Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

СТАТИСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ДВИЖЕНИЯ В ЛАГРАНЖЕВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Б. Я. Любимов, Ф. Р. Улинич

(Москва)

Рассматривается статистическая динамика турбулентного движения в переменных Лагранжа. Система зацепляющихся уравнений для лагранжевых распределений координат и скоростей жидких частиц расщепляется на основе представления о независимости крупно- и мелкомасштабных движений. Получено замкнутое уравнение для плотности совместной вероятности координаты скорости одной жидкой частицы. В однородном случае последнее оказывается совместным нормальным распределением координаты и скорости.

При статистическом описании ряда явлений, характерных для турбулентного движения несжимаемой жидкости, необходимо пользоваться переменными Лагранжа, рассматривать движение жидких частиц — выделенных точек объема, движущихся в соответствии с уравнениями гидродинамики. Одной из таких задач является задача турбулентной диффузии — распространения пассивной примеси в турбулентном течении. Тем, что примесь может участвовать в молекулярной диффузии, в ряде случаев можно пренебречь. Если примесь считать непрерывно распределенной, то задача турбулентной диффузии состоит в статистическом описании поля концентрации n (X, t). Такая характеристика поля концентрации, как плотность вероятности F_1 (n, X, t) найти в точке X в момент t концентрацию, равную n, связана, например, с плотностью вероятности распределения P_1 (X, t; a, t_0) координаты X жидкой частицы при $t = t_0$ в точке a

$$F_1(n, \mathbf{X}, t) = \int P_1(\mathbf{X}, t; \mathbf{a}, t_0)\, \delta(n - n(\mathbf{a}, t_0))\, d\mathbf{a}$$

Средняя концентрация при наличии стационарного точечного источника Q в точке a определяется также через P_1

$$\langle n(\mathbf{X}, t)\rangle = Q \int\limits_{-\infty}^{t} P_1(\mathbf{X}, t; \mathbf{a}, t_0)\, dt_0$$

Здесь и далее скобки означают среднее по ансамблю.

При решении другого класса задач нельзя ограничиться рассмотрением P_1 — характеристики движения одной частицы. Такой задачей является, например, относительная диффузия — турбулентная диффузия облака примеси, описываемая P_2 ($\mathbf{X}_1$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{X}_2$, $\mathbf{a}_2$, t, t_0) — плотностью совместного распределения вероятности координат $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{X}_2$ двух жидких частиц, находящихся при $t = t_0$ в $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$. Дисперсия облака примеси связана с относительной дисперсией двух жидких частиц

$$\sigma = \int (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)^2 P_2 n(\mathbf{a}_1, t_0)\, n(\mathbf{a}_2, t_0)\, d\mathbf{X}_1 d\mathbf{X}_2 d\mathbf{a}_1 d\mathbf{a}_2$$

Неизвестными в уравнениях Лагранжа являются координаты X^α ($\mathbf{a},t$)-жидких частиц в момент t, находящихся при $t = t_0$ в точках a^β. Переход от производных по эйлеровым координатам $\mathbf{X}$ к производным по начальным $\mathbf{a}$ осуществляется при помощи матрицы

$$\frac{\partial a^\alpha}{\partial X^\beta} = \left| \frac{\partial X^m}{\partial a^n} \right|^{-1} \frac{\partial X^{\alpha_1}}{\partial a^{\beta_1}} \frac{\partial X^{\alpha_2}}{\partial a^{\beta_2}} \varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha} \varepsilon_{\beta_1\beta_2\beta}$$

Якобиан перехода $|\partial X^m / \partial a^n|$ от переменных X^m к a^n равен единице в несжимаемой жидкости. Уравнения гидродинамики несжимаемой вязкой жидкости, в которых давление выражено через скорость

$$\frac{\partial V^\alpha}{\partial t} + V^\beta \frac{\partial V^\alpha}{\partial X^\beta} = -\int \frac{\partial V^\beta}{\partial X_2{}^\gamma} \frac{\partial V^\gamma}{\partial X_2{}^\beta} G^\alpha(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)\, d\mathbf{X}_2 + \nu \Delta V^\alpha$$

в лагранжевых переменных приобретают следующий вид:

$$\frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial t^2} = -\int \frac{\partial^2 X^\beta}{\partial t \partial a^s} \frac{\partial a^s}{\partial X^\gamma} \frac{\partial^2 X^\gamma}{\partial t \partial a^k} \frac{\partial a^k}{\partial X^\beta} G^\alpha d\mathbf{a}_2 + \nu \frac{\partial a^k}{\partial X^\beta} \frac{\partial}{\partial a^k} \left(\frac{\partial a^l}{\partial X^\beta} \frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial t \partial a^l} \right)$$

Давление выражено через скорость с помощью функции Грина G задачи Неймана теории потенциала, $G^\alpha = \partial G / \partial X^\alpha{}_1$.

