Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

ДИФРАКЦИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН НА ДОКЕ КОНЕЧНОЙ ШИРИНЫ

В. Ф. Витюк

(Одесса)

Изучается дифракция волн малой амплитуды, набегающих из бесконечности на неподвижный твердый док конечной ширины, расположенный на поверхности жидкости глубины h. Для нахождения потенциала скорости применяется метод Джонса. Рассмотрены случаи нормального набегания плоских волн на док, а также набегания волн под углом к доку. В частности, вычислены коэффициенты отражения и прохождения волн в случае нормального набегания при условии, что ширина дока велика по сравнению с глубиной жидкости.

Плоская задача о дифракции поверхностных волн на доке конечной ширины была рассмотрена Йоном [1] с позиций теории мелкой воды и Холфордом [2] для волн на бесконечно глубокой жидкости.

В ряде работ [3-6] изучаются пространственные волновые движения жидкости при наличии (твердого или упругого) дока, занимающего полуплоскость свободной поверхности. В работах [7-8] рассмотрен случай затопленного дока. При решении краевых задач, которым должен удовлетворять потенциал скорости волнового движения жидкости, в работах [3-8] используется один из вариантов метода Винера — Хопфа [9].

1. На поверхности жидкости расположен док, являющийся жестким препятствием ширины $2a$ занимающий область $|x| < a, -\infty < z < \infty$ свободной поверхности. Начало координат помещено на дне, ось y направлена вертикально вверх.

Из бесконечности в отрицательном направлении оси Ox под некоторым углом к доку набегает плоская волна

$$F^{(0)}(x, y, z, t) = D \operatorname{ch} C_0 y \operatorname{Re} e^{-i(kz - \varkappa x - \omega t)} \qquad (\varkappa^2 = C_0^2 - k^2)$$

Здесь $\pm iC_0$ — корни уравнения $\beta \cos Ch + \sin Ch = 0$. Потенциал скорости $F(x, y, z, t)$, описывающий движение жидкости, вызванное набегающей волной $F^{(0)}(x, y, z, t)$, должен удовлетворять уравнению Лапласа $\Delta F(x, y, z, t) = 0$ в области, занятой жидкостью, и граничным условиям

$$\partial^2 F / \partial t^2 + g \partial F / \partial y = 0 \qquad \text{при } y = h, \ |x| > a, \ -\infty < z < \infty$$

$$\partial F / \partial y = 0 \qquad \text{при } y = h, \qquad |x| < a, \ -\infty < z < \infty$$

$$\partial F / \partial y = 0 \qquad \text{при } y = 0, \ -\infty < x < \infty, \ -\infty < z < \infty$$

Движение жидкости должно удовлетворять соответствующим условиям на бесконечности и в окрестности кромок дока $(\pm a, h)$. Последнее выражается в требовании ограниченности $\partial F / \partial t$ на кромках дока.

Функция $F(x, y, z, t)$ отыскивается в виде

$$F(x, y, z, t) = \operatorname{Re}\{[\varphi(x, y) + D \operatorname{ch} C_0 y e^{-i\varkappa x}] e^{i(kz-\omega t)}\} \tag{1.1}$$

Для $\varphi(x, y)$ получается

$$\begin{aligned}
&\Delta\varphi - k^2\varphi = 0 && (0 \leqslant y \leqslant h, \ -\infty < x < \infty)\\
&\partial\varphi / \partial y - \beta\varphi = 0 && \text{при } y = h, \ |x| > a \quad (\beta = \omega^2 / g)\\
&\partial\varphi / \partial y = -DC_0 \operatorname{sh} C_0 h e^{-i\varkappa x} && \text{при } y = h, \ |x| < a\\
&\partial\varphi / \partial y = 0 && \text{при } y = 0, \ -\infty < x < \infty\\
&|\varphi(x, y)| < M = \text{const} && \text{при } r = \sqrt{(x \mp a)^2 + (y - h)^2} \to 0
\end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x, y) = D_+ \operatorname{ch} C_0 y e^{i\vartheta_1 x}, \qquad \lim_{x\to-\infty} \varphi(x, y) = D_- \operatorname{ch} C_0 y e^{-i\vartheta_2 x}$$

$$\vartheta_1 = \sigma_1 - i\tau_-, \qquad \vartheta_2 = \sigma_2 + i\tau_+, \qquad \tau_- < 0, \ \tau_+ > 0$$

В конечном результате τ_- и τ_+ устремляются к нулю.

