

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В ТРЕХМЕРНОМ СЛУЧАЕ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ПРОБЛЕМЕ ФОРМИРОВАНИЯ ИНТЕНСИВНЫХ ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

В. А. Сыровой

(Москва)

Гидродинамическая теория интенсивных пучков заряженных частиц представляет собой один из разделов механики сплошной среды. Однако в отличие от гидродинамики, например, задача в этом случае не может считаться окончательно решенной, когда проинтегрированы уравнения пучка, включающие уравнения Максвелла и уравнения движения заряда в самосогласованном поле. В рамках обычной постановки (обратная задача) решение определяет течение в полупространстве, ограниченном бесконечной эмиттирующей поверхностью, в то время как реальные пучки имеют конечные размеры. Для реализации течения в ограниченной по поперечным координатам области необходимо найти электростатическое лапласовское поле, эквивалентное отбрасываемой части потока и непрерывно сопрягающееся с решением уравнений пучка на границе. Эта задача носит название проблемы формирования или электростатической фокусировки, а ее математическим выражением является задача Коши для уравнения Лапласа. Ниже рассмотрены трехмерные задачи о формировании в случае цилиндрических и аксиально симметричных областей, занятых зарядами. Приведено решение для периодической фокусировки цилиндрического пучка с произвольным сечением и для формирования эллиптического пучка с периодической вариацией  $z$ -компоненты скорости; в замкнутой форме дано выражение для потенциала вне цилиндрического пучка с произвольным сечением при эмиссии, ограниченной пространственным зарядом.

Проблема формирования интенсивных пучков заряженных частиц в математической постановке сводится к задаче Коши для уравнения Лапласа. Исследованию двумерных конфигураций посвящены работы [1,2], причем в первой из них использовался метод разделения переменных и решение представлялось в виде интеграла по контуру в комплексной плоскости параметра  $p$ , а во второй аналитическое продолжение уравнения Лапласа позволяло построить выражение для потенциала по методу Римана.

В [3] при рассмотрении трехмерных задач решение отыскивалось в системе координат  $x^i$ , связанной с поверхностью пучка  $x^1 = 0$ , в виде ряда по степеням  $x^1$  с коэффициентами, зависящими от  $x^2, x^3$ . Этот способ пригоден для получения решения в достаточной близости от границы (критерием пригодности является величина невязки) в случае, когда условия Коши заданы регулярными функциями. Таким образом, из рассмотрения исключаются потоки, в которых скорость где-либо исчезает при не равной нулю плотности тока, и, в частности, течения, берущие начало с эмиттирующей поверхности (потенциал вблизи нее при эмиссии, ограниченной пространственным зарядом, меняется как  $z^{4/3}$ ).

Существует, по-видимому, единственная попытка [4] определения формирующих электродов для цилиндрического пучка с эллиптическим сечением, условия Коши для которого соответствуют течению в плоском диоде:  $\varphi = z^{4/3}$ ,  $\partial\varphi / \partial n = 0$ . Однако результаты и предложенный приближенный метод расчета эквипотенциальных поверхностей основываются на неверном предположении о независимости решения от  $\eta$  ( $\xi, \eta, z$  — эллиптические цилиндрические координаты). Поэтому задача осталась только сформулированной.

В настоящей работе приводится решение трехмерной задачи Коши для цилиндрических областей с произвольным гладким сечением и двух видов аксиально симметричных областей: область, ограниченная поверхностью вращения с произвольным законом нарастания кругового сечения, и тороид с произвольным сечением. Решение основывается на отделении  $z$  в цилиндрическом и  $\psi$  — азимута — в аксиально симметричном случае при помощи преобразования Фурье (для регулярных условий Коши) или Лапласа (для иррегулярных функций) и точном решении остающейся двумерной задачи по методу Римана.

В качестве примера приведены приближенное и точное решение для периодической фокусировки цилиндрического пучка с произвольным сечением (приближенное решение аппроксимирует действительное распределение потенциала на границе при помощи косинуса [5]), а также выписано выражение для потенциала в случае эллиптического пучка с периодической вариацией  $z$ -компоненты скорости [6].

Для цилиндрического пучка с произвольным сечением использование интеграла Липшица-Ганкеля дает возможность выполнить интегрирование по контуру в  $r$ -плоскости и представить решение для формирования течения, подчиняющегося закону  $3/2$  в замкнутой форме. Показано, что угол наклона формирующего электрода с нулевым потенциалом не зависит от формы границы и составляет  $67^\circ.5$ , как и в двумерном случае. Знание точного решения для границы, параметрическое задание которой осуществляется аналитическими функциями, позволяет построить приближенное выражение для неаналитических параметрических уравнений (например, квадрат).

Решение задачи о формировании тороидального пучка с произвольным сечением, соответствующего течению по круговым траекториям [7], приведено в терминах контурных интегралов в  $r$ -плоскости.

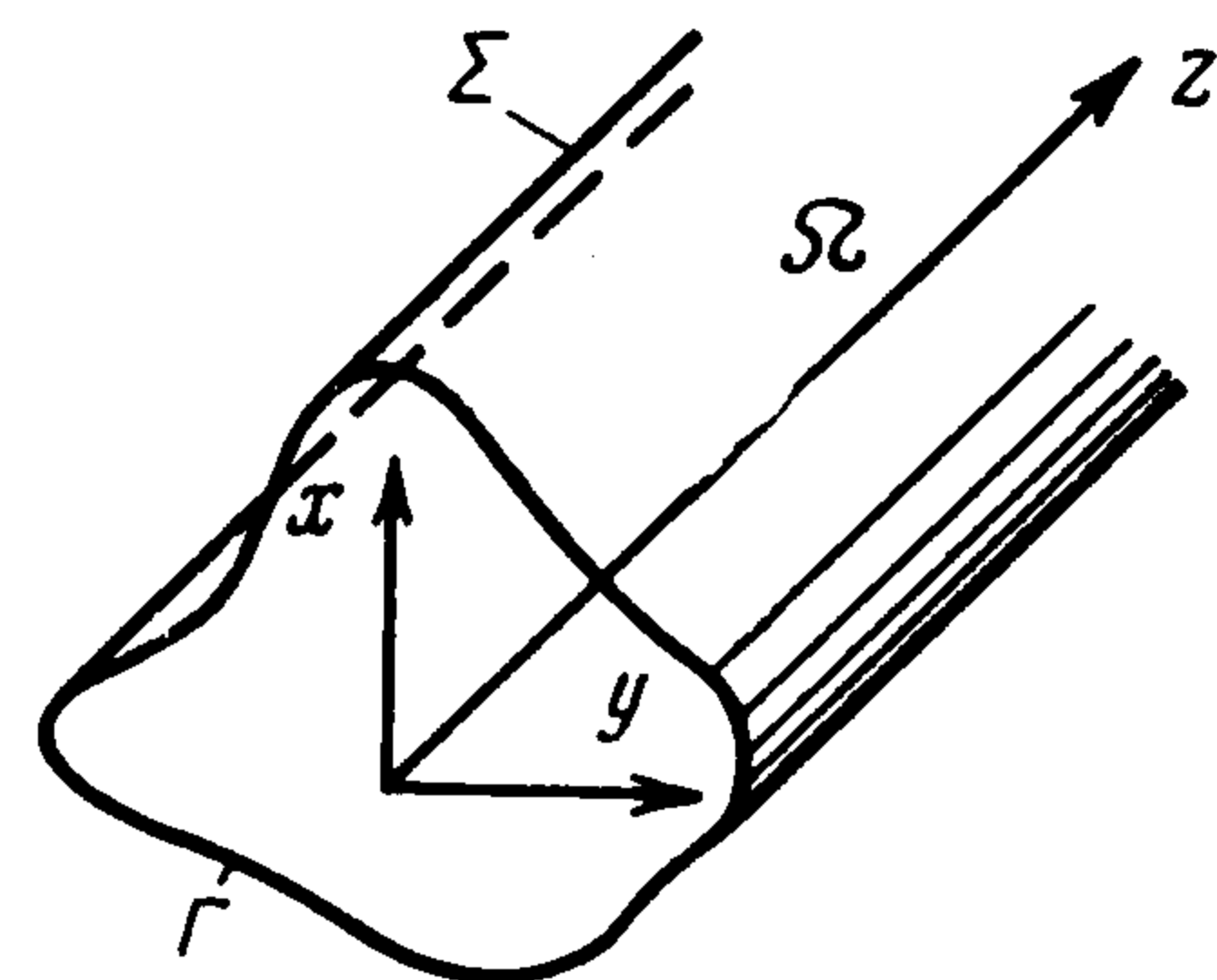
Использованные в работе сведения по специальным функциям можно найти в [8,9].

