерному растяжению или сжатию (в противном случае  $T_{23} = 0$ ), то существует единственная система  $S$ , в которой  $T_{23} = 0$  и  $T_{22} > T_{33}$ . К этой системе отнесем все векторные и тензорные величины.

Тогда для детерминантов  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$  систем уравнений, соответствующих правилам дифференцирования (1.5) — (1.7), получим следующие выражения

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= c^{6r-2} (-\rho c^2 + T_{11} + \eta b/a)^2 \\ \Delta_2 &= c^{6r-2} (\rho c^2 + T_{22} - \eta b/a) (\rho c^2 + T_{33} - \eta b/a) \\ \Delta_3 &= c^{6r-2} (\rho c^2 - 1/2 (T_{11} - T_{22}) - \eta b/a) (\rho c^2 - 1/2 (T_{11} - T_{33}) - \eta b/a) \end{aligned}$$

Нетривиальное значение  $c^2$  для модели с «контравариантной» производной по Олдройду равно

$$c^2 = \rho^{-1} (T_{11} + \eta b/a)$$

Нетривиальные значения  $c^2$  в модели с «ковариантной» производной по Олдройду равны

$$c_+^2 = \rho^{-1} (\eta b/a - T_{33}), \quad c_-^2 = \rho^{-1} (\eta b/a - T_{22})$$

Для нетривиальных значений  $c^2$  в модели с «яуманновской» производной получим формулы

$$c_+^2 = \rho^{-1} [1/2(T_{11} - T_{33}) + \eta b/a], \quad c_-^2 = \rho^{-1} [1/2(T_{11} - T_{22}) + \eta b/a]$$

В дальнейшем величину  $c$  будем называть скоростью звука, а термином «анизотропия звука» будем характеризовать зависимость величины  $c$  от направления  $n$ . Волны, фронты которых распространяются в данном направлении со скоростями  $c_+$  и  $c_-$ , условимся называть быстрыми и медленными соответственно (по аналогии, например, с магнитной гидродинамикой).

Система уравнений эволюционна, если для решений вида (1.8) выполнено условие:  $\text{Im } \omega < \text{const}$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Очевидно, что в рассматриваемом случае условие эволюционности эквивалентно требованию  $c^2 > 0$  для каждой из рассматриваемых моделей<sup>1</sup>. Поэтому условия эволюционности для моделей с производными (1.5), (1.6) и (1.7) соответственно имеют вид

$$T_{11} + \eta b/a > 0, \quad -T_{22} + \eta b/a > 0, \quad 1/2 (T_{11} - T_{22}) + \eta b/a > 0$$

Так как направление вектора  $n$  может быть произвольным, и система  $S$  поворачивается вместе с вектором  $n$ , то написанным выше неравенствам следует придать инвариантный вид. Пусть  $T_1 \geq T_2 \geq T_3$  — главные значения тензора  $T$  в исследуемой точке. Используя то обстоятельство, что главные значения тензора  $T$  реализуют экстремумы квадратичной формы  $T_{ij}n_i n_j$ , определенной на единичной сфере, для модели (1.3) с производной (1.5) условие эволюционности получим в виде

$$T_3 > -\eta b/a \quad (1.13)$$

При выводе инвариантной формулировки условия эволюционности для модели с производной (1.6) заметим, что при фиксированном направлении  $n$  величина  $T_{22}$  реализует максимум квадратичной формы на множестве векторов, образованном пересечением единичной сферы с плоскостью  $x_2 x_3$ . Поэтому существует направление  $n$ , для которого  $T_{22} = T_1$ .

<sup>1</sup> Условие  $\text{Im } \omega / k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$  на первый взгляд кажется недостаточным для эволюционности, так как это условие выполняется и в том случае, когда  $\text{Im } \omega \sim \sim A k^N$ , где  $A > 0$ ,  $0 < N < 1$ . Однако такое поведение  $\text{Im } \omega$  оказывается невозможным вследствие специфического строения полных дисперсионных уравнений, соответствующих линеаризованным системам при условии сохранения в последних членов с младшими производными.

Следовательно, уравнения «ковариантной» модели эволюционны при условии

$$T_1 < \eta b/a \quad (1.14)$$

Аналогично устанавливается критерий эволюционности модели с «яуманновской» производной

$$1/2(T_1 - T_3) < \eta b/a \quad (1.15)$$

Для двухконстантных моделей среды ( $r = 1, s = 0$ ) величина  $\eta b/a$  равна модулю сдвига жидкости  $\mu = \eta/\lambda$ , где  $\lambda$  — единственное время релаксации напряжений. Условия эволюционности уравнений двухконстантной модели, трактуемые как условия гиперболичности системы уравнений одномерного, нестационарного течения, были даны в работе [8].

Обращаясь к неравенствам (1.13) — (1.15), легко видеть, что ограничения на напряженное состояние среды, налагаемые требованиями эволюционности, совершенно различны для разных моделей. В моделях, содержащих дифференциальные операторы Олдройда, малые возмущения начнут нарастать с бесконечной скоростью, если сжимающие нормальные «вязко-упругие» напряжения превзойдут величину  $\eta b/a$  в случае «контравариантной» модели или если растягивающие нормальные напряжения превзойдут эту же величину в «ковариантной» модели. В модели, использующей дифференциальный оператор Яуманна, аналогичный рост малых возмущений будет происходить при достаточно высоких касательных напряжениях.

Второй случай  $r = s$ . В этом случае исследуемая система состоит из уравнений (1.9) и линеаризованного уравнения состояния, которое для любого из правил дифференцирования (1.5) — (1.7) имеет вид

$$a \frac{d^r}{dt^r} \delta T = 2\eta b^* \frac{d^r}{dt^r} \delta E, \quad a = \prod_{i=1}^r \lambda_i, \quad b^* = \prod_{i=1}^r \theta_i \quad (r \geq 1) \quad (1.16)$$

$$\blacksquare \quad a = b^* = 1 \quad (r = 0)$$

Детерминант однородной системы уравнений, которая получается при подстановке решений (1.8) в уравнения (1.9), (1.16), равен

$$\Delta = c^{6r} (\rho c + ik\eta b^*/a)^2$$

Поэтому единственное нетривиальное значение  $c$  равно  $-ik\eta b^*/a\rho$ . Это значение удовлетворяет условию эволюционности, так как  $\text{Im } \omega < 0$ . Следовательно, уравнения гидродинамики несжимаемой среды (1.3) при  $r = s$  эволюционны. В случае  $r = s = 0$  придем к известному выводу об эволюционности системы уравнений Навье — Стокса.

Для моделей (1.3) при  $r = s$  плоскости  $t = \text{const}$  будут характеристиками системы уравнений. Поэтому возмущения параметров в таких моделях могут распространяться с бесконечной скоростью.