Основой статистического описания турбулентного движения в переменных Лагранжа является совокупность функций распределения координат и скоростей P_n ($\mathbf{V}_1, \mathbf{X}_1 \mathbf{a}_1, t_1, \ldots, \mathbf{V}_n, \mathbf{X}_n, \mathbf{a}_n, t$) таких, что вероятность dW, скорости и координаты n жидких частиц, находящихся при $t = t_0$ в точках $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, в моменты $t_1, \ldots, t_n$ находятся в пределах $d\mathbf{V}_1 d\mathbf{X}_1 \ldots d\mathbf{V}_n \mathbf{X}_n$, есть $P_n d\mathbf{V}_1 d\mathbf{X}_1 \ldots d\mathbf{V}_n d\mathbf{X}_n$. В дальнейшем рассматривается случай $t_1 = t_2 = \ldots = t_n = t$.

Вывод уравнений эволюции для функций P_n и дополнительных условий удобно производить, представляя P_n как среднее по ансамблю от

$$\prod_{i=1}^{n} \delta(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}(a_i, t))\, \delta(\mathbf{V}_i - \mathbf{X}^\cdot(\mathbf{a}_i, t))$$

Нетрудно убедиться, что P_n нормированы следующим образом:

$$\int P_{n+1} d\mathbf{V}_{n+1} dX_{n+1} = P_n, \qquad \int P_1 d\mathbf{V}_1 dX_1 = 1$$

Поле X^α ($\mathbf{a}$, t) непрерывно, поэтому $P_{n+1} = P_n \delta(\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_k) \delta(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_k)$, при $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_k$. Последнее, вообще говоря, неверно при $\nu = 0$, когда допустимы тангенциальные разрывы.

Связь между эйлеровым полем скоростей V^α ($\mathbf{X}$, t) и лагранжевыми траекториями имеет вид

$$\frac{\partial X^\alpha}{\partial t} = V^\alpha(\mathbf{X}(\mathbf{a}, t), t) \tag{1}$$

При статистическом описании турбулентности с эйлеровой точки зрения рассматриваются [1,2] функции распределения $F_n(\mathbf{V}_1, \mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{V}_n, \mathbf{X}_n, t)$, являющиеся плотностью вероятности того, что скорости потока в неподвижных точках $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$ в момент t лежат в пределах $d\mathbf{V}_1 \ldots d\mathbf{V}_n$. Ясно, что вероятность наблюдать в фиксированной точке $\mathbf{X}$ скорость $\mathbf{V}$ определяется суммарной по всем жидким частицам лагранжевой вероятностью иметь в точке $\mathbf{X}$ скорость $\mathbf{V}$. Действительно, проинтегрируем P_n по начальным координатам $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$

$$\left\langle \int \prod_{i=1}^{n} \delta(\mathbf{V}_i - \mathbf{X}^{\boldsymbol{\cdot}}(\mathbf{a}_i, t))\, \delta(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}(\mathbf{a}_i, t))\, d\mathbf{a}_1 \ldots d\mathbf{a}_n \right\rangle \tag{2}$$

Интегрирование можно провести, переходя к новым переменным $\mathbf{X}(\mathbf{a}_i, t)$, якобиан этого образования равен единице. Имеем вместо (2) при использовании (1)

$$\left\langle \prod_{i=1}^{n} \delta(\mathbf{V}_i - \mathbf{V}(X_i, t)) \right\rangle$$

Таким образом

$$E_n = \int P_n(\mathbf{V}_1, X_1, \mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{V}_n, X_n, \mathbf{a}_n, t)\, d\mathbf{a}_1 \cdots d\mathbf{a}_n \tag{3}$$

Интегрирование по начальным координатам осуществляется по объему, занимаемому жидкостью.