**1. Цилиндрическая область с произвольным сечением. Задача состоит в решении уравнения Лапласа**

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.1)$$

когда условия Коши определены на границе  $\Sigma$  области  $\Omega$ , изображенной на фиг. 1. Пусть направляющая цилиндра  $\Gamma$  задается параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned} x &= x_e(t), & y &= y_e(t) \\ dx_e/dt &= \alpha(t), & dy_e/dt &= \beta(t) \end{aligned} \quad (1.2)$$



Фиг. 1

а потенциал и его нормальная производная на  $\Sigma$  — функциями  $V_e$  и  $V_{ne}$

$$\varphi|_{\Sigma} = V_e(t, z), \quad \partial\varphi/\partial n|_{\Sigma} = V_{ne}(t, z) \quad (1.3)$$

Легко убедиться, что

$$x + iy = x_e(w) + iy_e(w), \quad w = u + iv$$

осуществляет отображение действительной оси  $v = 0$  в плоскости  $w$  на  $\Gamma$  в плоскости  $x, y$ . Уравнение (1.1) при этом отображении примет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \sqrt{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

где  $g = g(u, v)$  — детерминант метрического тензора  $g_{ik}$  системы  $u, v, z$ .

Если  $V_e, V_{ne}$  регулярны по  $z$ , будем искать решение задачи (1.1), (1.3) в виде

$$\varphi(u, v, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(u, v; p) e^{ipz} dp$$

Тогда функция  $\Phi(u, v; p)$ , которую в дальнейшем условимся называть двумерным потенциалом, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} - p^2 \sqrt{g} \Phi = 0 \quad (1.4)$$

При этом на  $v = 0$

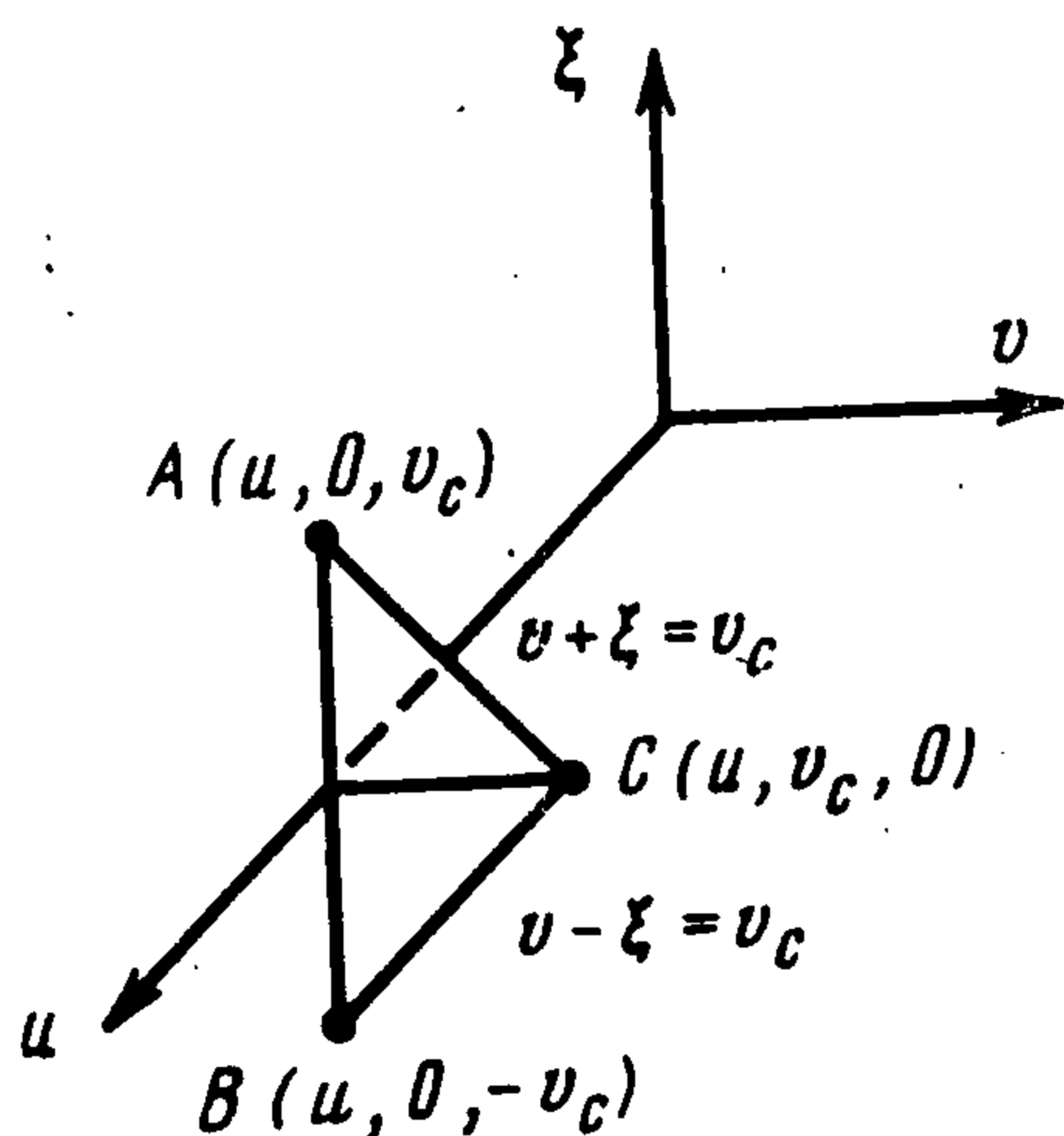
$$\Phi|_{v=0} = \vartheta(u; p), \quad \partial \Phi / \partial v|_{v=0} = f(u; p) \quad (1.5)$$

Здесь  $\vartheta(u; p), f(u; p)$  — спектральные плотности условий Коши  $\varphi|_{v=0} = V_e(u, z) = V(u, z), \quad \partial \varphi / \partial v|_{v=0} = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} V_{ne}(u, z) = F(u, z)$

Если решение ищется в виде ряда Фурье или при помощи преобразования Лапласа, то это — коэффициенты Фурье или изображения функций  $V, F$ . В последнем случае  $p$  в (1.4) должно быть заменено на  $ip$ .

1.1. Решение двумерной задачи (1.4), (1.5). Совершим аналитическое продолжение параметра  $u$ , заменяя его на  $u + i\xi$ . Уравнение (1.7) при этом станет гиперболическим

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} - p^2 \sqrt{g} \Phi = 0 \quad (1.6)$$



Фиг. 2

Система  $u, v, \xi$  изображена на фиг. 2. Здесь  $C$  — точка, в которой вычисляется потенциал (точка наблюдения);  $v \pm \xi = v_c$  — характеристики, проходящие через нее. Условия Коши заданы на  $AB$  как аналитическое продолжение функций (1.5). Применяя метод Римана [10], получаем

$$\Phi_C = \text{Re} \left[ \Phi_A + \int_0^{v_c} \left( G \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \Phi \frac{\partial G}{\partial v} \right) d\xi \right] \quad (1.7)$$

Здесь  $G$  — функция Римана — удовлетворяет тому же уравнению, что и  $\Phi$ , и обращается в единицу на характеристиках, поскольку первые производные в (1.6) отсутствуют

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} - p^2 G = 0 \quad (1.8)$$

В системе  $x, y$  координаты точки  $C$  определяются выражениями

$$\begin{aligned} x_c &= \text{Re } x_e(u + iv_c) - \text{Im } y_e(u + iv_c) \\ y_c &= \text{Im } x_e(u + iv_c) + \text{Re } y_e(u + iv_c) \end{aligned}$$

Замечая далее, что на характеристиках  $x \pm iy = x_c \pm iy_c$  имеет место соотношение

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = 0$$

будем искать  $G$  в виде  $G = G(\lambda)$

$$\lambda = ip[(x - x_e)^2 + (y - y_e)^2]^{1/2}$$

Легко показать, что (1.8) при этом сводится к уравнению Бесселя

$$\lambda G'' + G' + \lambda G = 0$$

причем условию  $G(0) = 1$  будет удовлетворять функция Бесселя нулевого порядка

$$G = J_0(\lambda) \quad (1.9)$$

Подставляя (1.9) в (1.7), приходим к следующему окончательному выражению для  $\Phi(u, v; p)$

$$\begin{aligned} \Phi(u, v; p) = \operatorname{Re} \{ \vartheta(w; p) + \int_0^v [J_0(\lambda_e) f(\zeta; p) + \\ + p^2 \lambda_e^{-1} J_1(\lambda_e) \{ (x_e - x) \beta - (y_e - y) \alpha \} \vartheta(\zeta; p) ] d\xi \} \\ \lambda_e = ip [(x_e - x)^2 + (y_e - y)^2]^{1/2}, \quad w = u + iv, \quad \zeta = u + i\xi \quad (1.10) \end{aligned}$$

При получении (1.10) использовались условия Коши — Римана при  $v = 0$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v} = \alpha(u), \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u} = -\beta(u) \\ v = 0$$

индекс «e» появился из-за того, что интегрирование в (1.10) идет по половине  $AB$ , вдоль которой  $v = 0$ ;  $x_e, y_e, \alpha, \beta$  — функции  $\zeta$ ; индексы «с» опущены, так что теперь точка наблюдения имеет координаты  $x, y; u, v$ .