Условия эволюционности устанавливались выше из анализа асимптотических дисперсионных уравнений, отвечающих коротковолновым

возмущениям. Для моделей класса  $r = s + 1$  вместо асимптотических дисперсионных уравнений можно рассмотреть характеристические уравнения систем, описывающих одномерное нестационарное течение. При этом условии эволюционности эквивалентно требованию вещественности корней характеристического уравнения, отвечающего исследуемой модели. Для моделей класса  $r = s$  при исследовании системы уравнений на эволюционность нельзя ограничиться рассмотрением одного только характеристического уравнения.

Заметим, что для определения скоростей распространения волн конечной длины в моделях обоих классов следует рассматривать полные дисперсионные уравнения.

**2. Применение «эволюционной» модели в задаче о развитии одномерных возмущений в плоском канале.** В случае  $r = s + 1$  возможны решения, в которых нарушены условия эволюционности. Соответствующие примеры приведены в работах [9, 10] для двухконстантной «контравариантной» модели Олдройда. При этом уравнения исходной модели не могут, вообще говоря, быть использованы для описания развития малых возмущений, так как верхняя граница скорости роста синусоидальных начальных возмущений для значений  $k$  из интервала  $(0, \infty)$  оказывается равной бесконечности.

Для того чтобы описать развитие малых возмущений в области неэволюционности исходных уравнений, следует учесть влияние дополнительных физических параметров. В реальной системе эти параметры могут быть весьма малыми, но играть определяющую роль в установлении для скорости нарастания возмущений конечной верхней границы.

В работе [9] рассматривалась нестационарная задача об одномерном течении в плоском канале  $0 < z < h$  двухконстантной «контравариантной» модели Олдройда

$$\mathbf{T} + \lambda D\mathbf{T}/Dt = 2\eta\mathbf{E} \quad (2.1)$$

Задача сводилась к отысканию решения линейного уравнения второго порядка относительно продольной скорости  $u$ , которое при отсутствии продольного градиента давления имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\tau_0 e^{-t/\lambda} + \eta/\lambda}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \tau_0 = \text{const} \quad (2.2)$$

Начальные и граничные условия для уравнения (2.2) формулировались в виде

$$u(z, 0) = u_0(z), \quad (\partial u / \partial t)_{t=0} = u_1(z), \quad u(0, t) = u(h, t) = 0 \quad (2.3)$$

Решение этой задачи строилось в виде бесконечного ряда

$$u(z, t) = F_1(t) \sin \alpha_1 z + F_2(t) \sin \alpha_2 z + \dots, \quad \alpha_k = k\pi/h \quad (2.4)$$

В случае, когда уравнение (2.2) принадлежит в момент времени  $t = 0$  к эллиптическому типу, ряд (2.4) может оказаться расходящимся при любом  $t > 0$  из интервала эллиптичности уравнения (2.2). Тем самым модель (2.1) становится непригодной для описания процесса развития малых возмущений.

Следует отметить, что при достаточно «хорошем» поведении функций  $u_0(z)$ ,  $u_1(z)$  их коэффициенты Фурье могут при  $k \rightarrow \infty$  так сильно убывать, что ряд (2.4) будет сходящимся. В этом случае исходная система уравнений может доставить некоторую информацию о развитии начальных возмущений. Подобный подход был использован Лайтхиллом [11], который рассматривал задачу с начальными данными для эллиптического уравнения. При этом скорость роста аналитического начального распределения, убывающего на бесконечности, была ограниченной вплоть до некоторого «критического» момента времени.

Задачу о течении в канале, сформулированную в [9], можно рассмотреть также для трехконстантной «контравариантной» модели Олдройда

$$\Gamma + \lambda \frac{DT}{Dt} = 2\eta \left( E + \theta \frac{DE}{Dt} \right) \quad (2.5)$$

В п. 1 было установлено, что уравнения гидродинамики модели (2.5) эволюционны. В связи с этим для модели (2.5) интересно рассмотреть указанную задачу в области эллиптичности уравнения (2.2) и исследовать поведение возмущений при  $\theta \rightarrow 0$ . В трехконстантной модели для продольной скорости  $u$  получим уравнение

$$\frac{\theta\eta}{\lambda\rho} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial z^2} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\tau_0 e^{-t/\lambda} + \eta/\lambda}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.6)$$

Начальные и граничные условия для уравнения (2.6) сохраним в прежнем виде (2.3). Решение задачи (2.3), (2.6) также представимо в форме ряда (2.4), однако поведение функций  $F_k(t)$  будет существенно отличаться от поведения аналогичных функций в двухконстантной модели. Не приводя здесь точных формул для  $F_k(t)$ , кратко отметим основные черты в поведении этих функций для моделей (2.1) и (2.5).

Если начальные возмущения  $u_0, u_1$  имеют вид простых гармоник  $\sin \alpha_k z$ , то в двухконстантной модели функции  $F_k(t)$  при  $k \rightarrow \infty$  ведут себя на интервале эллиптичности  $(0, t_*)$  уравнения (2.2) как  $\exp(\alpha_k f(t))$ . При этом  $f(t)$  — положительная функция, монотонно возрастающая на интервале  $(0, t_*)$ , и  $f(0) = 0$ . Таким образом, скорость роста синусоидальных возмущений неограниченно возрастает при стремлении длины волны к нулю.

В трехконстантной модели при тех же простых начальных возмущениях и фиксированной величине  $\theta$  функции  $F_k(t)$  будут убывать по абсолютной величине на интервале  $(0, t_*)$ , если  $k$  достаточно велико. Поэтому ультракоротковолновые возмущения не ответственны за основной механизм нарастания колебаний. В трехконстантной модели носителями этого механизма оказываются «средневолновые» возмущения. Длины волн таких возмущений лежат в интервале, границы которого зависят от  $\theta$ , причем при  $\theta > 0$  нижняя граница интервала строго положительна. В этом интервале существует «критическая» длина волны, также зависящая от  $\theta$ , для которой соответствующая функция  $F_k(t) \equiv F(t, \theta)$  имеет наибольшую скорость роста. При  $\theta \rightarrow 0$  критическая длина волны стремится к нулю, и наиболее «опасные» возмущения становятся все более коротковолновыми. Функция  $F(t, \theta)$  при  $\theta \rightarrow 0$  на интервале  $(0, t_*)$  ведет себя как  $\exp(\theta^{-1} \lambda g(t))$ , где  $g(t)$  — положительная, монотонно возрастающая на интервале  $(0, t_*)$  функция и  $g(0) = 0$ . Следовательно, в трехконстантной модели для скорости роста синусоидальных возмущений есть конечная верхняя граница. При  $\theta \rightarrow 0$  эта граница будет отодвигаться в бесконечность.