Описанным способом возможно построение функций распределения, m аргументов которых — эйлеровы, а $n - m$ — лагранжевы.

Частным случаем (3) в однородной турбулентности при $n = 1$ является установленная Ламли теорема [5] о том, что в случае однородной турбулентности в несжимаемой жидкости распределение вероятностей для эйлеровой и лагранжевой скорости совпадают.

Лагранжевы распределения обладают своеобразным свойством, связанным с несжимаемостью жидкости, выражающимся в том, что P_n можно рассматривать как распределение не X, а начальной координаты a, так как

$$\delta(\mathbf{V}_i - \mathbf{X}^{\boldsymbol{\cdot}}(\mathbf{a}_i, t))\, \delta(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}(\mathbf{a}_i, t)) = \delta(\mathbf{a}_i, -\mathbf{a}(\mathbf{X}_i, t))\, \delta(\mathbf{V}_i - \mathbf{V}(\mathbf{X}_i, t))$$

Таким образом, P_n является еще и плотностью вероятности dW того, что в фиксированной точке $\mathbf{X}_i$ скорость равна $\mathbf{V}_i$ и частицы, имеющие эти скорости, пришли из случайных точек $\mathbf{a}_i$ соответственно $dW = P_n d\mathbf{V}_1 d\mathbf{a}_1 \ldots d\mathbf{V}_n d\mathbf{a}_n$.

Уравнения движения начальных координат $a\,(X, t)$ как функций конечных и времени имеют вид

$$\frac{\partial a^\alpha}{\partial t} + V^\beta(\mathbf{X}, t) \frac{\partial a^\alpha}{\partial X^\beta} = 0, \qquad a^\alpha(\mathbf{X}, t_0) = X^\alpha \tag{4}$$

С этой точки зрения P_n можно представить как среднее по ансамблю от

$$\prod_{i=1}^{n} \delta(\mathbf{V}_i - \mathbf{V}(\mathbf{X}_i, t))\, \delta(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}(\mathbf{X}_i, t)) \tag{5}$$

Уравнениями движения случайных величин V^α (X, t) и a^α (X, t) являются уравнения Навье — Стокса и уравнения переноса начальных координат (4). Дифференцируя (5) по времени t и используя уравнения движения для V^α (X, t) и d^α (X, t), можно получить систему зацепляющихся уравнений для P_n в более компактном по сравнению с [3] виде

$$\frac{\partial P_n}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial P_n}{\partial X_i{}^\alpha}V_i{}^\alpha+\frac{\partial}{\partial V_i{}^\alpha}\int\frac{\partial^2 P_{n+1}}{\partial X_{n+1}{}^\beta\partial X_{n+1}{}^\gamma}V_{n+1}{}^\beta V_{n+1}{}^\gamma G^\alpha(\mathbf{X}_i,\mathbf{X}_{n+1})\times$$
$$\times d\mathbf{V}_{n+1}d\mathbf{X}_{n+1}d\mathbf{a}_{n+1}+\nu\frac{\partial}{\partial V_i{}^\alpha}\int\delta(\mathbf{X}_i-\mathbf{X}_{n+1})\,\Delta_{n+1}P_{n+1}V_{n+1}^\alpha d\mathbf{V}_{n+1}d\mathbf{X}_{n+1}d\mathbf{a}_{n+1}=0 \tag{6}$$

Цепочка уравнений для F_n получается из (6) интегрированием по начальным координатам $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$. Условие несжимаемости принимает форму

$$\int\frac{\partial P_n}{\partial X_i{}^\alpha}V_i{}^\alpha d\mathbf{V}_i d\mathbf{a}_i=0$$