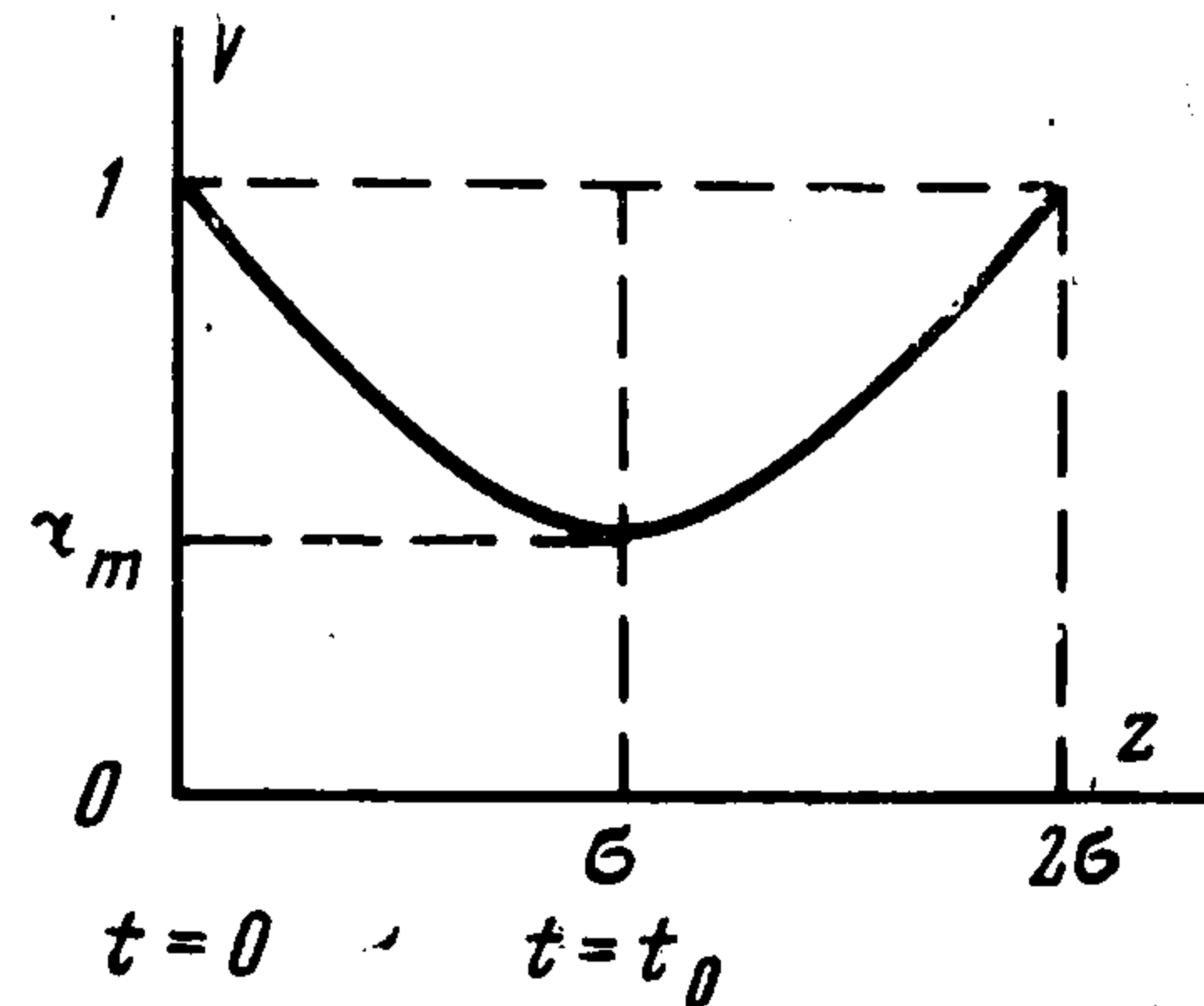
При построении решения в виде рядов Фурье имеет смысл провести следующее (тождественное в случае бесконечных рядов) преобразование:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) = \operatorname{Re} \left\{ V(w, z) + \int_0^v F(\zeta, z) d\xi + \int_0^v \left[ \sum_{p=0}^{\infty} \{ J_0(\lambda_e) - 1 \} \langle f e^{ipz} \rangle + \right. \right. \\ \left. \left. + \{ (x_e - x) \beta - (y_e - y) \alpha \} p^2 \lambda_e^{-1} J_1(\lambda_e) \langle \vartheta e^{ipz} \rangle \right] d\xi \right\} \\ \langle f e^{ipz} \rangle = f_p^{(c)} \cos pz + f_p^{(s)} \sin pz \quad (1.11) \end{aligned}$$

Это выражение точно удовлетворяет условиям на границе при любом числе сохраненных членов ряда;  $f_p^{(c)}, f_p^{(s)}$  — коэффициенты Фурье функции  $F$ .

1.2. Примеры: приближенное и точное решение для периодической фокусировки. При рассмотрении задачи о периодической фокусировке плоских и цилиндрических пучков в работе [5] была принята следующая аппроксимация действительного распределения потенциала на границе (фиг. 3)

$$V = 1 - (1 - \alpha_m) \cos(\pi z / 2\sigma), \quad F = 0 \quad (1.12)$$



Фиг. 3

Вырежем область  $\Omega$  из плоского диода, потенциал в котором меняется в соответствии с фиг. 3. Применяя приведенные выше формулы и учитывая, что

$$\vartheta_0 = 1, \quad \vartheta_1 = \alpha_m - 1, \quad \vartheta_p = 0 \quad (p = 2, 3, \dots), \quad f_p = 0 \quad (p = 0, 1, \dots)$$

имеем приближенное решение для периодической фокусировки цилиндрического пучка с произвольным сечением в виде

$$\Phi(x, y, z) = 1 - (1 - \alpha_m) \left\{ 1 - \left( \frac{\pi}{2\sigma} \right)^2 \operatorname{Re} \int_0^v \lambda_e^{-1} J_1(\lambda_e) [(x_e - x)\beta - (y_e - y)\alpha] d\xi \right\} \times \\ \times \cos \frac{\pi z}{2\sigma}, \quad p = \frac{\pi}{2\sigma} \quad (1.13)$$

Точное выражение  $V = V(z)$  задается параметрически

$$V = (1/9 t^2 - 2/9 t_0 t + 1)^2, \quad z = 1/27 t^3 - 1/9 t_0 t^2 + t, \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad t_0 = 3 \sqrt{1 - \sqrt{\alpha_m}} \quad (1.14)$$

Потенциал достаточно определить на интервале  $0 \leq z \leq \sigma$ . Коэффициенты Фурье для (1.14) имеют вид

$$\vartheta_p^{(c)} = \frac{4}{3p^2} \frac{1}{1 + 2\sqrt{\alpha_m}} - \frac{4}{9} \frac{1}{\sigma p^2} \int_0^{t_0} \cos pz dt, \quad \vartheta_p^{(s)} = -\frac{1 - \alpha_m}{\sigma p} + \frac{4}{9} \frac{1}{\sigma p^2} \int_0^{t_0} \sin pz dt \\ (p = 2\pi q / \sigma, q = 1, 2, \dots)$$