При  $t \rightarrow \infty$  возмущения в двух- и трехконстантной моделях будут затухать. В модели (2.1) затухание коротковолновых возмущений имеет колебательный характер, причем логарифмический декремент колебаний стремится к нулю при  $k \rightarrow \infty$ . В модели (2.5) волны «среднего» диапазона имеют характер затухающих колебаний при  $t \rightarrow \infty$ , а для «критической» длины волны декремент будет стремиться к постоянному значению при  $\theta \rightarrow 0$ . Затухание ультракоротких волн в модели (2.5) аperiодично.

Пример использования трехконстантной модели (2.5) с последующим предельным переходом  $\theta \rightarrow 0$  в области эволюционности модели (2.1) приведен в [10].

**3. Типы коротких волн в средах, обладающих мгновенной упругостью. Фазовые и групповые поляры.** Будем рассматривать среды, отвечающие уравнению состояния (1.3) для случая  $r = s + 1$ . Для таких сред, обладающих конечными скоростями распространения коротковолновых возмущений, установим возможные типы плоских коротких волн.

Рассматривая все величины в системе координат  $S$ , введенной в п. 1, найдем общее решение однородных систем линейных уравнений, образованных уравнениями (1.11) и одной из групп уравнений (1.12). Для «контравариантной» модели общее решение для амплитуд возмущений имеет вид

$$\begin{aligned} w_1 = 0, \quad q = 0, \quad \sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{12} = -\rho c w_2, \quad \sigma_{13} = -\rho c w_3 \\ \sigma_{22} = -2T_{12}w_2/c, \quad \sigma_{23} = -(T_{13}w_2 + T_{12}w_3)/c, \quad \sigma_{33} = -2T_{13}w_3/c \quad (3.1) \\ c = \pm [\rho^{-1} (T_{11} + \eta b/a)]^{1/2} \end{aligned}$$

В формулах (3.1) комплексные амплитуды  $w_2 = \alpha_2 + i\beta_2$ ,  $w_3 = \alpha_3 + i\beta_3$ , отвечающие компонентам скорости в поперечной волне, произвольны, а все остальные величины будут линейными комбинациями этих амплитуд.

Соотношения между параметрами короткой поперечной волны малой амплитуды могут быть получены из соотношений на тангенциальном разрыве, если считать интенсивность последнего бесконечно малой. Например, в случае «контравариантной» модели (2.1) формулы (3.1) получаются из соотношений на разрыве в одномерном течении, установленных в [8]. При этом в соотношениях на разрыве надо пренебречь квадратичными членами относительно величин скачков и заменить  $\{v_i\}$  на  $w_i$  и  $\{T_{ij}\}$  на  $\sigma_{ij}$ .

Соотношения (3.1) показывают, что в поперечной волне (1.8) вектор скорости  $\delta v$  будет эллиптически поляризованным. Параметры эллипса, описываемого концом вектора  $\delta v$ , и его ориентация зависят от комплексных амплитуд  $w_2$ ,  $w_3$ . Если выполнено условие  $\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 = 0$ , то оси эллипса будут совпадать с координатными осями  $x_2$ ,  $x_3$ . Линейная поляризация вектора  $\delta v$  получится в частном случае  $\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 = 0$ .

В случае «ковариантной» модели общее решение для амплитуд возмущений в быстрых волнах имеет вид

$$\begin{aligned} w_1 = w_2 = 0, \quad q = 2T_{13}w_3/c_+ \\ \sigma_{11} = 2T_{13}w_3/c_+, \quad \sigma_{13} = -\rho c_+ w_3 \quad (3.2) \\ \sigma_{12} = \sigma_{22} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0, \quad c_+ = \pm \rho^{-1/2} [\eta b/a - T_{33}]^{1/2} \end{aligned}$$

Общее решение для амплитуд возмущений в медленных волнах представимо в виде

$$\begin{aligned} w_1 = w_3 = 0, \quad q = 2T_{12}w_2/c_- \\ \sigma_{11} = 2T_{12}w_2/c_-, \quad \sigma_{12} = -\rho c_- w_2 \quad (3.3) \\ \sigma_{13} = \sigma_{22} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0, \quad c_- = \pm \rho^{-1/2} [\eta b/a - T_{22}]^{1/2} \end{aligned}$$

Из соотношений (3.2), (3.3) следует, что в соответствующих волнах вектор  $\delta v$  линейно поляризован. При этом плоскость колебаний этого вектора не может быть произвольной, как в случае «контравариантной» модели. В быстрой волне это будет координатная плоскость  $x_1x_3$ , в медленной волне — координатная плоскость  $x_1x_2$ . В «ковариантной» модели сложение двух взаимно перпендикулярных колебаний не приведет к эллиптической поляризации из-за разных скоростей распространения складываемых волн<sup>1</sup>. В этой модели начальное синусоидальное возмущение,

<sup>1</sup> Исключениями из этого правила будут случаи, когда направление оси  $x_1$  таково, что  $T_{22} = T_{33}$ , т. е.  $c_- = c_+$ . Для произвольного тензора  $T$  при  $T_1 > T_2 > T_3$  всегда существуют два таких направления. (В кристаллооптике аналогичные направления определяют главные оси биаксиального кристалла).

для которого вектор  $\delta v$  произвольно направлен в плоскости  $x_2x_3$ , распадается на линейно поляризованные волны, распространяющиеся в направлениях  $\pm x_1$ . При этом составляющие вектора  $\delta v$  по направлениям  $x_2, x_3$  будут распространяться с различными скоростями.

Для модели с производной Яуманна — Де Уитта соотношения между амплитудами в быстрых волнах следующие:

$$\begin{aligned} w_1 = w_2 = 0, \quad q = T_{13}w_{13}/c_+ \\ \sigma_{11} = T_{13}w_3/c_+, \quad \sigma_{13} = -\rho c_+ w_3, \quad \sigma_{23} = -^{1/2}T_{12}w_3/c_+, \quad \sigma_{33} = -\sigma_{11} \\ \sigma_{12} = \sigma_{22} = 0, \quad c_+ = \rho^{-1/2} [^{1/2}(T_{11} - T_{33}) + \eta b/a]^{1/2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Для медленных волн в этой же модели получим

$$\begin{aligned} w_1 = w_3 = 0, \quad q = T_{12}w_2/c_- \\ \sigma_{11} = T_{12}w_2/c_-, \quad \sigma_{12} = -\rho c_- w_2, \quad \sigma_{22} = -\sigma_{11}, \quad \sigma_{23} = -^{1/2}T_{13}w_2/c_- \\ \sigma_{13} = \sigma_{33} = 0, \quad c_- = \pm \rho^{-1/2} [^{1/2}(T_{11} - T_{22}) + \eta b/a]^{1/2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Следствия соотношений (3.4) и (3.5) касающиеся поляризации волн, вполне аналогичны тем, которые имеют место для «ковариантной» модели.