После применения к задаче (1.2) преобразования Фурье и использования обозначений

$$\Phi_+(\alpha, y) = \int_a^\infty \varphi(x, y) e^{i\alpha(x-a)} dx, \qquad \Phi_1(\alpha, y) = \int_{-a}^a \varphi(x, y) e^{i\alpha x} dx$$

$$\Phi_-(\alpha, y) = \int_{-\infty}^{-a} \varphi(x, y) e^{i\alpha(x+a)} dx, \qquad \gamma^2 = \alpha^2 + k^2$$

возникает следующее функциональное уравнение:

$$\Phi_+(\alpha) e^{i\alpha a} + \Phi_1(\alpha) K(\alpha) + e^{-i\alpha a}\Phi_-(\alpha) = -\frac{2DC_0 \operatorname{sh} C_0 h \sin(\alpha - \varkappa) a \operatorname{ch} \gamma h}{(\gamma \operatorname{sh} \gamma h - \beta \operatorname{ch} \gamma h)(\alpha - \varkappa)} \tag{1.3}$$

$$\alpha = \sigma + i\tau, \ \tau_- < \tau < \tau_+, \ -\infty < \sigma < \infty$$

Здесь $\Phi_1(\alpha)$ — целая функция, $K(\alpha)$ — функция регулярная, $\Phi_+(\alpha)$ — функция, регулярная в полуплоскости $\tau > \tau_-$, а $\Phi_-(\alpha)$ — в полуплоскости $\tau < \tau_+$

$$K(\alpha) = \frac{\gamma \operatorname{sh} \gamma h}{\gamma \operatorname{sh} \gamma h - \beta \operatorname{ch} \gamma h}$$

$$\Phi(\alpha, y) = \left\{\frac{\beta}{\gamma \operatorname{sh} \gamma h}[e^{i\alpha a}\Phi_+(\alpha) + e^{-i\alpha a}\Phi_-(\alpha)] - \frac{2DC_0 \operatorname{sh} C_0 h \sin(\alpha - \varkappa) a}{\gamma \operatorname{sh} \gamma h (\alpha - \varkappa)}\right\} \operatorname{ch} \gamma y \tag{1.4}$$

2. Функциональное уравнение (1.3) решается приближенным методом Винера — Хопфа [10].

Факторизуется [3,10] функция $K(\alpha) = K_+(\alpha) K_-(\alpha)$

$$K_+(\alpha) = i \left(\frac{h}{\beta}\right)^{1/2} \frac{k - i\alpha}{\delta + \alpha} \frac{\rho_0}{h} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + h^2k^2 / n^2\pi^2)^{1/2} - i\alpha h / n\pi}{(1 + h^2k^2 / \rho_n^2)^{1/2} - i\alpha h / \rho_n}$$

$$\rho_0^2 = h^2(\delta^2 + k^2), \quad K_-(\alpha) = K_+(-\alpha)$$

$\pm \rho_0/h$ и $\pm i\rho_n/h$ — корни уравнения $\rho \operatorname{sh} \rho h - \beta \operatorname{ch} \rho h = 0$, причем $\rho_n = n\pi + \beta h / n\pi$ при $n \gg 1$.

После умножения (1.3) на $[e^{i\alpha a} K_+(\alpha)]^{-1}$ и на $[e^{-i\alpha a}K_-(\alpha)]^{-1}$ с использованием обозначения

$$\Phi_1(\alpha)\, e^{-i\alpha a} = S_-(\alpha), \quad \Phi_1(\alpha)\, e^{i\alpha a} = S_+(\alpha)$$

получается соответственно два уравнения

$$\frac{\Phi_\pm}{K_\pm} + S_\mp K_\mp + e^{\mp 2i\alpha a}\frac{\Phi_\mp}{K_\pm} = -\frac{2DC_0 \operatorname{sh} C_0 h e^{\mp i\alpha a} \sin(\alpha-\varkappa)\, a \operatorname{ch}\gamma h}{K_\pm(\gamma \operatorname{sh}\gamma h - \beta \operatorname{ch}\gamma h)(\alpha-\varkappa)}$$

Одно уравнение отсюда получается выбором верхнего индекса, а второе — выбором нижнего, причем первое уравнение рассматривается в полосе $\tau_- < \tau < 0$, а второе — в полосе $0 < \tau < \tau_+$.

Применяя теорему разбиения ([9] п. 1,3), теорему Лиувилля и учитывая условия (1.2) на кромках, из этих уравнений получается два интегральных уравнения

$$\frac{\Phi_\pm(\alpha)}{K_\pm(\alpha)} \pm \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty+ic_\mp}^{\infty+ic_\mp} \frac{e^{\mp 2i\xi a}\Phi_\mp(\xi)}{K_\pm(\xi)(\xi-\alpha)}d\xi = \tag{2.1}$$

$$= \mp\frac{DC_0 \operatorname{sh} C_0 h}{\pi i}\int\limits_{-\infty+if_\mp}^{\infty+if_\mp} \frac{e^{\mp i\xi a}\sin(\xi-\varkappa)\, a \operatorname{ch}\eta h d\xi}{K_\pm(\xi)[\eta \operatorname{sh}\eta h - \beta \operatorname{ch}\eta h](\xi-\varkappa)(\xi-\alpha)}$$