а формула (1.11) дает

$$\Phi(x, y, z) = V(z) + \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} p^2 \langle \vartheta e^{ipz} \rangle \int_0^v \lambda_e^{-1} J_1(\lambda_e) [(x_e - x)\beta - (y_e - y)\alpha] d\xi \quad (1.15)$$

**2. Эллиптический цилиндр.** В ряде случаев решение может быть представлено в более компактной форме, если рассмотрение вести в системе, связанной с поверхностью пучка. Пусть  $\xi, \eta, z$  — такая система, причем  $\xi = \xi_0$  является уравнением  $\Sigma$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \sqrt{g} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

Вводя новые переменные

$$\zeta = \xi + i\eta, \quad \bar{\zeta} = \xi - i\eta$$

получаем, что двумерный потенциал должен удовлетворять уравнению

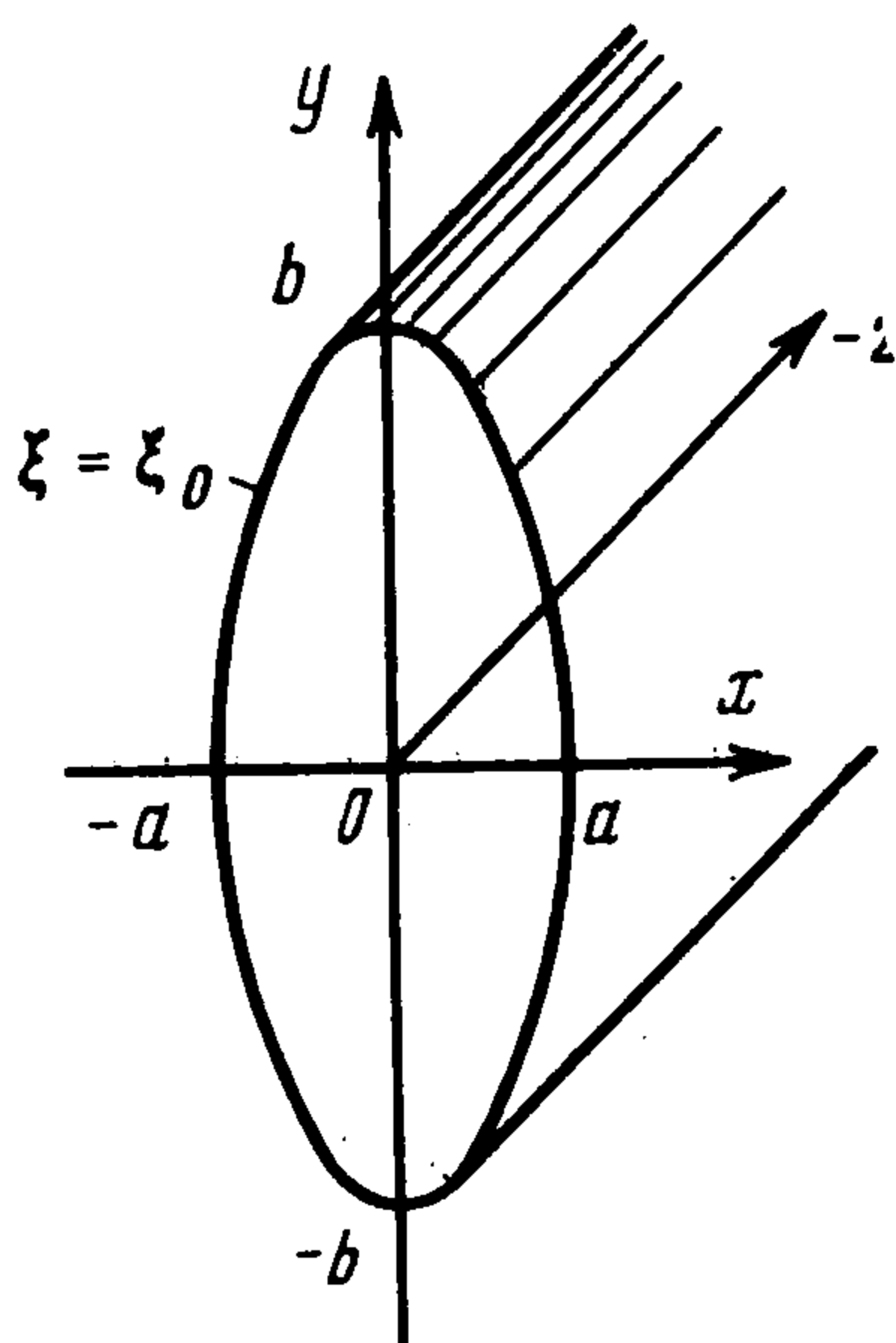
$$4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} = p^2 \sqrt{g} \Phi \quad (2.1)$$

Если  $\sqrt{g} = a'(\zeta)b'(\bar{\zeta})$ , то введение  $\lambda$  по формуле

$$\lambda = ip \{ [a(\zeta) - a(\zeta_c)] \} \{ [b(\bar{\zeta}) - b(\bar{\zeta}_c)] \}^{1/2}$$

дает для  $G$  функцию Бесселя нулевого порядка  $J_0(\lambda)$ . Разделение переменных в детерминанте метрического тензора имеет место, например, в эллиптических и параболических координатах. Для эллиптического цилиндра (фиг. 4)

$$x = a \sqrt{\beta - 1} \operatorname{sh} \xi \sin \eta, \quad y = a \sqrt{\beta - 1} \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad \operatorname{th}^2 \xi_0 = 1 / \beta \\ a(\zeta) = a \sqrt{\beta - 1} \operatorname{ch} \zeta, \quad b(\bar{\zeta}) = a \sqrt{\beta - 1} \operatorname{ch} \bar{\zeta}, \quad \beta = (b/a)^2$$



Фиг. 4

Применяя формулу, приведенную в [10], после преобразований приходим к следующему выражению для  $\Phi(\xi, \eta; p)$ :

$$\begin{aligned} \Phi(\xi, \eta; p) = & \operatorname{Re} \vartheta(T; p) + \operatorname{Im} \int_0^T \{I_0(k_e) f(\tau; p) - \\ & - pa\sqrt{\beta-1} I_1(k_e) \operatorname{Re} [\operatorname{sh}(\xi_0 - i\tau) e^{i\psi}] \vartheta(\tau; p)\} d\tau \\ & T = \eta + i(\xi - \xi_0), \quad k_e = pa\sqrt{\beta-1} \rho \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\rho = |\operatorname{ch}(\xi_0 + i\tau) - \operatorname{ch}(\xi + i\eta)|, \quad \psi = \arg[\operatorname{ch}(\xi_0 + i\tau) - \operatorname{ch}(\xi + i\eta)]$$

При выводе (2.2) принято во внимание, что  $\lambda$  — чисто мнимый аргумент.

Для эллиптического пучка с потенциалом (1.12) использование общей формулы (2.2) дает

$$\begin{aligned} \Phi(\xi, \eta, z) = & 1 - (1 - \alpha_m) \left\{ 1 + \frac{\pi}{2\sigma} a\sqrt{\beta-1} \operatorname{Im} \int_0^T I_1(k_e) \times \right. \\ & \left. \times \operatorname{Re} [\operatorname{sh}(\xi_0 - i\tau) e^{i\psi}] d\tau \right\} \cos \frac{\pi z}{2\sigma} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Рассмотрим теперь задачу о формировании течения с эллиптической границей,  $z$ -компонента скорости в котором претерпевает периодические изменения [6]. Условия Коши при  $\xi = \xi_0$  имеют вид

$$V(\eta, z) = V_0(\eta) + W(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \vartheta_p(\eta; p) \cos pz, \quad F = F(\eta) \quad (2.4)$$

Зависимость  $W = W(z)$  задается параметрически

$$W = (1 - \gamma \cos t)^2, \quad z = t - \gamma \sin t$$

Функции  $V_0(\eta)$  и  $F(\eta)$  поясняются в [3]

$$V_0(\eta) = \frac{\alpha}{2} \frac{\beta+1}{\beta} \left( 1 - \frac{\beta-1}{\beta+1} \cos 2\eta \right), \quad F(\eta) = \frac{\alpha(\beta^2+1)}{\beta^{3/2}} \left( 1 - \frac{\beta^2-1}{\beta^2+1} \cos 2\eta \right), \quad \alpha = \text{const}$$