Отметим, что в волнах, соответствующих «яуманновской» модели, тензор  $\delta T$  будет девиатором<sup>1</sup>.

Перейдем теперь к вопросу о распространении трехмерных коротковолновых возмущений. Пусть начальное условие для возмущения некоторой гидродинамической функции представляет собой волновой пакет, скомбинированный из коротковолновых гармоник, которые имеют одинаковую длину волны и зависят от всевозможных направлений. Тогда начальное распределение можно представить в виде

$$U(\mathbf{x}, 0) = \operatorname{Re} \left\{ \iint_{|\mathbf{n}|=1} \exp(ik\mathbf{n}\mathbf{x}) L(\varphi, \vartheta) \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \right\} \quad (3.6)$$

Здесь интеграл взят по единичной сфере  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $L(\varphi, \vartheta)$  — спектральная функция. Представление (3.6) следует из разложения возмущения данного типа в трехмерный интеграл Фурье. Развитие начального возмущения (3.6) во времени будет происходить в соответствии с формулой

$$U(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re} \left\{ \iint_{|\mathbf{n}|=1} \exp(ik[\mathbf{n}\mathbf{x} - (v_n + c(\mathbf{n}))t]) L(\varphi, \vartheta) \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \right\}$$

При распространении такого возмущения анизотропия звука будет влиять на геометрию волнового фронта.

Введем декартову систему координат с началом в исследуемой точке  $\mathbf{x}_0$ , движущуюся с невозмущенной скоростью  $v(\mathbf{x}_0)$ . Координатные оси этой системы  $R$  направим по главным осям невозмущенного тензора  $T$ . Пусть  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор произвольной точки относительно начала системы  $R$ . Поверхность, определяемая векторным уравнением  $\mathbf{r} = c(\mathbf{n})\mathbf{n}$ ,

<sup>1</sup> В том случае, когда в модели (1.3) вместо оператора (1.5) используется оператор Уильямса — Бирда [5], тензор  $\delta T$  также будет девиатором. При этом условие эволюционности модели (1.3) для случая  $r = s + 1$  имеет вид (1.13).

где параметр  $n$  пробегает единичную сферу, представляет собой фазовую поляру. В «контравариантной» модели фазовая поляра получается преобразованием инверсии относительно сферы с центром в точке  $x_0$  из эллипсоида с тем же центром, для которого система  $R$  оказывается системой главных осей.

Предположим, что начальное распределение  $U(x, 0)$  имеет особенность в точке  $x = x_0$ . В момент времени  $t$  «вклад» этой особенности в элементарную плоскую волну, фронт которой распространяется в направлении  $n$ , будет сосредоточен на плоскости, ортогональной вектору  $n$  и проходящей через конец вектора  $x_0 + (v + cn)t$ . Такие плоскости, построенные для всевозможных направлений  $n$ , образуют двухпараметрическое семейство. Огибающая этого семейства будет поверхностью волнового фронта, несущей на себе особенность.

В «контравариантной» модели волновой фронт будет эллипсоидом, для которого система  $R$  совпадает с системой главных осей. Величины полуосей этого эллипсоида в момент  $t = 1$  равны скоростям звука в главных направлениях тензора  $T$ . Волновой фронт при  $t = 1$  представляет собой групповую поляру, образованную концами векторов групповой скорости  $V = \partial\omega/\partial k$ . Относительная групповая скорость в системе координат  $R$  равна

$$V = \left[ \rho \left( T_1 n_1^2 + T_2 n_2^2 + T_3 n_3^2 + \eta \frac{b}{a} \right) \right]^{-1/2} \sum_{i=1}^3 \left( T_i + \eta \frac{b}{a} \right) n_i e_i$$

Здесь единичные векторы  $e_i$  образуют базис системы  $R$ ,  $n_i$  — компоненты вектора  $n$  в этом базисе. Групповая и фазовая скорости совпадают только для главных направлений тензора  $T$ , и групповая поляра заключена внутри фазовой.

Для «ковариантной» и «яуманновской» моделей существуют два типа фазовых и групповых поляр: быстрые и медленные. Аналогичное разделение поляр имеет место в магнитной гидродинамике [12]. Геометрия волновых фронтов для моделей, содержащих дифференциальные операторы (1.6), (1.7) в общем случае сложнее, чем в «контравариантной» модели.

Если тензор  $T$  плоский, вектор  $\partial v$  лежит в той же плоскости, и в ней же распространяются двумерные возмущения, то геометрия волновых фронтов будет сходной для всех трех моделей с производными (1.5) — (1.7). В этом случае одно из главных значений тензора  $T$  равно нулю. Волновые фронты, исходящие из точки, для всех трех моделей будут эллипсами, главные оси которых параллельны главным направлениям тензора  $T$ , лежащим в указанной плоскости. При этом в «ковариантной» и «яуманновской» моделях волновой фронт при  $t = 1$  совпадает с медленной групповой полярой, если  $T_3 = 0$ , и с быстрой групповой полярой, если  $T_1 = 0$ . В случае  $T_2 = 0$  волновой фронт при  $t = 1$  оказывается составленным из кусков быстрой и медленной поляр. Такое строение волновых фронтов в моделях с производными (1.6), (1.7) обусловлено перпендикулярной поляризацией быстрых и медленных волн.

Отметим, что ортогональность векторов  $\partial v_{+,-}$  в быстрой и медленной волнах, фронты которых распространяются в одном направлении, характерна и для других типов сплошных сред, обладающих анизотропией. Это явление имеет место при распространении магнитозвуковых волн [13], а также при распространении упругих волн в кристаллах [14].

В свете изложенного рассмотрим вопрос о существовании характеристик в двумерном стационарном течении с плоским тензором  $\mathbf{T}$  для случая двухконстантной модели жидкости. Для определенности рассмотрим «контравариантную» модель (2.1). Рассмотрение других моделей с одним временем релаксации проводится аналогично.

Пусть течение происходит в плоскости  $xy$ , причем  $T_{xz} = T_{yz} = T_{zz} = 0$ ,  $v_z = 0$ , и все остальные параметры течения зависят только от  $x$  и  $y$ . Если ввести неизвестную вектор-функцию  $\mathbf{f} = (v_x, v_y, p, T_{xx}, T_{xy}, T_{yy})$ , то полную систему уравнений гидродинамики модели (2.1) можно записать в виде квазилинейного дифференциального уравнения

$$A(\mathbf{f}) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + B(\mathbf{f}) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} + g(\mathbf{f}) = 0$$

где  $A$  и  $B$  — квадратные матрицы шестого порядка. Если характеристика системы  $y(x)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению  $dy/dx = \tau(x, y)$ , то  $\tau$  будет корнем характеристического уравнения

$$\det \|B - \tau A\| = 0$$

Корни последнего уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \tau_{1,2} &= v_y/v_x, & \tau_{3,4} &= \pm i \\ \tau_{5,6} &= (-T_{xy}/\rho + v_x v_y \pm \sqrt{\xi})(v_x^2 - (T_{xx} + \eta/\lambda)/\rho)^{-1} \\ \xi &= c_1^2 c_2^2 (v_1^2/c_1^2 + v_2^2/c_2^2 - 1) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь  $v_1, v_2$  — компоненты вектора скорости в системе главных осей тензора  $\mathbf{T}$ ,  $c_1, c_2$  — величины скоростей звука в направлениях главных осей. Вещественные характеристики, отличные от линий тока, будут существовать только при условии  $\xi \geq 0$ .