$$\tau_- < c_- < \tau < 0, \quad \tau_- < f_- < \tau < 0, \quad 0 < \tau < c_+ < \tau_+, \quad 0 < \tau < f_+ < \tau_+$$

$$\eta^2 = \xi^2 + k^2$$

Выбирая l и m из $(0,\tau_+)$ и полагая $C_+ = -C_- = l$, $f_+ = f_- = m$, после замены ξ на $-\xi$ и α на $-\alpha$ в соответствующих уравнениях (2.1), получается

$$\frac{\Phi_\pm(\pm\alpha)}{K_+(\alpha)} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{il-\infty}^{il+\infty}\frac{e^{2i\xi a}\Phi_\mp(\mp\xi)}{K_-(\xi)(\xi+\alpha)}d\xi = \tag{2.2}$$

$$= \frac{DC_0 \operatorname{sh} C_0 h}{\pi i}\int\limits_{im-\infty}^{im+\infty}\frac{e^{i\xi a}\sin(\xi\pm\varkappa)\, a \operatorname{ch}\eta h d\xi}{K_-(\xi)(\eta \operatorname{sh}\eta h - \beta \operatorname{ch}\eta h)(\xi\pm\varkappa)(\xi+\alpha)}$$

В обоих уравнениях $\tau > \sup(-l, -m)$. Вводятся функции

$$G_+^+(\alpha) = \Phi_+(\alpha) - \Phi_-(-\alpha), \quad G_+^-(\alpha) = \Phi_+(\alpha) + \Phi_-(-\alpha) \tag{2.3}$$

которые в соответствии с (2.2) будут решениями интегральных уравнений

$$\frac{G_+^\lambda(\alpha)}{K_+(\alpha)} \pm \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{il-\infty}^{il+\infty}\frac{e^{2i\xi a}G_+^\lambda(\xi)}{K_-(\xi)(\xi+\alpha)}d\xi = \tag{2.4}$$

$$= \frac{DC_0 \operatorname{sh} C_0 h}{\pi i}\int\limits_{im-\infty}^{im+\infty}\frac{e^{i\xi a}\operatorname{ch}\eta h}{K_-(\xi)(\eta \operatorname{sh}\eta h - \beta \operatorname{ch}\eta h)(\xi+\alpha)}\left[\frac{\sin(\xi+\varkappa)\, a}{\xi+\varkappa} \mp \frac{\sin(\xi-\varkappa)\, a}{\xi-\varkappa}\right]d\xi$$

Символ λ в (2.4) и в последующих выражениях принимает соответственно $+$ или $-$.

Учитывая

$$K_+(\alpha)\,K_-(\alpha)=\frac{\gamma\,\mathrm{sh}\,\gamma h}{\gamma\,\mathrm{sh}\,\gamma h-\beta\,\mathrm{ch}\,\gamma h},$$

уравнения (2.4) представим так

$$\frac{G_+^{\lambda}(\alpha)}{K_+(\alpha)}\pm\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{il-\infty}^{il+\infty}\frac{G_+^{\lambda}(\xi)\,e^{2i\xi a}\,[\eta\,\mathrm{sh}\,\eta h-\beta\,\mathrm{ch}\,\eta h]\,K_+(\xi)}{\eta\,\mathrm{sh}\,\eta h\,(\xi+\alpha)}\,d\xi= \tag{2.5}$$

$$=\frac{DC_0\,\mathrm{sh}\,C_0h}{\pi i}\int\limits_{im-\infty}^{im+\infty}\frac{e^{i\xi a}\,\mathrm{ch}\,\eta h K_+(\xi)}{\eta\,\mathrm{sh}\,\eta h\,(\xi+\alpha)}\left[\frac{\sin(\xi+\varkappa)\,a}{\xi+\varkappa}\mp\frac{\sin(\xi-\varkappa)\,a}{\xi-\varkappa}\right]d\xi$$

Подынтегральные функции в качестве особенностей имеют полюсы

$$\xi=ik,\ i\mu_n,\ \mu_n=[k^2+n^2\pi^2/h^2]^{1/2}\quad(n=1,\ 2,\ldots)$$

Используя теорию вычетов, (2.5) запишем в виде

$$\frac{G_+^{\lambda}(\alpha)}{K_+(\alpha)}\pm\frac{i\beta}{2kh}\frac{G_+^{\lambda}(ik)\,e^{-2ka}K_+(ik)}{ik+\alpha}\pm\frac{i\beta}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{G_+^{\lambda}(i\mu_n)\,e^{-2\mu_n a}K_+(i\mu_n)}{\mu_n(i\mu_n+\alpha)}=$$

$$=-\frac{i2DC_0\,\mathrm{sh}\,C_0h}{h}\left\{\frac{1}{2k}\frac{K_+(ik)}{ik+\alpha}\left[\frac{\sin(ik+\varkappa)\,a}{ik+\varkappa}\mp\frac{\sin(ik-\varkappa)\,a}{ik-\varkappa}\right]e^{-ka}+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_+(i\mu_n)\,e^{-\mu_n a}}{\mu_n(i\mu_n+\alpha)}\left[\frac{\sin(i\mu_n+\varkappa)\,a}{i\mu_n+\varkappa}\mp\frac{\sin(i\mu_n-\varkappa)\,a}{i\mu_n-\varkappa}\right]\right\} \tag{2.6}$$