Функции P_n отличаются своеобразной зависимостью от аргументов $\mathbf{X}_i$, которая обусловлена тем, что $\mathbf{X}_i$ не является случайной величиной в (5). В частности, интеграл $\int P_n d\mathbf{V}_i d\mathbf{a}_i$ не зависит от $\mathbf{X}_i$. Из определения P_n вытекает условие, выражающее это обстоятельство

$$\frac{\partial P_n}{\partial X_i{}^\alpha}=-\frac{\partial}{\partial V_i{}^\beta}\int\frac{\partial P_{n+1}}{\partial X_{n+1}{}^\alpha}V_{n+1}{}^\beta\delta(\mathbf{X}_i-\mathbf{X}_{n+1})\,d\mathbf{X}_{n+1}d\mathbf{V}_{n+1}d\mathbf{a}_{n+1}-$$
$$-\frac{\partial}{\partial a_i{}^\beta}\int\frac{\partial P_{n+1}}{\partial X_{n+1}{}^\alpha}a_{n+1}{}^\beta\delta(\mathbf{X}_{n+1}-\mathbf{X}_i)\,d\mathbf{X}_{n+1}d\mathbf{V}_{n+1}d\mathbf{a}_{n+1}$$

Вместо этого можно потребовать выполнения условия согласования в начальный момент времени t_0. Ввиду существенно временного характера лагранжевой задачи такая форма этого дополнительного условия оказывается более удобной, так как сводится к условиям на эйлеровы функции F_n в момент $t=t_0$ так как

$$P_n=F_n\prod_{i=1}^{n}\delta(\mathbf{X}_i-\mathbf{a}_i)\quad\text{при } t=t_0$$

Согласно существующим представлениям, структура развитой турбулентности при больших числах Рейнольдса R представляет собой совокупность неупорядоченных пульсаций различных размеров ξ и скоростей ω, характеризующуюся тем, что локальные градиенты скорости $\omega_\xi/\xi\gg U/L$ при $\xi\ll L$ (L, U — характерные размеры и скорость крупномасштабных движений). Градиенты скорости в малых масштабах ограничиваются так, что $\omega_0\xi_0/\nu\sim 1$. Вследствие хаотичности и слабой связи движений с сильно различающимися масштабами статистический режим мелкомасштабных пульсаций с $\xi\ll L$ является универсальным и стационарным [4] и не должен определяться конкретными особенностями крупномасштабных движений. В качестве характеристики мелкомасштабной части движения не могут быть взяты X, V или флуктуации этих величин. И те и другие в основном определяются крупномасштабными движениями элементов жидкости.

Целесообразно, следуя Колмогорову [4] рассматривать относительные движения жидких частиц — их движение по отношению к какой-либо определенной частице. Вместо координат $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{X}_i$ и скоростей V_i жидких частиц вводим новые

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_1, \quad \xi_i = \mathbf{X}_i - \mathbf{X}_1$$
$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1, \quad \omega_i = \mathbf{V}_i - \mathbf{V}_1 \quad (i = 2, 3, \ldots, n)$$
$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1, \quad \alpha_i = \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_1$$

Уравнения (6) в новых переменных выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial P_n}{\partial t} + V^\alpha \frac{\partial P_n}{\partial X^\alpha} + \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial P_{n+1}}{\partial \xi_i^\alpha} \omega_i^\alpha +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial V^\alpha} \int \frac{\partial^2 P_{n+1}}{\partial \xi_{n+1}^\beta \partial \xi_{n+1}^\gamma} \omega_{n+1}^\beta \omega_{n+1}^\gamma G(\mathbf{X}, \mathbf{X} + \xi_{n+1}) d\omega_{n+1} d\xi_{n+1} d\alpha_{n+1} +$$
$$+ \nu \frac{\partial}{\partial V^\alpha} \int \Delta_{n+1} P_{n+1} \omega_{n+1}^\alpha \delta(\xi_{n+1}) d\xi_{n+1} d\omega_{n+1} d\alpha_{n+1} +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial \omega_i^\alpha} \int \frac{\partial^2 P_{n+1}}{\partial \xi_{n+1}^\beta \partial \xi_{n+1}^\gamma} [G^\alpha(\mathbf{X} + \xi_i, \mathbf{X} + \xi_{n+1}) - G^\alpha(\mathbf{X}, \mathbf{X} + \xi_{n+1})] \times$$
$$\times \omega_{n+1}^\beta \omega_{n+1}^\gamma d\omega_{n+1} d\xi_{n+1} d\alpha_{n+1} + \nu \frac{\partial}{\partial \omega_i^\alpha} \int [\delta(\xi_{n+1} - \xi_i) - \delta(\xi_{n+1})] \Delta_{n+1} P_{n+1} \times$$
$$\times \omega_{n+1}^\alpha d\xi_{n+1} d\alpha_{n+1} = 0 \qquad (7)$$