Этому факту можно дать следующее истолкование. В стационарном течении нетривиальные характеристики, проходящие через точку  $x_0$ , представляют собой волновые фронты возмущений, исходящих от движущейся частицы, совпадающей при  $t = 0$  с точкой  $x_0$ . Эти стационарные волновые фронты будут огибающими семейства элементарных волновых фронтов, представляющих собой эллипсы с центрами в точках  $x_0 + v(x_0)t$ . Все такие эллипсы подобны, и их главные оси параллельны главным направлениям тензора  $\mathbf{T}(x_0)$ . С течением времени элементарные волновые фронты расширяются, и при  $t = 1$  такой волновой фронт будет совпадать с групповой полярой.

Ясно, что данное семейство эллипсов имеет огибающую только в том случае, когда из точки  $x_0$  можно провести касательную к групповой поляре с центром в точке  $x_0 + v(x_0)$ , т. е. когда точка  $x_0$  не находится внутри групповой поляры. Последнее означает, что в точке  $x_0$  величина  $\xi$  неотрицательна, и характеристические корни  $\tau_{5,6}$ , определяемые формулами (3.7), будут вещественными.

Рассмотренная ситуация аналогична той, которая имеет место в обычной газовой динамике, где отличные от линий тока характеристики установившегося двумерного течения существуют только в сверхзвуковых областях.

Заметим, что система уравнений плоского течения модели (2.1) с плоским тензором  $\mathbf{T}$  не становится гиперболической даже в случае сверхзвукового течения из-за наличия мнимых характеристических корней  $\tau_{3,4}$ .

4. Отражение и преломление высокочастотной поперечной волны, падающей из вязко-упругой жидкости на упругую стенку. Нетрудно предвидеть, что явление анизотропии звука в вязко-упругой жидкости, обладающей мгновенной упругостью, должно сказаться на характере отражения и преломления волн на границе такой жидкости с другими средами.

Пусть, например, несжимаемая жидкость, соответствующая «контравариантной» модели (2.1), и классическое линейно упругое тело разделены плоской границей  $G$ . Примем за положительное направление нормали  $\nu$  к границе раздела сред направление из жидкости в твердое тело.

Величины, относящиеся к упругой среде, будем отмечать штрихом. Для упругого тела примем классическое уравнение состояния

$$P_{ij}' = \kappa' \operatorname{div} u' \delta_{ij} + 2\mu' \varepsilon_{ij}' \quad (4.1)$$

Соотношения (4.1) записаны в декартовых координатах. Здесь  $P_{ij}'$  — компоненты тензора напряжений,  $u'$  — вектор перемещения,  $\kappa'$  и  $\mu'$  — константы Ламе,  $\varepsilon_{ij}'$  — компоненты тензора бесконечно малых деформаций.

Пусть имеется некоторое совместное движение сред (2.1), (4.1), при котором граница раздела  $G$  является контактной поверхностью. Тогда параметры этого движения в точках поверхности  $G$  должны удовлетворять законам сохранения массы, импульса и энергии

$$v_\nu = v_\nu' = 0, \quad p_\nu = p_\nu', \quad p_\nu v = p_\nu' v' \quad (4.2)$$

Последнее из соотношений (4.2) записано в пренебрежении теплопроводностью сред. В (4.2)  $p_\nu$  и  $p_\nu'$  — векторы напряжения на контактной поверхности для каждой из сред.

Предположим, что в среде (2.1) возбуждаются коротковолновые возмущения. Так как эти возмущения распространяются с конечной скоростью, то они будут высокочастотными. Поскольку декремент колебаний в олдرويدской жидкости (2.1) стремится к нулю при  $k \rightarrow \infty$ , то для достаточно коротких волн можно пренебречь затуханием на протяжении заданного интервала времени. Поэтому малые возмущения параметров обеих сред можно считать одинаковыми синусоидальными функциями времени в точках границы раздела.

Волны, распространяющиеся в жидкости, достигнув границы раздела, будут отражаться от нее и возбуждать волны в упругом теле. Подчеркнем, что все дальнейшие результаты будут иметь локальный характер и область их применимости будет ограничена достаточно малой окрестностью произвольной точки поверхности раздела сред.

В окрестности произвольной точки  $x_0 \in G$  будем для возмущений искать решения в виде <sup>1</sup>

$$(\delta v_i, \delta p, \delta T_{ij}) = \operatorname{Re} [(w_i, q, \sigma_{ij}) e^{i(kx - \omega t)}], \quad (x - x_0) \nu < 0$$

$$(\delta v_i'', \delta p'', \delta T_{ij}'') = \operatorname{Re} [(w_i'', q'', \sigma_{ij}'') e^{i(k''x - \omega t)}], \quad (x - x_0) \nu < 0$$

$$(\delta v_i', \delta P_{ij}') = \operatorname{Re} [(w_i', \sigma_{ij}') e^{i(k'x - \omega t)}], \quad (x - x_0) \nu > 0$$

Здесь двумя штрихами отмечены параметры отраженной волны. Будем предполагать, что граница раздела сред останется контактной поверхностью в возмущенном движении. Используя законы сохранения (4.2), придем к следующим граничным ус\_

<sup>1</sup> Здесь рассматривается случай, когда в упругом теле нет продольной преломленной волны

ловиям, которым должны удовлетворять возмущения в точках плоскости  $G$

$$\begin{aligned} \delta v_\nu + \delta v_\nu'' = \delta v_\nu' = 0, \quad \delta T_{\nu i} + \delta T_{\nu i}'' = \delta P_{\nu i}' \\ (\delta T_{\nu i} + \delta T_{\nu i}'') (\delta v_i + \delta v_i'') = \delta P_{\nu i}' \delta v_i' \end{aligned} \quad (4.3)$$

В (4.3) использовано то обстоятельство, что возмущение давления в волне, соответствующей «контравариантной» модели, равно нулю. Из (4.3) следует, что в точках  $\mathbf{x} \in G$  должны совпадать эйконалы падающей, отраженной и преломленной волн, т. е.

$$\mathbf{k}\mathbf{x} = \mathbf{k}''\mathbf{x} = \mathbf{k}'\mathbf{x}$$

Последнее условие означает, что векторы  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k}''$ ,  $\mathbf{k}'$  и  $\boldsymbol{\nu}$  лежат в одной плоскости, и приводится к виду

$$k \sin\psi = k'' \sin\psi'' = k' \sin\psi' \quad (4.4)$$

Здесь  $\psi$ ,  $\psi'$  — углы между векторами  $\mathbf{k}$ ,  $\boldsymbol{\nu}$  и  $\mathbf{k}'$ ,  $\boldsymbol{\nu}$  соответственно;  $\psi''$  — угол между векторами  $\mathbf{k}''$ ,  $-\boldsymbol{\nu}$ .