Если положить в (2.6) $\alpha=ik,\ i\mu_j\ (j=1,2,..)$, то для определения $G_+^{\lambda}(\alpha)$ в этих точках получаются бесконечные системы алгебраических уравнений

$$G_+^{\lambda}(ik)=\left[\frac{1}{K_+(ik)}\pm\frac{\beta K_+(ik)}{4k^2h}e^{-2ka}\right]^{-1}\left\{\mp\frac{\beta}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-2\mu_n a}G_+^{\lambda}(i\mu_n)\,K_+(i\mu_n)}{\mu_n(\mu_n+k)}-\right.$$

$$-\frac{2DC_0\,\mathrm{sh}\,C_0h}{h}\left[\frac{1}{2k}\frac{K_+(ik)}{2k}\left(\frac{\sin(ik+\varkappa)\,a}{ik+\varkappa}\mp\frac{\sin(ik-\varkappa)\,a}{ik-\varkappa}\right)e^{-ka}+\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_+(i\mu_n)\,e^{-\mu_n a}}{\mu_n(\mu_n+k)}\left(\frac{\sin(i\mu_n+\varkappa)\,a}{i\mu_n+\varkappa}\mp\frac{\sin(i\mu_n-\varkappa)\,a}{i\mu_n-\varkappa}\right)\right]\right\}$$

$$\frac{G_+^{\lambda}(i\mu_j)}{K_+(i\mu_j)}\pm\frac{\beta K_+(ik)}{2kh}\,\frac{G_+^{\lambda}(ik)\,e^{-2ka}}{k+\mu_j}\pm\frac{\beta}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{G_+^{\lambda}(i\mu_n)\,e^{-2\mu_n a}K_+(i\mu_n)}{\mu_n(\mu_n+\mu_j)}=$$

$$=-\frac{2DC_0\,\mathrm{sh}\,C_0h}{h}\left\{\frac{1}{2k}\frac{K_+(ik)}{k+\mu_j}\left[\frac{\sin(ik+\varkappa)\,a}{ik+\varkappa}\mp\frac{\sin(ik-\varkappa)\,a}{ik-\varkappa}\right]e^{-ka}+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_+(i\mu_n)\,e^{-\mu_n a}}{\mu_n(\mu_n+\mu_j)}\left[\frac{\sin(i\mu_n+\varkappa)\,a}{i\mu_n+\varkappa}\mp\frac{\sin(i\mu_n-\varkappa)\,a}{i\mu_n-\varkappa}\right]\right\}$$

$$(j=1,\ 2,\ldots) \tag{2.7}$$

Бесконечные системы (2.7) вполне регулярны в случае

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\beta}{h}\frac{K_+(i\mu_n)}{\mu_n}e^{-2\mu_n a}K_+(i\mu_j)\left\{\pm\frac{1}{\mu_n+\mu_j}-\right.\right. \tag{2.8}$$

$$\left.\left.-\frac{2k\beta K_+^2(ik)}{[4k^2he^{2ka}\pm\beta K_+^2(ik)](k+\mu_n)(k+\mu_j)}\right\}\right|<1 \qquad (j=1,2,\ldots)$$

т. е. когда сумма модулей коэффициентов в каждой строке меньше единицы [11].

Соотношение (2.8) можно рассматривать как условие для определения величины a / h, обеспечивающей регулярность систем (2.7), т. е. в каждом конкретном случае можно указать границу значений a / h, при которых системы вполне регулярны.

При выполнении условий (2.8) системы (2.7) вполне регулярны, свободные члены их ограничены, и поэтому они имеют ограниченные решения, которые могут быть найдены методом последовательных приближений [11].

Решив системы (2.7) и использовав (2.3), можно определить $\Phi_+(\alpha)$ и $\Phi_-(\alpha)$.