В уравнениях (7) не все члены имеют один порядок величины. Если интересоваться свойствами P_n на малых взаимных расстояниях $\xi_i \ll L$, то можно ожидать, что характерная разность скоростей двух точек ω на этих расстояниях такова, что

$$\omega_i / \xi_i \ll U / L$$

По отношению к уравнениям для функций распределения это, например, означает, что

$$\omega_i^\alpha \frac{\partial P_n}{\partial \xi_i^\alpha} \gg \frac{\partial P_n}{\partial X^\alpha} V^\alpha$$
$$\frac{\partial}{\partial \omega_i^\alpha} \int \Delta_{n+1} P_{n+1} [\delta(\xi_i - \xi_{n+1}) - \delta(\xi_{n+1})] \omega_{n+1}^\alpha d\omega_{n+1} d\xi_{n+1} d\alpha_{n+1} \gg$$
$$\gg \frac{\partial}{\partial V^\alpha} \int \Delta_{n+1} P_{n+1} \delta(\xi_{n+1}) \omega_{n+1}^\alpha d\omega_{n+1} d\xi_{n+1} d\alpha_{n+1} \text{ и т. д.}$$

Отметим, что отбрасываемые члены малы, по крайней мере, как $R^{-1/4}$, если воспользоваться для оценки величин относительного движения колмогоровскими масштабами $\omega_0 = (\varepsilon\nu)^{1/4}$ и $\xi_0 = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$. Рассматривая, например, уравнения для P_1, видим, что в него входит P_2, проинтегрированная по разности начальных координат α_2. Эта функция определяется из системы (7) для полуэйлеровых функций

$$P_n'(\mathbf{V}, \mathbf{X}, \mathbf{a}, \omega_2, \xi_2, \ldots, \omega_n, \xi_n, t) = \int P_n d\alpha_2 \ldots d\alpha_n$$

являющихся лагранжевыми только по отношению к одной частице.

После отбрасывания малых членов уравнение для P_n имеет вид

$$\frac{\partial P_n'}{\partial t} + \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial P_n'}{\partial \xi_i^\alpha} \omega_i^\alpha +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial \omega_i^\alpha} \int \frac{\partial^2 P_{n+1}}{\partial \xi_{n+1}^\beta \partial \xi_{n+1}^\gamma} \frac{\partial}{\partial \xi_{n+1}^\alpha} \left[\frac{1}{|\xi_{n+1} - \xi_i|} - \frac{1}{|\xi_{n+1}|} \right] \omega_{n+1}^\beta \omega_{n+1}^\gamma d\omega_{n+1} d\xi_{n+1} +$$
$$+ \nu \frac{\partial}{\partial \omega_i^\alpha} \int \Delta_{n+1} P_{n+1}' [\delta(\xi_i - \xi_{n+1}) - \delta(\xi_{n+1})] \omega_{n+1}^\alpha d\omega_{n+1} d\xi_{n+1} = 0 \qquad (8)$$

Предполагаем, что в соответствии с развиваемыми представлениями P_n' имеют вид

$$P_n' = P_1(\mathbf{V}, \mathbf{X}, \mathbf{a}, t)\varphi_n^{(0)}(\omega_2, \xi_2, \ldots, \omega_n, \xi_n) \qquad (9)$$

Функции удовлетворяют стационарной системе уравнений и совпадают с эйлеровыми распределениями разностей скоростей $\omega_2,\ldots,\omega_n$ на расстояниях $\xi_2,\ldots, \xi_n$ и являются однородными, изотропными, универсальными и определяются не конкретными особенностями крупномасштабных движений, а только потоком кинетической энергии, содержащейся в крупномасштабных движениях и превращающейся в тепло под действием вязкости

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\nu\int\delta(\xi_2)\,\Delta_2\varphi_2^{(0)}\omega_2^2 d\omega_2 d\xi_2$$

Такой характер эйлеровых функций распределения на малых расстояниях пред ложен [4]. Отметим, что гипотезу о независимости крупно- и мелкомасштабных движений типа (9) можно сформулировать на всех временах t лишь для функции P_n'. Для функций P_n нулевое приближение, подобное (9), имеет смысл лишь на малых временах $t - t_0 \ll L/U$, так как в турбулентной жидкости частицы в среднем расходятся на L за время L/U, даже если первоначально они находились на малом расстоянии $\alpha \ll \ll L$. Дополнительные условия на универсальные функции $\varphi_n^{(0)}$ рассматривались в [1].