Для фазовых скоростей распространения волн имеют место формулы

$$c = \left[ \frac{1}{\rho} (T_{nn} + \mu) \right]^{1/2}, \quad c'' = \left[ \frac{1}{\rho} (T_{n''n''} + \mu) \right]^{1/2}, \quad c' = \left( \frac{\mu'}{\rho'} \right)^{1/2}$$

Здесь  $T_{nn}$  и  $T_{n''n''}$  — нормальные «вязко-упругие» напряжения невозмущенного течения на площадках, ортогональных единичным векторам  $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$  и  $\mathbf{n}'' = \mathbf{k}''/k''$  соответственно,  $\mu = \eta/\lambda$ . Величина  $c'$  равна скорости сдвиговых упругих волн.

В случае, когда в невозмущенном течении имеет место прилипание жидкости к неподвижной упругой стенке, получим законы отражения и преломления в виде

$$\sin\psi/\sin\psi'' = c/c'', \quad \sin\psi/\sin\psi' = c/c' \quad (4.5)$$

Введем вспомогательную декартову систему координат  $K$  с началом в исследуемой точке  $\mathbf{x}_0 \in G$ . Координаты произвольной точки в системе  $K$  обозначим через  $x_i^*$ . Оси  $x_1^*$ ,  $x_2^*$  системы  $K$  направим вдоль пары взаимно ортогональных единичных векторов, которые реализуют экстремумы квадратичной формы  $T_{ij}n_i n_j$  на пересечении плоскости векторов  $\mathbf{k}$  и  $\boldsymbol{\nu}$  с единичной сферой  $|\mathbf{n}| = 1$ . Обозначим через  $T_1^*$ ,  $T_2^*$  нормальные «вязко-упругие» напряжения на координатных площадках  $x_2^*x_3^*$  и  $x_1^*x_3^*$  соответственно. Без ограничения общности можно считать  $T_1^* \geq T_2^*$ . Обозначим через  $\chi$  угол между вектором  $\boldsymbol{\nu}$  и положительным направлением оси  $x_1^*$ . Тогда соотношения (4.5) можно привести к виду

$$\begin{aligned} \frac{\sin\psi}{\sin\psi''} &= \left( \frac{T_1^* \cos^2(\chi - \psi) + T_2^* \sin^2(\chi - \psi) + \mu}{T_1^* \cos^2(\chi + \psi) + T_2^* \sin^2(\chi + \psi) + \mu} \right)^{1/2} \\ \frac{\sin\psi}{\sin\psi'} &= \left( \frac{\rho'}{\rho} \right)^{1/2} \left( \frac{T_1^* \cos^2(\chi - \psi) + T_2^* \sin^2(\chi - \psi) + \mu}{\mu'} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Легко видеть, что в общем случае первое из равенств (4.6) не будет выполнено при  $\psi'' = \psi$ . Этот эффект обусловлен анизотропией звука в олдройдовской среде (2.1). В линейной максвелловской жидкости  $c'' = c$  и  $\psi'' = \psi$ . Очевидно, что форма закона отражения не зависит от свойств второй среды, с которой граничит жидкость.

Для определения угла  $\psi''$  придем к квадратному уравнению относительно  $z = \text{ctg}\psi''$ , корни которого равны

$$z_1 = -\text{ctg}\psi, \quad z_2 = \text{ctg}\psi + \frac{(T_1^* - T_2^*) \sin 2\chi}{T_1^* \cos^2\chi + T_2^* \sin^2\chi + \mu}$$

Первый корень  $z_1$  должен быть отброшен, так как он приводит к исходной падающей волне. Второй корень  $z_2$  определяет направление распространения фронта отраженной волны. Положительное направление  $x_1^*$  можно выбрать так, чтобы угол  $\chi$  менялся в пределах  $0 \leq \chi < \pi$ . Тогда при  $\chi = 0$ ,  $\chi = 1/2\pi$  будет выполнено равенство  $\psi'' = \psi$ , т. е. для нормалей к волновым фронтам будет иметь место классический закон отражения. При  $0 < \chi < 1/2\pi$  будет выполнено неравенство  $\psi'' < \psi$ , а при  $1/2\pi < \chi < \pi$  — неравенство  $\psi'' > \psi$ .

В анизотропной среде волновое возбуждение, образованное из гармоник, волновые векторы которых имеют бесконечно близкие направления, будет распространяться с групповой скоростью  $V(\mathbf{n})$ . Единичный вектор  $\mathbf{l} = V/V$  будем, как обычно, называть направляющим вектором луча.

В системе  $R$  главных осей тензора  $\mathbf{T}$  единичные векторы нормали к фронту плоской волны и соответствующего луча имеют вид

$$\mathbf{n} = \sum_{i=1}^3 n_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{l} = \left( \sum_{i=1}^3 c_i^2 n_i \mathbf{e}_i \right) \left( \sum_{i=1}^3 c_i^4 n_i^2 \right)^{-1/2}$$

Здесь  $c_i^2$  — квадраты скоростей звука в главных направлениях. Векторы  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{v}$  в общем случае не компланарны. Эти три вектора будут компланарны только при условии

$$(c_1^2 - c_2^2)v_3 n_1 n_2 + (c_2^2 - c_3^2)v_1 n_2 n_3 + (c_3^2 - c_1^2)v_2 n_3 n_1 = 0 \quad (4.7)$$

В общем случае уравнение (4.7) определяет конус направлений  $\mathbf{n}$ . В том случае, когда вектор  $\mathbf{v}$  лежит в одной из главных плоскостей тензора  $\mathbf{T}$ , а также в случае совпадения двух главных скоростей звука, уравнение (4.7) определяет две взаимно ортогональные плоскости направлений  $\mathbf{n}$ , пересекающиеся по вектору  $\mathbf{v}$ . При этом одна из плоскостей будет главной плоскостью тензора  $\mathbf{T}$ .