3. Если, например, ограничиться случаем $2a / h \gg 1$, т. е. считать, что ширина дока превосходит глубину жидкости, то для $G_+^\lambda(\alpha)$ из (2.6) можно записать

$$G_+^\lambda(\alpha)=-iK_+(\alpha)\left\{\frac{e^{-ka}}{kh}\frac{K_+(ik)}{ik+\alpha}\left[\pm\frac{\beta}{2}G_+^\lambda(ik)e^{-ka}+DC_0\operatorname{sh}C_0h\left(\frac{\sin(ik+\varkappa)a}{ik+\varkappa}\mp\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\mp\frac{\sin(ik-\varkappa)a}{ik-\varkappa}\right)\right]+i\frac{2DC_0\operatorname{sh}C_0h}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_+(i\mu_n)}{\mu_n(i\mu_n+\alpha)}\left[\frac{e^{-\varkappa a}}{i\mu_n+\varkappa}\mp\frac{e^{i\varkappa a}}{i\mu_n-\varkappa}\right]\right\} \tag{3.1}$$

Для $G_+^\lambda(ik)$ в этом случае из (2.7) получаются выражения

$$G_+^\lambda(ik)=-\frac{2DC_0\operatorname{sh}C_0h}{h}\left[\frac{1}{K_+(ik)}\pm\frac{\beta e^{-2ka}}{4k^2h}K_+(ik)\right]^{-1}\left\{\frac{K_+(ik)}{k^2}\left[\frac{\sin(ik+\varkappa)a}{ik+\varkappa}\mp\right.\right.$$

$$\left.\left.\mp\frac{\sin(ik-\varkappa)a}{ik-\varkappa}\right]e^{-ka}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_+(i\mu_n)}{\mu_n(\mu_n+k)}\left[\frac{e^{-i\varkappa a}}{i\mu_n+\varkappa}\mp\frac{e^{i\varkappa a}}{i\mu_n-\varkappa}\right]\right\}$$

Тогда из (3.1) с учетом (2.3) для $\Phi_+(\alpha)$ и $\Phi_-(\alpha)$

$$\Phi_+(\alpha)=-iK_+(\alpha)\left\{\frac{e^{-ka}}{kh}\frac{K_+(ik)}{ik+\alpha}\left[\frac{\beta}{2}\frac{G_+^+(ik)-G_+^-(ik)}{2}e^{-ka}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+DC_0\operatorname{sh}C_0h\frac{\sin(ik-\varkappa)a}{ik-\varkappa}\right]+\frac{iDC_0\operatorname{sh}C_0h}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_+(i\mu_n)}{\mu_n(i\mu_n+\alpha)}\frac{e^{-i\varkappa a}}{i\mu_n+\varkappa}\right\} \tag{3.2}$$

$$\Phi_-(\alpha)=-iK_-(\alpha)\left\{\frac{e^{-ka}}{kh}\frac{K_+(ik)}{ik-\alpha}\left[-\frac{\beta}{2}\frac{G_+^+(ik)+G_+^-(ik)}{2}e^{-ka}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+DC_0\operatorname{sh}C_0h\frac{\sin(ik-\varkappa)a}{ik-\varkappa}\right]+\frac{iDC_0\operatorname{sh}C_0h}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_+(i\mu_n)}{\mu_n(i\mu_n-\alpha)}\frac{e^{i\varkappa a}}{i\mu_n-\varkappa}\right\} \tag{3.3}$$

После применения обратного преобразования Фурье к (1.4) с учетом (3.2) и (3.3) решение задачи (1.2) записывается в виде

при $x < -a$

$$\varphi(x, y) = (a_0 + ib_0)\operatorname{ch} C_0 y e^{-i\delta x}\left\{\frac{e^{-ka}}{kh}\frac{K_+(ik)}{ik-\delta}\left[\frac{\beta}{2}\frac{G_+^+(ik)+G_+^-(ik)}{2} -\right.\right.$$
$$\left.\left.- DC_0\operatorname{sh}C_0h\,\frac{\sin(ik-\varkappa)a}{ik-\varkappa}\right] - \frac{iDC_0\operatorname{sh}C_0h}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_+(i\mu_n)}{\mu_n(i\mu_n-\delta)}\frac{e^{i\varkappa a}}{i\mu_n-\varkappa}\right\} -$$
$$-\sum_{p=1}^{\infty}(a_p+ib_p)e^{\nu_p x}\cos\frac{\rho_p y}{h}\left\{\frac{e^{-ka}}{kh}\frac{K_+(ik)}{k-\nu_p}\left[\frac{\beta}{2}\frac{G_+^+(ik)+G_+^-(ik)}{2} -\right.\right.$$
$$\left.\left.- DC_0\operatorname{sh}C_0h\,\frac{\sin(ik-\varkappa)a}{ik-\varkappa}\right] - \frac{iDC_0\operatorname{sh}C_0h}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_+(i\mu_n)}{\mu_n(\mu_n-\nu_p)}\frac{e^{i\varkappa a}}{i\mu_n-\varkappa}\right\} \qquad (3.4)$$