Если попытаться с помощью приближения (9) замкнуть уравнение для P_1, то, казалось бы, получим замкнутое уравнение для P_1 и некоторые универсальные моменты от $\varphi_n^{(0)}$, однако эти средние равны нулю в силу предлагаемого характера $\varphi_n^{(0)}$.

Из цепочки (7) следует, что должна существовать поправка к нулевому приближению, имеющая вид

$$P_n'^{(1)} = \frac{\partial P_1}{\partial V^\alpha}\varphi_{n\alpha}^{(1)}(\omega_2, \xi_2, \ldots, \omega_n, \xi_n)$$

где $\varphi_{n\alpha}^{(1)}$ такие же, как в предложенном ранее [1] разложении F_1.

Было выяснено, что поправка такого же типа связана с выполнением условий симметрии с соответствующей точностью. Последние для функций P_n' имеют вид

$$\begin{aligned} P_n' = \int P_n(&\mathbf{V} + \omega_i, \mathbf{X} + \xi_i, \alpha + \alpha_i, \omega_2 - \omega_i, \xi_2 - \xi_i, \alpha_2 - \alpha_i, \ldots \\ &\ldots, -\omega_i, -\xi_i, -\alpha_i, \ldots, \omega_n - \omega_i, \xi_n - \xi_i, \alpha_n - \alpha_i)\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n \end{aligned} \qquad (10)$$

Другое дополнительное условие сводится к условиям симметрии по отношению к перестановкам групп аргументов $\omega_i\xi_i\alpha_i$.

Так как рассматриваются малые значения ξ_i, то предполагается, что основной вклад в этот интеграл вносят α_i гораздо меньше основного масштаба. Разлагая правую часть (10) с точностью до членов первого порядка и пользуясь тем, что в членах с производными с нужной точностью можно пользоваться нулевым приближением, получаем приближенное условие симметрии

$$P_n' = \widetilde{P}_n' + \omega_i^\alpha \frac{\partial P_1}{\partial V^\alpha} \varphi_n^{(0)} + \frac{\partial P_1}{\partial a^k} \int \alpha_i^k \varphi_n (\omega_i, \xi_i, \alpha_i) d\alpha_2 \ldots d\alpha_n$$

Из этого соотношения видно, что для того чтобы удовлетворить условие симметрии с той же точностью, необходимо ввести поправку первого порядка вида

$$\frac{\partial P}{\partial a^\alpha} \chi_{n\alpha}^{(1)} (\omega_2, \xi_2, \ldots, \omega_n, \xi_n, t)$$

Для $n = 2$ можно найти так, как это сделано в [1], что

$$\varphi_{2\alpha}^{(1)} = \frac{1}{2} \omega_2^\alpha \varphi_2^{(0)} (\omega_2, \xi_2), \qquad \chi_{2\beta}^{(1)} = \frac{1}{2} \int \alpha_2^\beta \varphi_2 (\omega_1, \xi_2, \alpha_2, t) d\alpha_2$$

Подставляя эти поправки в уравнение для P_1, находим (для простоты в однородном случае) замкнутое уравнение для P_1.

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} + V^\alpha \frac{\partial P_1}{\partial Y^\alpha} + \mu (t) \frac{\partial^2 P_1}{\partial V^\alpha \partial Y^\alpha} + \frac{\varepsilon}{3} \frac{\partial^2 P_1}{\partial V^\alpha \partial V^\alpha} = 0 \qquad (11)$$

где $\mathbf{Y} = \mathbf{X} - \mathbf{a}$, а μ определяется интегралами от универсальных функций $\chi_{2\alpha}^{(1)}$ и зависит только от ε, ν, t, имеет размерность квадрата скорости и не должна зависеть от вязкости ν, потому $\mu = \gamma \varepsilon t$.

Структура уравнения (11) характерна для марковских случайных процессов, однако коэффициент диффузии в пространстве скоростей отрицателен.