Для коэффициентов Фурье условий (2.4) получаем

$$\begin{aligned} \vartheta_0 = V_0(\eta), \quad \vartheta_p = & \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \gamma \cos t)^2 \cos [p(t - \gamma \sin t)] dt = -\frac{4}{p^2} J_p(p\gamma) \\ f_0 = F(\eta), \quad f_p = & 0 \quad (p = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь  $J_p$  — функция Бесселя. Используя (2.2), (2.5), приходим к следующему выражению для потенциала:

$$\begin{aligned} \Phi(\xi, \eta, z) = & \alpha \left[ \frac{\beta+1}{2\beta} + \frac{\beta^2+1}{\beta^{3/2}} (\xi - \xi_0) - \frac{\beta-1}{2\beta} \cos 2\eta \left\{ \operatorname{ch} 2(\xi - \xi_0) + \frac{\beta+1}{\beta^{1/2}} \operatorname{sh} 2(\xi - \xi_0) \right\} \right] + \\ & + W(z) + 4a\sqrt{\beta-1} \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ \frac{J_p(p\gamma)}{p} \cos pz \operatorname{Im} \int_0^T I_1(k_e) \operatorname{Re} [\operatorname{sh}(\xi_0 - i\tau) e^{i\psi}] d\tau \right\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

3. Иррегулярные условия Коши для цилиндрической области с произвольным сечением. Если условия Коши на  $\Sigma$  задаются иррегулярными функциями, аппарат рядов Фурье оказывается непригодным и должен быть заменен преобразованием Лапласа. При этом каждый конкретный случай требует специального рассмотрения, так как процедура получения решения включает регуляризацию определенных интегралов, зависящую от вида интегранда. Ниже будет исследован важный для приложений случай, когда область  $\Omega$  вырезается из плоского диода при эмиссии, ограниченной пространственным зарядом. На поверхности цилиндра  $\Sigma$  при этом имеем

$$V = z^{1/3}, \quad F = 0 \quad (3.1)$$

Можно показать [1], что для  $z^{1/3}$  справедливо представление

$$z^{1/3} = \frac{1}{\Gamma(-4/3)} \int_{(0)}^{\infty} \frac{e^{-pz}}{p^{7/3}} dp \quad (3.2)$$

Здесь  $\Gamma(x)$  — гамма-функция. Условия Коши для  $\Phi(u, v; p)$  таковы

$$\vartheta = \vartheta(p) = p^{-7/3} / \Gamma(-4/3), \quad f = 0 \quad (3.3)$$

Подставляя (3.3) в (1.10) и заменяя  $p$  на  $ip$  в этой формуле, получаем решение в виде

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{\Gamma(-4/3)} \int_{(0)}^{\infty} \frac{e^{-pz}}{p^{7/3}} \left\{ 1 + p^2 \operatorname{Re} \int_0^v \frac{J_1(\lambda_e)}{\lambda_e} [(x_e - x)\beta - (y_e - y)\alpha] d\xi \right\} dp \quad (3.4)$$

$$\lambda_e = -p [(x_e - x)^2 + (y_e - y)^2]^{1/2}, \quad x_e = x_e(\xi), \quad y_e = y_e(\xi), \quad \alpha = \alpha(\xi)$$

$$\beta = \beta(\xi), \quad \xi = u + i\xi$$

Интегрирование по контуру в  $p$ -плоскости в (3.4) может быть выполнено, если воспользоваться интегралом Липшица — Ганкеля

$$\int_0^{\infty} e^{-ap} p^{q-1} J_{\nu}(bp) dp = \frac{b^{\nu} \Gamma(\nu + q)}{2^{\nu} (a^2 + b^2)^{1/2} (\nu + q) \Gamma(1 + \nu)} F\left(\frac{\nu + q}{2}, \frac{1 + \nu - q}{2}, \nu + 1; \frac{b^2}{a^2 + b^2}\right) \quad (3.5)$$

$$\operatorname{Re}[(a \pm ib)p] > 0, \quad p \rightarrow \infty$$

Здесь  $F(a, b, c; z)$  — гипергеометрическая функция. Таким образом

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) &= z^{1/3} - \frac{1}{\Gamma(-4/3)} \operatorname{Re} \int_0^v \left[ \frac{(x_e - x)\beta - (y_e - y)\alpha}{r} \int_{(0)}^{\infty} \frac{e^{-pz}}{p^{4/3}} J_1(-pr) dp \right] d\xi = \\ &= z^{1/3} + \frac{\Gamma(2/3)}{2\Gamma(-4/3)} \operatorname{Re} \int_0^v \frac{(x_e - x)\beta - (y_e - y)\alpha}{(z^2 + r^2)^{1/2}} F\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{6}, 2; \frac{r^2}{z^2 + r^2}\right) d\xi \quad (3.6) \end{aligned}$$

В формуле (3.6)

$$r = [(x_e - x)^2 + (y_e - y)^2]^{1/2}$$

можно рассматривать как аналитическое продолжение расстояния между проекцией точки наблюдения на плоскость  $x, y$  и точкой на  $\Gamma$ . При выполнении дополнительного условия

$$|a + ib| \leq |a - ib| \quad (3.7)$$

гипергеометрическая функция в (3.5) может быть выражена через функцию Лежандра. Поскольку  $z \geq 0$ , условие (3.7) заменяется требованием  $\text{Im}r \leq 0$ . Итак, при  $\text{Im}r \leq 0$  имеем

$$\varphi(x, y, z) = z^{1/3} - \text{Re} \int_0^v \frac{(x_e - x)\beta - (y_e - y)\alpha}{[z^2 + (x_e - x)^2 + (y_e - y)^2]^{1/3}} \frac{dP_{-1/2}(\Theta)}{d\Theta} d\xi \quad (3.8)$$

$$\Theta = [1 + (r/z)^2]^{-1/2}, \quad \text{Im}r \leq 0$$

Выражения (3.6), (3.8) дают решение поставленной задачи.

*3.1. Угол наклона формирующего электрода с нулевым потенциалом.* Рассмотрим выражение (3.7) в окрестности эмиттирующей поверхности  $z = 0$  и вблизи границы пучка  $\Sigma$ . Произведем упрощения, связанные с малостью  $v, \xi, z$

$$x_e(\xi) = x_e(u + i\xi) = x_e(u) + \alpha(u)i\xi$$

$$y_e(\xi) = y_e(u + i\xi) = y_e(u) + \beta(u)i\xi$$

$$x + iy = x_e(u + iv) + iy_e(u + iv) = x(u, v) + iy(u, v) \quad (3.9)$$

$$x(u, v) = x(u, 0) + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_{v=0} v = x_e(u) - \beta(u)v$$

$$y(u, v) = y(u, 0) + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_{v=0} v = y_e(u) + \alpha(u)v$$

В двух последних равенствах использованы уже упоминавшиеся условия Коши — Римана при  $v = 0$ . Пользуясь (3.9), получаем

$$r^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(v^2 - \xi^2), \quad (x_e - x)\beta - (y_e - y)\alpha = (\alpha^2 + \beta^2)v$$

Уравнение нулевой эквипотенциали с учетом приведенных формул примет вид

$$0 = z^{1/3} - z^{-2/3}(\alpha^2 + \beta^2)v \int_0^v \left[1 + (\alpha^2 + \beta^2) \frac{v^2}{z^2} \left(1 - \frac{\xi^2}{v^2}\right)\right]^{-1/2} \times \\ \times P_{-1/2}'\left(\left[1 + (\alpha^2 + \beta^2) \frac{v^2}{z^2} \left(1 - \frac{\xi^2}{v^2}\right)\right]^{-1/2}\right) d\xi$$

Здесь штрих означает производную по аргументу. Принимая во внимание, что расстояние, отсчитанное вдоль нормали к  $\Gamma$ , связано с  $v$  соотношением

$$(\alpha^2 + \beta^2)v^2 = n^2$$

вводя новую переменную интегрирования  $\eta = \xi/v$  и пользуясь явным представлением нулевой эквипотенциали в плоскости  $n, z$  в виде

$$n = \theta z + \dots, \quad \theta = \theta(u)$$

получаем следующее уравнение для определения  $\theta$

$$\frac{1}{\theta^2} = \int_0^1 [1 + \theta^2(1 - \eta^2)]^{-1/2} P_{-1/2}'([1 + \theta^2(1 - \eta^2)]^{-1/2}) d\eta \quad (3.10)$$