при $|x| < a$

$$\varphi(x, y) = 2DC_0h\operatorname{sh}C_0h\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{-\mu_n a}}{\mu_n(n^2\pi^2+C_0^2h^2)}\left[\mu_n\cos(i\mu_n x+\varkappa a) -\right.$$
$$\left.-\varkappa\sin(i\mu_n x+\varkappa a)\right]\cos\frac{n\pi y}{h} + \frac{e^{-ka}}{kh}\left\{\frac{\beta}{2}\left[G_+^+(ik)\operatorname{sh}kx + G_+^-(ik)\operatorname{ch}kx\right] +\right.$$
$$\left.+\frac{D\operatorname{sh}C_0h}{C_0}\left[k\cos(ikx+\varkappa a) - \varkappa\sin(ikx+\varkappa a)\right]\right\} - De^{-i\varkappa x}\operatorname{ch}C_0y \qquad (3.5)$$

при $x > a$

$$\varphi(x, y) = (a_0 + ib_0)\operatorname{ch} C_0 y e^{i\delta x}\left\{\frac{e^{-ka}}{kh}\left[\frac{\beta}{2}\frac{G_+^-(ik)-G_+^+(ik)}{2} -\right.\right.$$
$$\left.\left.- DC_0\operatorname{sh}C_0h\,\frac{\sin(ik+\varkappa)a}{ik+\varkappa}\right] - \frac{iDC_0\operatorname{sh}C_0h}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_+(i\mu_n)}{\mu_n(i\mu_n+k)}\frac{e^{-i\varkappa a}}{i\mu_n+\delta}\right\} -$$
$$-\sum_{p=1}^{\infty}(a_p+ib_p)e^{-\nu_p x}\cos\frac{\rho_p y}{h}\left\{\frac{e^{-ka}}{kh}\frac{K_+(ik)}{k-\nu_p}\left[\frac{\beta}{2}\frac{G_+^-(ik)-G_+^+(ik)}{2} -\right.\right.$$
$$\left.\left.- DC_0\operatorname{sh}C_0h\,\frac{\sin(ik+\varkappa)a}{ik+\varkappa}\right] - \frac{iDC_0\operatorname{sh}C_0h}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_+(i\mu_n)}{\mu_n(\mu_n-\nu_p)}\frac{e^{-i\varkappa a}}{i\mu_n+\varkappa}\right\}$$

Здесь

$$\nu_p = [k^2 + \rho_p^2/h^2]^{1/2}, \quad a_0 + ib_0 = \frac{\beta\rho_0^2 e^{-i\delta a}}{K_+(\delta)\,\delta h\,(\beta^2h^2 - \beta h - \rho_0)\operatorname{ch}\rho_0}$$

$$a_p + ib_p = \frac{\beta\rho_p^2 e^{\nu_p a}}{K_+(i\nu_p)\,\nu_p h\,(\beta h - \beta^2h^2 - \rho_p^2)\cos\rho_p}$$

Устремляя τ_- и τ_+ к нулю и учитывая (3.4), (3.5), (3.6) и (1.1), получаем окончательное выражение потенциала скорости соответственно для прошедшей волны, движения жидкости под доком и отраженной волны.

4. Случай нормального набегания волн на док ($k = 0$) должен быть рассмотрен отдельно, так как в полученном решении невозможен предельный переход $k \to 0$ из-за появления в ядре

$$K(\alpha) = \frac{\alpha\operatorname{sh}\alpha h}{\alpha\operatorname{sh}\alpha h - \beta\operatorname{ch}\alpha h}$$

функционального уравнения (1.3) в этом случае корня 2-й кратности при $\alpha = 0$, что нарушает регулярность $K(\alpha)$ в полосе $\tau_- < \tau < \tau_+$, $-\infty < \sigma < \infty$, и в этом случае нельзя факторизовать функцию $K(\alpha) = K_+(\alpha)K_-(\alpha)$ таким образом, чтобы $K_+(\alpha)$ и $K_-(\alpha)$ были регулярны и не имели нулей в этой полосе. Указанная трудность может быть преодолена следующим образом. Ядро $K(\alpha)$ является коэффициентом при неизвестной целой функции $\Phi_1(\alpha)$ в рассматриваемой полосе, что позволяет α^2 отнести к $\Phi_1(\alpha)$, тогда функциональное уравнение (1.3) для этого случая запишется в виде

$$e^{i\alpha a}\Phi_+(\alpha) + \Phi_1{}^*(\alpha)\,\frac{\operatorname{sh}\alpha h}{\alpha(\alpha\operatorname{sh}\alpha h - \beta\operatorname{ch}\alpha h)} + e^{-i\alpha a}\Phi_-(\alpha) =$$

$$= -\,\frac{2DC_0\operatorname{sh}C_0h\sin(\alpha-\varkappa)\,a\operatorname{ch}\alpha h}{(\alpha\operatorname{sh}\alpha h - \beta\operatorname{ch}\alpha h)(\alpha-\varkappa)}, \qquad \Phi_1{}^*(\alpha) = \alpha^2\Phi_1(\alpha)$$