Ясно, что решение (11), удовлетворяющее начальному условию $P_1 (\mathbf{V}, \mathbf{Y}, t_0, t_0) = F_1 (\mathbf{V}, t_0) \delta (\mathbf{Y})$ будет совместным нормальным распределением для $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{V}$, так как в однородном случае распределение $F_1 (\mathbf{V}, t)$ является нормальным, как выяснено в [1]

$$P_1 (\mathbf{V}, \mathbf{Y}, t) \sim \exp \frac{-\mathbf{Y}^2 \langle \mathbf{V}^2 \rangle + 2\mathbf{Y}\mathbf{V} \langle \mathbf{V}\mathbf{Y} \rangle - \mathbf{V}^2 \langle \mathbf{Y}^2 \rangle}{\langle \mathbf{Y}^2 \rangle \langle \mathbf{V}^2 \rangle - \langle \mathbf{Y}\mathbf{V} \rangle^2}$$

Соответствующие средние легко найти, решая замкнутую систему уравнений для вторых моментов. Требование

$$\langle \mathbf{Y}^2 \rangle \langle \mathbf{V}^2 \rangle - \langle \mathbf{Y}\mathbf{V} \rangle^2 > 0$$

приводит к условию на γ. Если закон затухания однородной турбулентности есть

$$\langle \mathbf{V}^2 \rangle = \langle \mathbf{V}^2 (0) \rangle (1 + t/T)^{-1}$$

то $\gamma = 2$, а

$$\langle \mathbf{Y}^2 \rangle = \langle \mathbf{V}^2 (0) \rangle T [t - T \ln (1 + t/T)], \quad \langle \mathbf{Y}\mathbf{V} \rangle = \langle \mathbf{V}^2 (0) \rangle (1 + t/T)^{-1}$$

Таким образом, на больших временах $t \gg T$ квадрат смещения $\langle \mathbf{Y}^2 \rangle \sim t$ как при случайных блужданиях.

Другим результатом существующих представлений о структуре турбулентности является гипотеза А. М. Обухова [6], состоящая в том, что эволюция приращений скорости и координаты

$$\Delta \mathbf{V} = \mathbf{V} (t_0 + \tau) - \mathbf{V} (t_0), \quad \Delta \mathbf{X} = \mathbf{X} (t_0 + \tau) - \mathbf{V} (t_0)\tau - a$$

жидкой частицы при $\tau \ll T$ представляется марковским случайным процессом в шестимерном фазовом пространстве $\{\Delta X, \Delta V\}$, а коэффициент диффузии в пространстве скоростей в соответствующем уравнении пропорционален ε. Аналогичная точка зрения на характер ускорений при $R \gg 1$ использовалась в работе [7] о моментах относительного движения двух жидких частиц.

Предлагаемый метод непосредственно примыкает к развитому в [1] методу разложения функций распределения по $R^{1/4}$. Структура разложения лагранжевых распределений такова, что переходит в найденное ранее разложение F_n при использовании выясненной связи (3) между F_n и P_n. При $t = t_0$ поправка, связанная с dP_1 / da является малой более высокого порядка, чем учтенные члены, т. е. с точностью до $R^{-1/4}$ должна считаться равной нулю. Важно отметить, что уравнение (11) не содержит малых параметров, и поэтому из него невозможно получить замкнутое уравнение для плотности распределения P_1 (X, a, t) типа уравнения диффузии.

Поступила 13 IV 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Улинич Ф. Р., Любимов Б. Я. К статистической теории турбулентности несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса. ЖЭТФ, 1968, т. 55, № 3 (9).
2. Улинич Ф. Р. Статистическая динамика турбулентной несжимаемой жидкости. Докл. АН СССР, 1968, т. 183, № 3; Монин А. С. Уравнения турбулентного движения. ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.
3. Любимов Б. Я. Лагранжево описание динамики турбулентного движения. Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 5.
4. Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса. Докл. АН СССР, 1941, т. 30, № 4.
5. Lumly I. The mathematical nature of Lagrangian and Eulerian statistical functions. Mécanique de la turbulence, coll. Int. du CNRS á Marseille, Paris, Éd. CNRS, 1962.
6. Обухов А. М. Описание турбулентности лагранжевых переменных. В сб.: «Атмосферная диффузия и загрязнение воздуха». М., Изд-во иностр. лит., 1962, стр. 138.
7. Lin C. C. On a theory of dispersion by continuous movements. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1960, vol. 46, No. 4, p. 566.