Уравнение (3.10) показывает, что наклон нулевой эквипотенциали не зависит от формы границы. Известно, что для плоских и осесимметричных течений (в частности, для обычного цилиндрического пучка) этот угол составляет  $67^\circ.5$ . Таким образом,  $\theta$  в (3.9) постоянна и равна

$$\theta = \text{const} = 1 + \sqrt{2} \quad (3.11)$$

Вычисление коэффициентов в  $(n, z)$ -уравнении нулевой эквипотенциали может быть продолжено. Возникающие при этом определенные интегралы, не зависящие от формы границы, оцениваются по известному разложению для кругового цилиндрического пучка, получаемому из формул, приведенных в [11]. Так, кривизна нулевого формирующего электрода оказывается пропорциональной кривизне  $k_\Gamma$  контура  $\Gamma$ , причем коэффициентом пропорциональности служит численное значение кривизны нулевой эквипотенциали в случае кругового цилиндра

$$k_\varphi = \frac{9}{28} \sin \frac{\pi}{8} \frac{\alpha\beta' - \alpha'\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)^{3/2}} = \frac{9}{28} \sin \frac{\pi}{8} k_\Gamma$$

**3.2. Цилиндрический и эллиптический пучки.** Для цилиндрического пучка, сечением которого является круг, имеем

$$\begin{aligned} x = x_e(t) = \cos t, \quad y = y_e(t) = \sin t, \quad \alpha(t) = -\sin t, \quad \beta(t) = \cos t \\ x + iy = \text{Re}^{i\psi} = e^{i\psi}, \quad x = e^{-v} \cos u, \quad y = e^{-v} \sin u, \quad u = \psi, \quad v = -\ln R \\ (x_e - x)\beta - (y_e - y)\alpha = 1 - e^{-v} \text{ch} \xi \\ r^2 = (x_e - x)^2 + (y_e - y)^2 = 2e^{-v} (\text{ch} v - \text{ch} \xi) \end{aligned}$$

В силу того, что  $r$  действительно, может быть применена формула (3.8). В результате преобразований получаем

$$\begin{aligned} \varphi(R, z) = z^{1/2} + z^{-1/2} \int_1^R \frac{1}{\eta} \left[ 1 - \frac{R}{2} \left( \eta + \frac{1}{\eta} \right) \right] [\Theta(R, \eta)]^{1/2} P_{-1/2}'(\Theta) d\eta \\ \Theta(R, \eta) = \left[ 1 + \frac{R}{z^2} \left( R - \eta + \frac{1}{R} - \frac{1}{\eta} \right) \right]^{-1/2} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Выражение (3.12) представляет новую форму решения, отличную от приведенной в [2].

Легко убедиться, что непосредственное использование подхода, изложенного в п. 1, в случае эллиптического пучка приводит к весьма громоздким выражениям для интегранда. Воспользуемся поэтому результатами п. 2. Условие (3.7) выполняется всегда, ибо  $a$  и  $b$  при этом действительны. В результате получаем

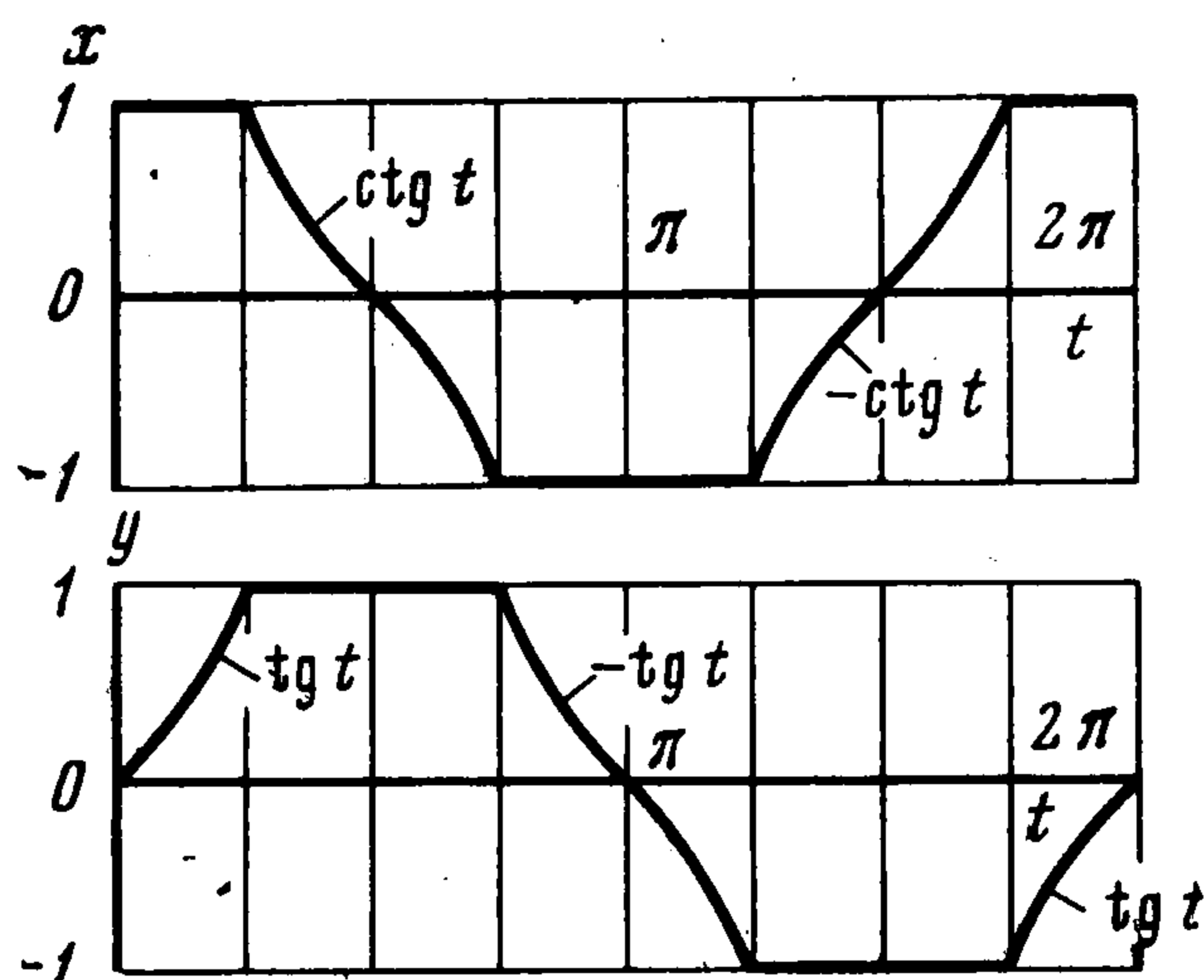
$$\begin{aligned} \varphi(\xi, \eta, z) = z^{1/2} - a^2(\beta - 1) z^{-1/2} \text{Im} \int_0^T \rho \text{Re} [\text{sh}(\xi_0 - i\tau) e^{i\psi}] Z^{1/2} P_{-1/2}'(Z) d\tau \\ T = \eta + i(\xi - \xi_0), \quad Z = [1 + a^2(\beta - 1)(\rho/z)^2]^{-1/2} \\ \text{ch}(\xi_0 + i\tau) - \text{ch}(\xi + i\eta) = \rho e^{i\psi} \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.3. *Некоторые обобщения.* Ясно, что результаты, выражаемые формулами (3.6), (3.8), легко могут быть обобщены на случай, когда условия на границе задаются произвольными степенными функциями  $z$  с коэффициентами, зависящими от  $u$

$$V(u, z) = V_0(u)z^\nu, \quad F(u, z) = F_0(u)z^{2k} \quad (3.14)$$

Условия типа (3.14) могут встретиться при расчете слабо искривленного цилиндрического пучка.