Факторизация функции $K^*(\alpha)$ дает

$$K^*(\alpha) = \frac{\operatorname{sh}\alpha h}{\alpha(\alpha\operatorname{sh}\alpha h - \beta\operatorname{ch}\alpha h)} = K_+{}^*(\alpha)\,K_-{}^*(\alpha)$$

$$K_+{}^*(\alpha) = \left(\frac{h}{\beta}\right)^{1/2}\frac{i}{\delta+\alpha}\,\frac{\rho_0}{h}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1 - i\alpha h/n\pi}{1 - i\alpha h/\rho_n}$$

$$K_-{}^*(\alpha) = K_+{}^*(-\alpha), \quad \rho_0/h = C_0 = \varkappa = \delta$$

$$\pm\rho_0/h \text{ и } \pm i\rho_n/h \text{ корни } \rho\operatorname{th}\rho h = \beta$$

Уравнения (2.1) в этом случае перепишутся в виде

$$\frac{\Phi_\pm(\alpha)}{K_\pm{}^*(\alpha)} \pm \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty+ic_\mp}^{\infty+ic_\mp}\frac{e^{\mp 2i\xi a}\Phi_\mp(\xi)}{K_\pm{}^*(\xi)(\xi-\alpha)}\,d\xi \pm$$

$$\pm\,\frac{DC_0\operatorname{sh}C_0h}{\pi i}\int\limits_{-\infty+if_\mp}^{\infty+if_\mp}\frac{e^{\mp i\xi a}\sin(\xi-\varkappa)\,a\operatorname{ch}\xi h\,d\xi}{K_\pm{}^*(\xi)(\xi\operatorname{sh}\xi h - \beta\operatorname{ch}\xi h)(\xi-\varkappa)(\xi-\alpha)} = B_\pm$$

Здесь B_+ и B_- — константы, которые должны быть определены из граничных условий [9].

В предположении $2a/h \gg 1$ для $G_+{}^\lambda(\alpha)$ при $k = 0$ получается следующее выражение:

$$G_+{}^\lambda(\alpha) = K_+{}^*(\alpha)\Big\{B_+ \pm B_- - DC_0\operatorname{sh}C_0h\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{in\pi+\alpha h}\,K_+{}^*\left(\frac{in\pi}{h}\right)\times$$

$$\times\left[\frac{e^{-i\varkappa a}}{in\pi+\varkappa h} \mp \frac{e^{i\varkappa a}}{in\pi-\varkappa h}\right]\Big\}$$

После операций, аналогичных ранее выполненным, искомое решение запишется

$$F^{(1)}(x, y, t) = |(T_0 + iR_0)\,\psi_+(-\delta)|\operatorname{ch}C_0y\cos(\varkappa x - \omega t) +$$

$$+\sum_{p=1}^{\infty}|(T_p + iR_p)\,\psi_+(-i\nu_p)|\cos\nu_p y\cos\omega t$$

$$F^{(2)}(x, y, t) =$$

$$= \left\{ \left| D \operatorname{sh} C_0 h \frac{i\varkappa a + 1}{\varkappa h} e^{-i\varkappa a} - i \frac{K_-^*(0)\,[\psi_+'(0) + ia\psi_+(0)] - \psi_+(0) K_-^{*\prime}(0)}{K_-^{*2}(0)} \right| + \right.$$

$$+ \beta \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p\pi} \exp \frac{-p\pi a}{h} \cos \frac{p\pi y}{h} \left| K_+^*\left(\frac{ip\pi}{h}\right) \right| \left[\left| \psi_+\left(\frac{ip\pi}{h}\right) \right| \exp \frac{p\pi x}{h} + \right.$$

$$\left. + \left| \psi_-\left(-\frac{ip\pi}{h}\right) \right| \exp \frac{-p\pi x}{h} \right] - x \left| \frac{\psi_+(0)}{K_-^*(0)} \right| -$$

$$\left. - 2DC_0 h \operatorname{sh} C_0 h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\pi} \exp \frac{-n\pi a}{h} \cos \frac{n\pi y}{h} \frac{\operatorname{ch}(n\pi x / h)}{\sqrt{n^2\pi^2 + \varkappa^2 h^2}} \right\} \cos \omega t$$

$$F^{(3)}(x, y, t) = D \left| 1 + \frac{(T_0 + iR_0)\psi_-(\delta)}{D} \right| \operatorname{ch} C_0 y \cos(\varkappa x + \omega t) +$$

$$+ \sum_{p=1}^{\infty} \left| (T_p + iR_p)\, \psi_-(i\nu_p) \right| e^{\nu_p x} \cos \nu_p y \cos \omega t$$