Направления единичных векторов нормали к фронту отраженной волны и отраженного луча определяются формулами

$$\mathbf{n}'' = \frac{\sin \psi''}{\sin \psi} \mathbf{n} - \frac{\sin(\psi + \psi'')}{\sin \psi} \mathbf{v}, \quad \mathbf{l}'' = \left( \sum_{i=1}^3 c_i^2 n_i'' \mathbf{e}_i \right) \left( \sum_{i=1}^3 c_i^4 n_i''^2 \right)^{-1/2}$$

В отличие от векторов  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n}''$ ,  $\mathbf{v}$ , которые всегда компланарны, векторы  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{l}''$ ,  $\mathbf{v}$  будут лежать в одной плоскости только в том случае, когда

$$c_1^2 (c_2^2 - c_3^2)v_2 v_3 n_1 + c_2^2 (c_3^2 - c_1^2)v_3 v_1 n_2 + c_3^2 (c_1^2 - c_2^2)v_1 v_2 n_3 = 0 \quad (4.8)$$

Последнее уравнение определяет плоскость направлений  $\mathbf{n}$ . В случае, когда  $\mathbf{v}$  лежит в главной плоскости, плоскость (4.8) совпадает с этой главной плоскостью. Если вектор  $\mathbf{v}$  ориентирован по одному из главных направлений тензора  $\mathbf{T}$ , уравнение (4.8) удовлетворяется тождественно для любого  $\mathbf{n}$ .

Если векторы  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{n}$  оба лежат в одной главной плоскости, то все пять векторов  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n}''$ ,  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{l}''$  будут лежать в той же плоскости. Если  $\mathbf{v}$  не лежит в главной плоскости, указанные пять векторов компланарны только при  $\mathbf{n} = \mathbf{v}$ .

Для лучей, как и для волновых векторов, классический закон отражения несправедлив. В частности, луч, падающий нормально к границе раздела, может отражаться под углом к нормали.

В дальнейшем будем рассматривать случай, когда в невозмущенном течении поверхность  $G$  покоится и на этой поверхности отсутствуют касательные напряжения. Тогда направление  $\mathbf{v}$  будет главным для тензора  $\mathbf{T}(\mathbf{x}_0)$ . В этом случае  $\psi = \psi''$ . Углы падающего и отраженного лучей с нормалью к границе раздела также будут равны.

Координатную ось  $x_1^*$  системы  $K$  можно считать в этом случае направленной по вектору  $\mathbf{v}$ . При этом, очевидно, неравенство  $T_1^* \geq T_2^*$  может не выполняться. Из урав-

нений состояния (2.1), (4.1) и из соотношений (4.3) следует  $w_y = w_y'' = w_y' = 0$ . Отсюда и из условия поперечности волн следует, что возмущения скорости в падающей, отраженной и преломленной волнах коллинеарны оси  $x_3^*$  системы  $\{K\}$ . Поэтому все три волны будут волнами горизонтального сдвига.

Обозначим амплитуды возмущений скорости в падающей, [отраженной и преломленной волнах через  $w = w_3^*$ ,  $w' = w_3'^*$ ,  $w'' = w_3''^*$  соответственно. Из законов сохранения импульса и энергии следует соотношение

$$(w + w'' - w') [(w - w'')T_1^* \cos\psi + (w + w'')T_2^* \sin\psi] = 0 \quad (4.9)$$

Приравнявая нулю первый сомножитель в (4.9) и используя закон сохранения импульса и выражения амплитуд напряжений через амплитуды скоростей, следующие из уравнений (2.1), (4.1), определим коэффициент прозрачности  $\gamma = w'/w$  и коэффициент отражения  $\varepsilon = w''/w = \gamma - 1$ .

Выражение для коэффициента прозрачности имеет вид

$$\gamma = \frac{2c_1^{*2}}{c_1^{*2} - (c_2^{*2} - c_0^2)\zeta + c' [c_1^{*2} + (c_2^{*2} - c'^2)\zeta^2]^{1/2} \rho'/\rho}, \quad \zeta = \operatorname{tg} \psi \quad (4.10)$$

При достаточно малых временах релаксации  $\lambda$  можно считать выполненными неравенства

$$c_1^* = [(T_1^* + \mu)/\rho]^{1/2} > c', \quad c_2^* = [(T_2^* + \mu)/\rho]^{1/2} > c', \quad c_0 = (\mu/\rho)^{1/2} = c' \quad (4.11)$$

Семейство кривых  $\gamma(\zeta)$  при различных значениях параметра  $c_2^*$  для случая  $c_1^* = c_0$  схематически изображено на фиг. 1. Стрелками указано направление роста  $c_2^*$ . Пунктирная кривая соответствует линейной максвелловской среде. При  $c' < c_2^* < c_0$  функция  $\gamma(\zeta)$  монотонно убывает с увеличением  $\zeta$  от 0 до  $\infty$ . В случае  $c_0 < c_2^* < c_*$  функция  $\gamma(\zeta)$  имеет максимум в точке  $\zeta = \zeta_*$ . При этом для величин  $c_2^*$  и  $\zeta_*^2$  справедливы следующие формулы

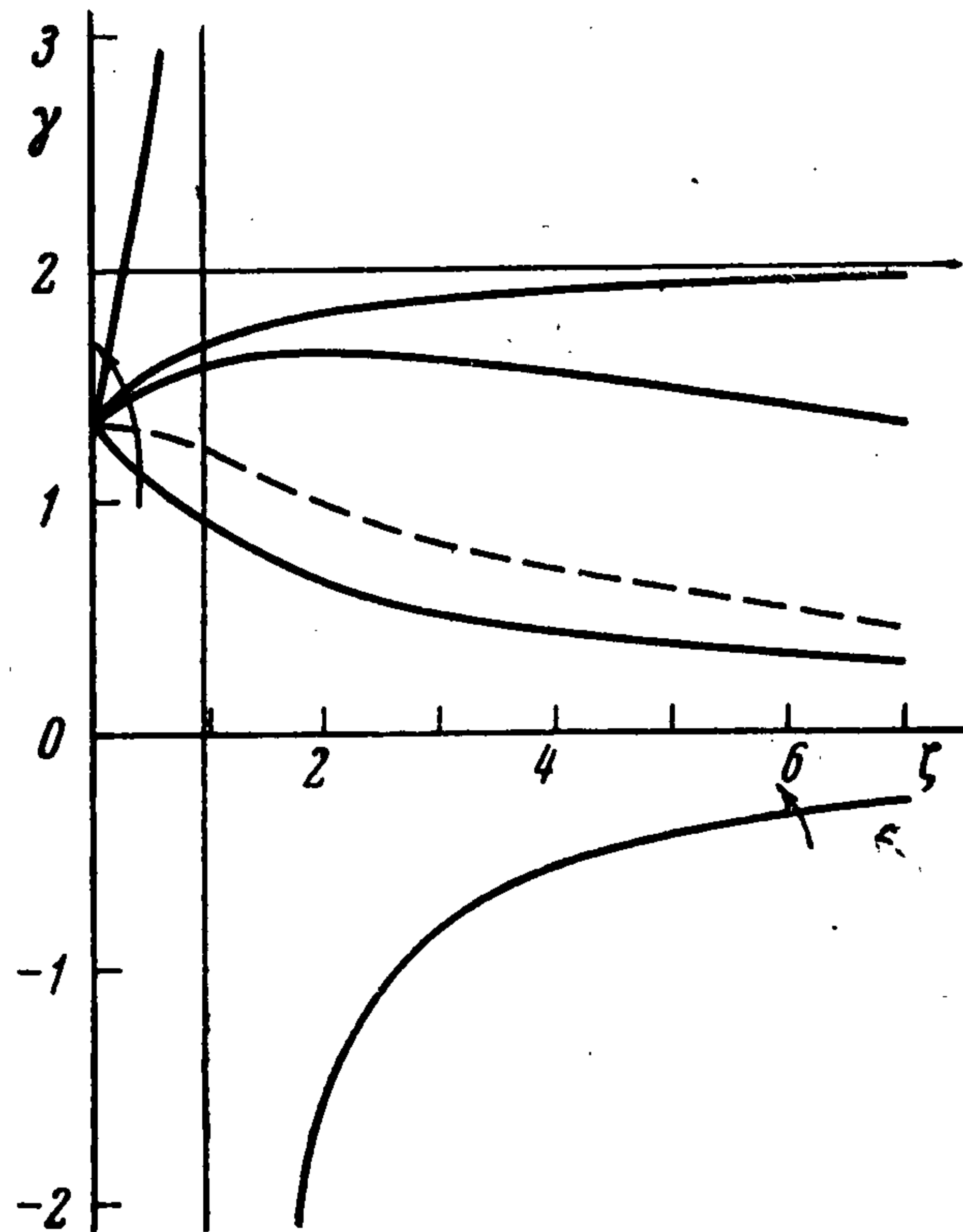
$$c_*^2 = c_0^2 + \frac{\rho'^2}{\rho^2} \frac{c'^2}{2} + \frac{\rho'}{\rho} c' (c_0^2 - 3/4 c'^2)^{1/2}$$