При построении решения функции  $x_e(t)$ ,  $y_e(t)$  предполагались аналитическими. Однако аналитические параметрические зависимости могут описывать кривые типа астроида, обладающей точками возврата. Нулевая эквипотенциаль в этом случае будет иметь линии излома. Вместе с тем, располагая точным решением для аналитического параметрического задания  $\Gamma$ , можно пытаться строить приближенное решение для неаналитических параметрических зависимостей, раскладывая их в ряд Фурье. Например, если  $\Gamma$  представляет собой квадрат, то она описывается функциями  $x_e(t)$ ,  $y_e(t)$ , приведенными на фиг. 5. При этом



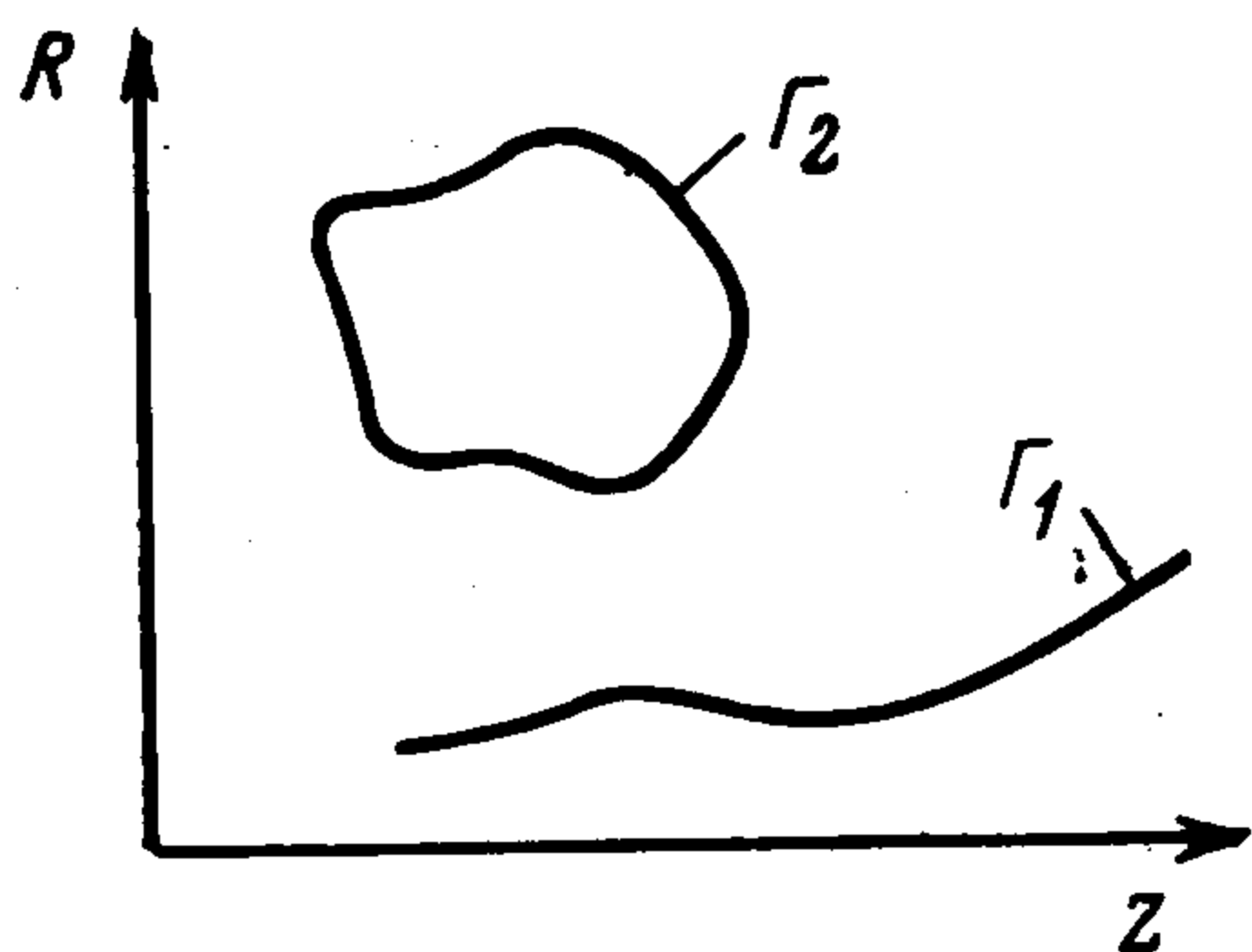
Фиг. 5

$$x_e(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \cos(2k+1)t, \quad y_e(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} \sin(2k+1)t$$

$$a_{4q+1} = a_{4q-1} = b_{4q+1} = -b_{4q-1} = -\frac{4}{\pi} \left[ 2 \sum_{l=1}^{2q} \frac{\cos^{1/4}(2l-1)\pi}{2l-1} + \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \right]$$

Здесь  $t$  — обычный полярный угол, причем полюс расположен в центре квадрата, сторона которого равна 2.

4. *Области с аксиальной симметрией.* В осесимметричном случае будем оперировать с уравнением Лапласа, записанным в обычных цилиндрических координатах  $R, \psi, z$



Фиг. 6

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (4.1)$$

Область  $\Omega$  получается вращением вокруг оси  $z$  кривых  $\Gamma_1, \Gamma_2$ , изображенных на фиг. 6;  $\Gamma_1$  дает поверхность вращения с произвольным законом изменения радиуса сечения;  $\Gamma_2$  приводит к тороидальной области произвольного сечения. Кривые  $\Gamma$  задаются параметрическими уравнениями

$$R = R_e(t), \quad z = z_e(t); \quad dR_e / dt = \alpha(t), \quad dz_e / dt = \beta(t) \quad (4.2)$$

а условия Коши для  $\varphi$  — формулами

$$\varphi|_{\Sigma} = V_e(t, \psi), \quad \partial \varphi / \partial n|_{\Sigma} = V_{ne}(t, \psi) \quad (4.3)$$

4.1. Решение двумерной задачи. Задача состоит в отыскании двумерного потенциала  $\Phi(R, z; p)$ ,

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{p^2}{R^2} \Phi = 0 \quad (4.4)$$

удовлетворяющего на  $\Gamma$  условиям

$$\Phi|_{v=0} = \vartheta(u; p) \quad \partial \Phi / \partial v|_{v=0} = f(u; p) \quad (4.5)$$

Отображение вспомогательной плоскости  $w = u + iv$  на меридиональную плоскость определяется функцией

$$z + iR = z_e(w) + iR_e(w) \quad (4.6)$$

При решении задачи (4.4), (4.5) в основном повторяются выкладки, проведенные в [2], с той только разницей, что функцией Римана теперь будет гипергеометрическая функция

$$G = F\left(\frac{1}{2} + p, \frac{1}{2} - p, 1; \lambda\right), \quad \lambda = -(4RR_c)^{-1} [(R - R_c)^2 + (z - z_c)^2] \quad (4.7)$$

Опуская промежуточные вычисления, приведем окончательную форму решения

$$\begin{aligned} \Phi(u, v; p) = \operatorname{Re} \left\{ \left[ \frac{R_e(w)}{R} \right]^{1/2} \vartheta(w; p) + \int_0^v \left[ \left( \frac{R_e}{R} \right)^{1/2} \left( f + \frac{\beta \vartheta}{2R_e} \right) F\left(\frac{1}{2} + p, \right. \right. \right. \\ \left. \left. \frac{1}{2} - p, 1; \lambda_e\right) - \left( \frac{1}{4} - p^2 \right) \frac{\vartheta}{2R_e^{1/2} R^{3/2}} \left( \frac{R^2 - R_e^2 + [z_e - z]^2}{2R_e} \beta + [z_e - z] \alpha \right) \times \right. \\ \left. \times F\left(\frac{3}{2} + p, \frac{3}{2} - p, 2; \lambda_e\right) \right] d\xi \right\} \quad (4.8) \end{aligned}$$

$$\lambda_e = (4R_e R)^{-1} [(R_e - R)^2 + (z_e - z)^2], \quad w = u + iv, \quad \zeta = u + i\xi$$

Стоящие под интегралом  $R_e, z_e, \alpha, \beta, \vartheta, f$  являются функциями  $\zeta$ ;  $R$  и  $z$  — функции  $u, v$ , определяемые из (4.6).