где

$$T_0 + iR_0 = \frac{i\beta\rho_0 e^{-i\delta a}}{\delta^2 (\beta h - \beta^2 h^2 + \rho_0^2) \operatorname{ch} \rho_0 K_+^*(\delta)}, \quad \nu_p = \rho_p / h$$

$$T_p + iR_p = \frac{\beta\rho_p e^{\nu_p a}}{\nu_p^2 (\beta h - \beta^2 h^2 - \rho_p^2) \cos \rho_p K_+^*(i\nu_p)}, \quad \psi_+(\alpha) = \frac{\Phi_+}{K_+^*}, \quad \psi_-(\alpha) = \frac{\Phi_-}{K_-^*}$$

$$B_+ = i \frac{\psi_+'(0) + \psi_-'(0)}{2a} + DC_0 \operatorname{sh} C_0 h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-i\varkappa a}}{i\varkappa h - n\pi} K_+^*\left(\frac{in\pi}{h}\right) -$$

$$- \frac{[aK_+^*(0) - iK_+^*(0)]}{ah} D \operatorname{sh} C_0 h \sin \varkappa a - \frac{iD \operatorname{sh} C_0 h K_+^{*\prime}(0)}{2ah} \left(a \cos \varkappa a - \frac{\sin \varkappa a}{\varkappa} \right)$$

$$B_- = D \operatorname{sh} C_0 h \left\{ C_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_+^*\left(\frac{in\pi}{h}\right) \left[\frac{e^{-i\varkappa a}}{i\varkappa h - n\pi} - \frac{e^{i\varkappa a}}{i\varkappa h + n\pi} \right] - 2K_+^*(0) \frac{\sin \varkappa a}{h} \right\} - B_+$$

Коэффициенты отражения и прохождения волн вычисляются по формулам [12]

$$f_r = \frac{|F^{(1)}|}{|F^{(0)}|} = \frac{|(T_0 + iR_0)\psi_+(-\delta)|}{D}, \qquad f_t = \frac{|F^{(3)}|}{|F^{(0)}|} = \left| \frac{(T_0 + iR_0)\psi_-(\delta)}{D} + 1 \right|$$

где $|F^{(1)}|$, $|F^{(3)}|$, $|F^{(0)}|$ соответственно амплитуды отраженной, прошедшей и набегающей волн.

Давление жидкости под доком определяется формулой

$$p(x, y, t) = -\rho \frac{\partial F^{(2)}(x, y, t)}{\partial t} - \rho g y$$

Для значений параметров

$D = 0{,}25\ м^2 / сек$, $h = 1\ м$, $a = 2\ м$, $\omega = 4{,}34\ сек^{-1}$, $\varkappa = 2\ м^{-1}$, $t = 1\ сек$

вычисления дают следующее распределение давления p ($кГ/м^2$) вдоль x $м$:

$x =$	-2	-1	0	1	2
$p =$	-50	0	67	144	230

Из этих данных видно, что изменение давления вблизи правой кромки дока больше, чем вблизи левой, т. е. док действует на волны как демпфер. В этом случае $f_l = 0{,}5$, $f_r = 0{,}86$. Следует заметить, что, согласно результатам работы [1], давление под доком меняется линейно в отличие от нелинейного характера распределения давления, изучаемого в данной работе. Нелинейность объясняется тем, что здесь учтено гидродинамическое давление, в то время как в работе [1] учитывается гидростатическое давление.

Автор благодарит А. А. Каспарьянца за постоянное внимание и руководство работой.

Поступила 30 VI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. John F. On the motion of floating bodies. Comm. Pure Appl. Math., 1949, vol. 2, No. 1.
2. Holford R. L. Short surface waves in the presence of a finite dock. I, II. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1964, vol. 60, No. 4.
3. Heins A. E. Water waves over a channel of finite depth with a dock. Amer. J. Math., 1948, vol. 70, No. 4.
4. Weitz M., Keller J. B. Reflection of water waves from floating ice in water of finite depth. Comm. Pure Appl. Math., 1950, vol. 3, No. 3.
5. Heins A. E. Some remarks on the coupling of two ducts. J. Math. Phys., 1951, vol. 30, No. 3.
6. Heins A. E. The scope and limitation of the method of Wiener and Hopf. Comm. Pure Appl. Math., 1956, vol. 9, No. 3.
7. Heins A. E. Water waves over a channel of finite depth with a submerged plane barrier. Quart. Appl. Math., 1953, vol. 11, No. 2.
8. Greene T. R., Heins A. E. Water waves over a channel of infinite depth. Quart. Appl. Math., 1953, 11, 201—214.
9. Нобл Б. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
10. Jones D. S. A simplying technique in the solution of a class of diffraction problems. Quart. J. Math. Ser. 2, 1952, vol. 3, No. 1.
11. Канторович Л. В., Крылов В. Н. Приближенные методы высшего анализа. Изд. 3-е. М.— Л., Гостехиздат, 1949.
12. Стокер Дж. Дж. Волны на воде. Математическая теория и приложения. М., Изд-во иностр. лит., 1959.