$$\zeta_*^2 = \frac{(c_2^{*2} - c_0^2)^2 c_1^{*2}}{(c_2^{*2} - c'^2) [c'^2 (c_2^{*2} - c'^2) \rho'^2/\rho^2 - (c_2^{*2} - c_0^2)^2]}$$

При изменении  $\zeta_*$  от 0 до  $\infty$  значения  $\gamma(\zeta_*)$  пробегают интервал  $(\gamma(0), 2)$ . При  $c_2^* = c_*$  функция  $\gamma(\zeta)$  монотонна, и  $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \gamma(\zeta) = 2$ . В случае  $c_* < c_2^* < \infty$  распределение  $\gamma(\zeta)$  имеет сингулярность в точке  $\zeta = \zeta_0$ , где

$$\zeta_0 = \frac{c_1^* (c_1^{*2} - c'^2 \rho'^2/\rho^2)}{c_1^* (c_2^{*2} - c_0^2) - c' [(c_2^{*2} - c_0^2)^2 + (c_2^{*2} - c'^2) (c_1^{*2} - c'^2 \rho'^2/\rho^2)]^{1/2} \rho'/\rho}$$

При переходе через точку  $\zeta_0$  функция  $\gamma(\zeta)$  меняет знак с  $+\infty$  на  $-\infty$ . Для угла  $\psi_0 = \operatorname{arctg} \zeta_0$  коэффициенты прозрачности и отражения обращаются в бесконечность. Можно предполагать, что для углов  $\psi \approx \psi_0$  становятся существенными нелинейные эффекты, для описания которых линеаризованная теория малых возмущений непригодна.



Заметим, что при нарушении второго из неравенств (4.11) существует угол полного внутреннего отражения  $\psi_+$ , определяемый формулой

$$\psi_+ = \arcsin [c_1^* (c'^2 - c_2^{*2} + c_1^{*2})^{-1/2}]$$

При  $\psi > \psi_+$  будет происходить поглощение волн в упругом теле, причем сдвиговые упругие волны будут распространяться параллельно границе раздела сред.

Обращение в нуль второго сомножителя в выражении (4.9) соответствует случаю  $\omega' = 0$ ,  $\sigma'_{vi} = 0$ . Так как возмущения напряжений равны нулю на площадке, совпадающей с границей раздела, то указанный случай реализуется также при контакте жидкости с идеальным газом или вакуумом. Для коэффициента отражения  $\varepsilon$  получим формулу

$$\varepsilon = \frac{c_1^{*2} - (c_2^{*2} - c_0^2) \zeta}{c_1^{*2} + (c_2^{*2} - c_0^2) \zeta}$$

В линейной максвелловской жидкости функция  $\varepsilon(\zeta) \equiv 1$ . Эффект анизотропии звука наиболее резко выражен для наклонных лучей.

Автор благодарит Л. И. Седова за обсуждение ряда затронутых в статье вопросов, Г. А. Любимова и С. А. Регирера за постоянное внимание к работе и В. М. Ентова, обратившего внимание автора на работу [11].

Поступила 14 VIII 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бленд Д. Теория линейной вязко-упругости. М., «Мир», 1965.
2. Kolsky H. Stress waves in solids. J. Sound and Vibrat., 1964, vol. 1, No. 1.
3. Oldroyd J. G. On the formulation of rheological equations of state. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1950, vol. 200, No. 1063, p. 523.
4. De Witt T. W. A rheological equation of state which predicts non-Newtonian viscosity, normal stresses and dynamic moduli. J. Appl. Phys., 1955, vol. 26, No. 7.
5. Spriggs T. W., Bird R. B. Some nonlinear viscoelastic models with inclusion of results from molecular theory. Industr. and Engng Chem. Fundamentals, 1965, vol. 4, No. 2.
6. Леонов А. И., Малкин А. Я. Об эффекте нормальных напряжений в установившихся одномерных течениях расплавов полимеров. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 3.
7. Брушлинский К. В., Морозов А. И. Об эволюционности уравнений магнитной гидродинамики с учетом эффекта Холла. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.
8. Руткевич И. М. Некоторые общие свойства уравнений динамики вязко-упругой несжимаемой жидкости. ПММ, 1969, т. 33, вып. 1.
9. Регирер С. А., Руткевич И. М. Некоторые особенности уравнений гидродинамики неьютоновских сред. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.
10. Руткевич И. М. Стационарное течение вязко-упругой жидкости в канале с проницаемыми стенками. ПММ, 1969, т. 33, вып. 3.
11. Lighthill M. J. Some special cases treated by the Whitham theory. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1967, vol. 299, No. 1456.
12. Grad H. Reducible problems in magneto-fluid dynamic steady flows. Rev. mod. Phys., 1960, vol. 32, No. 4.
13. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. М., Физматгиз, 1962.
14. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М., Физматгиз, 1965.