Если условия Коши (4.3) регулярны по  $\psi$ , то решение исходной трехмерной задачи может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \varphi(R, \psi, z) = \operatorname{Re} \left\{ \left[ \frac{R_e(w)}{R} \right]^{1/2} V(w, \psi) + \int_0^v \left[ \frac{R_e(\zeta)}{R} \right]^{1/2} \left[ F(\zeta, \psi) + \frac{\beta}{2R_e} V(\zeta, \psi) \right] d\xi + \right. \\ \left. + \int_0^v \left[ \left( \frac{R_e}{R} \right)^{1/2} \sum_{p=0}^{\infty} \left\{ F\left(\frac{1}{2} + p, \frac{1}{2} - p, 1; \lambda_e\right) - 1 \right\} \left( \langle f e^{ip\psi} \rangle + \frac{\beta}{2R_e} \langle \vartheta e^{ip\psi} \rangle \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2R_e^{1/2} R^{3/2}} \left( \frac{R^2 - R_e^2 + [z_e - z]^2}{2R_e} \beta + [z_e - z] \alpha \right) \sum_{p=0}^{\infty} \left( \frac{1}{4} - p^2 \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times F\left(\frac{3}{2} + p, \frac{3}{2} - p, 2; \lambda_e\right) \langle \vartheta e^{ip\psi} \rangle \right] d\xi \right\}, \quad \langle \vartheta e^{ip\psi} \rangle = \vartheta_p^{(c)} \cos p\psi + \vartheta_p^{(s)} \sin p\psi \quad (4.9) \end{aligned}$$

Здесь  $\vartheta_p^{(c)}, \vartheta_p^{(s)}$  — коэффициенты Фурье функции  $V(u, \psi)$ ,  $R_e, z_e, \alpha, \beta, \vartheta, f$  под интегралом зависят от  $\zeta$ . Выражение (4.9) точно удовлетворяет условиям на границе при

любом числе членов ряда по  $p$ . Предполагалось, что  $V$  и  $F$  — периодические функции с периодом  $2\pi$ . Распространение результатов на случай неравных, отличных от  $2\pi$  периодов тривиально. Формула (4.9) обобщает решение [2] на случай зависимости условий Коши от азимута и применимо также к тороиду произвольного сечения.

5. Тороидальная область с иррегулярной зависимостью. Вырежем область  $\Omega$  для кривой  $\Gamma_2$  из течения с круговыми траекториями частиц, исследованного в [7]. Условия Коши задаются формулами

$$\begin{aligned} \varphi|_{v=0} &= V(t, \psi) = R_e^{-2}(t) (\sin^{3/2} \psi)^{4/3} \\ \partial\varphi/\partial v|_{v=0} &= \partial\varphi/\partial R|_{\Sigma} \beta = F(t, \psi) = -2\beta(t) R_e^{-3}(t) (\sin^{3/2} \psi)^{4/3} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Если воспользоваться преобразованием Лапласа

$$\left(\sin \frac{3}{2} \psi\right)^{4/3} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \theta(p) e^{p\psi} dp, \quad a > 0 \quad (5.2)$$

то для  $\vartheta$  и  $f$  имеем

$$\vartheta(t; p) = R_e^{-2}(t) \theta(p), \quad f(t; p) = -2\beta(t) R_e^{-3}(t) \theta(p) \quad (5.3)$$

Остается найти  $\theta(p)$ , воспользоваться формулой (4.8) и представить  $\varphi(R, \psi, z)$  в виде (5.2)

$$\begin{aligned} \theta(p) &= \int_0^\infty \left(\sin \frac{3}{2} \psi\right)^{4/3} e^{-p\psi} d\psi = \frac{2}{3} \frac{1+e^{-\pi q}}{1-e^{-2\pi q}} \int_0^\pi \sin^{4/3} \psi e^{is\psi} d\psi \\ s &= iq = 2/3 ip \end{aligned}$$

Интеграл в правой части выражается через  $B$ -функцию

$$\int_0^\pi e^{i(p-q)\psi} \sin^{p+q-2} \psi d\psi = e^{1/2 i(p-q)\pi} [2^{p+q-2} (p+q-1) B(p, q)]^{-1}.$$

После преобразований получаем

$$\theta(p) = \frac{\pi}{14 \sqrt[3]{2}} \Gamma\left(\frac{10}{3}\right) \left[ \operatorname{sh} \frac{\pi p}{3} \Gamma\left(\frac{5}{3} + \frac{1}{3} ip\right) \Gamma\left(\frac{5}{3} - \frac{1}{3} ip\right) \right]^{-1} \quad (5.4)$$

Единственная особенность типа простого полюса находится в точке  $p = 0$ . Следуя намеченному пути, найдем двумерный потенциал

$$\begin{aligned} \Phi(u, v; p) &= \frac{\theta(p)}{\sqrt{R}} \operatorname{Re} \left\{ [R_e(w)]^{-3/2} - \int_0^v \left[ \frac{3}{2} \beta F\left(\frac{1}{2} + ip, \frac{1}{2} - ip, 1; \lambda_e\right) + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2R} \left(\frac{1}{4} + p^2\right) \left(\frac{R^2 - R_e^2 + [z_e - z]^2}{2R_e} \beta + [z_e - z] \alpha\right) F\left(\frac{3}{2} + ip, \frac{3}{2} - ip, 2; \lambda_e\right) \right] \times \\ &\quad \left. \times R_e^{-5/2} d\xi \right\} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Наконец, используя (5.5) и учитывая (5.2), имеем

$$\begin{aligned} \varphi(R, \psi, z) &= \frac{(\sin^{3/2} \psi)^{4/3}}{\sqrt{R}} \operatorname{Re} [R_e(w)]^{-3/2} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{R}} \operatorname{Re} \int_0^v \left\{ -\frac{3}{2} \beta \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \theta(p) F\left(\frac{1}{2} + ip, \frac{1}{2} - ip, 1; \lambda_e\right) e^{p\psi} dp \right] + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2R} \left(\frac{R^2 - R_e^2 + [z_e - z]^2}{2R_e} \beta + [z_e - z] \alpha\right) \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left(\frac{1}{4} + p^2\right) \theta(p) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times F\left(\frac{3}{2} + ip, \frac{3}{2} - ip, 2; \lambda_e\right) e^{p\psi} dp \right] \right\} R_e^{-5/2} d\xi \end{aligned} \quad (5.6)$$

Оценка контурных интегралов в (5.6) представляет самостоятельную задачу. Заметим, что на достаточном удалении от эмиттирующей и собирающей поверхностей для вычисления потенциала может быть использован ряд Фурье

$$\left(\sin \frac{3}{2} \psi\right)^{4/3} = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k \cos 3k\psi, \quad \theta_k = \frac{3(-1)^k}{7\sqrt{2}} \Gamma\left(\frac{10}{3}\right) \left[\Gamma\left(\frac{5}{3} + k\right) \Gamma\left(\frac{5}{3} - k\right)\right]^{-1} \left(1 - \frac{1}{2}\delta_{0k}\right) \quad (5.7)$$

Для потенциала получаем

$$\begin{aligned} \varphi(R, \psi, z) = & \frac{(\sin^{3/2} \psi)^{4/3}}{\sqrt{R}} \operatorname{Re} \left\{ [R_e(w)]^{-3/2} - \frac{3}{2} \int_0^v \beta(\zeta) [R_e(\zeta)]^{-3/2} d\zeta \right\} - \\ & - \operatorname{Re} \int_0^v \left\{ \frac{3}{2} \beta \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k \left[ F\left(\frac{1}{2} + k, \frac{1}{2} - k, 1; \lambda_e\right) - 1 \right] \cos 3k\psi + \right. \\ & + \frac{1}{2R} \left( \frac{R^2 - R_e^2 + [z_e - z]^2}{2R_e} \beta + [z_e - z] \alpha \right) \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{4} - k^2 \right) \theta_k \times \\ & \left. \times F\left(\frac{3}{2} + k, \frac{3}{2} - k, 2; \lambda_e\right) \cos 3k\psi \right\} R_e^{-5/2} d\zeta \quad (5.8) \end{aligned}$$

Поступила 21 VIII 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Radley D. E. The theory of the Pierce type electron gun. J. Electr. Contr., 1958, vol. 4, No. 2.
2. Harker K. J. Solution of the Cauchy problem for Laplace's equation in axially symmetric systems. J. Math. Phys., 1963, vol. 4, No. 7.
3. Сыровый В. А. К теории электростатической фокусировки интенсивных пучков заряженных частиц. ПМТФ, 1967, № 4.
4. Nakai A. A new method of the rectilinear strip beam formation under space-charge condition. Nucl. Instrum. and Methods, 1967, vol. 54, No. 1.
5. Siekanowicz W. W. Derivation of ideal electrode shapes for electrostatic beam focusing. Radio Corporation America Rev., 1962, vol. 23, No. 1.
6. Kent G. Generalized Brillouin flow. Communication and Electronics, 1960, vol. 79, No. 48.
7. Meltzer B. Single-component stationary electron flow under space charge conditions. J. Electr., 1956, vol. 2, No. 2.
8. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа, ч. 2. М., Физматгиз, 1963.
9. Кратцер А., Франц В. Трансцендентные функции. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
10. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Дифференциальные уравнения математической физики. М., Физматгиз, 1962.
11. Сыровый В. А. О кривизне нулевого формирующего электрода. ПМТФ, 1967, № 5.