ПОДВИЖНАЯ НАГРУЗКА НА НЕУПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

А. М. Скобеев, Л. М. Флитман

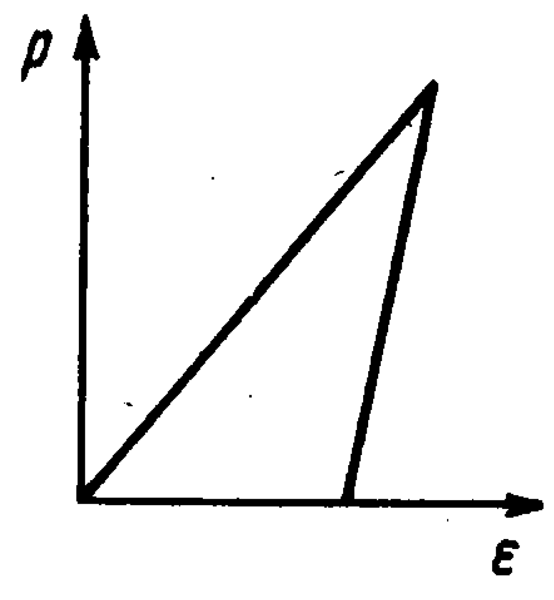
(Москва)

1. Рассматривается плоская задача о воздействии нагрузки, двигающейся с постоянной скоростью по границе идеальной среды, заполняющей полупространство.

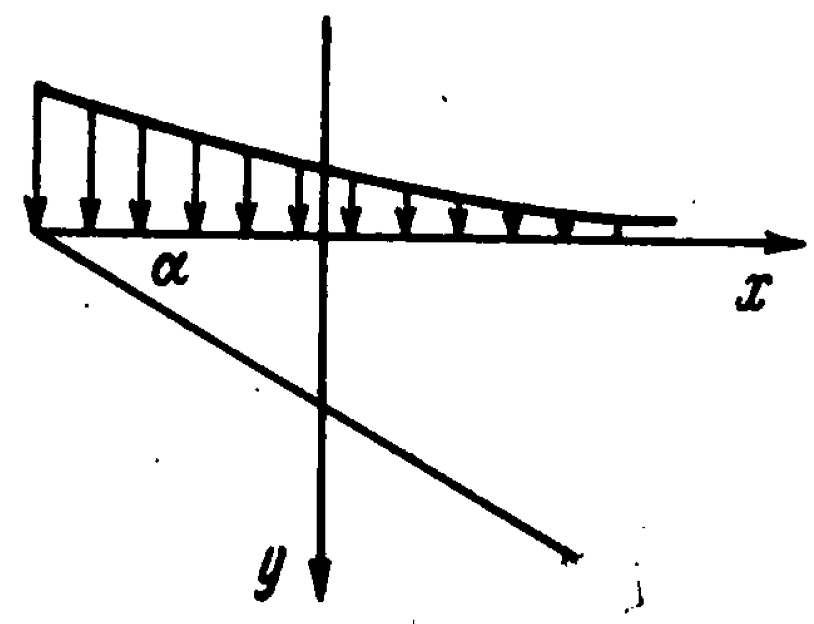
Соотношение между давлением p и относительным объемным расширением ε предполагается линейным как при нагрузке, так и при разгрузке (фиг. 1). Относительно давления, приложенного к границе, предполагается, что оно имеет «фронт», двигающийся со скоростью D, превосходящей скорость звука в среде, за фронтом оно монотонно убывает, профиль нагрузки в системе отсчета, двигающейся вместе с фронтом, не меняется со временем.

Движение в среде предполагается установившимся.

Такой схемой можно приближенно моделировать резкое динамическое воздействие на грунт. Действительно, фиг. 1 соответствует диаграмме сжимаемости грунта [1]. Кроме того, в моделях, принятых для описания грунта [2, 3], касательные напряжения считаются ограниченными и в качестве удовлетворительного приближения в подобных задачах можно принять, что тензор напряжения является шаровым.



Фиг. 1



Фиг. 2

К сказанному следует добавить, что неодномерные динамические задачи для упруго-пластической среды очень трудны, а параметры грунта не стабильны и мало изучены. Все это дает основание для применения простых схем, тем более что даже модель несжимаемой идеальной жидкости применялась к некоторым задачам динамики грунта [4].

Сформулированная выше задача полезна также для выяснения пределов применимости предложенного С. С. Григоряном [5] приближенного способа построения волнового поля в полупространстве из упруго-пластического материала, движение в котором вызывается быстро двигающейся на границе нагрузкой.

2. Поместим начало прямоугольной системы координат на границе, ось x направим вдоль границы, ось y — в глубь среды (фиг. 2). Обозначим давление — p, а проекции скорости на оси x и y — соответственно u и v, плотность — ρ.

При $y = 0$ давление задано

$$p = f(Dt + x) \tag{2.1}$$

где $f(\xi)$ — известная функция такая, что

$$f(\xi) = 0 \quad (\xi < 0), \qquad f(\xi) > 0, \qquad f'(\xi) < 0 \quad (\xi > 0) \tag{2.2}$$

и $D > c$, где c — скорость звука в среде.

Будем предполагать, что перед фронтом волны, распространяющимся со скоростью c, соответствующей нагрузочной ветви диаграммы p-ε, среда покоится, на фронте материал мгновенно нагружается, а сразу за фронтом $y = \operatorname{tg}\alpha\,(Dt + x)$ происходит разгрузка.

В дальнейшем будет проверено, что построенное решение не противоречит этим предположениям.

Из условия сохранения массы и импульса получаем на фронте

$$p = \rho c\,(-u \sin\alpha + v \cos\alpha) \qquad (y = (Dt + x)\operatorname{tg}\alpha,\ \ \sin\alpha = c/D) \tag{2.3}$$

За фронтом, вдали от него, давление и скорость считаем нулевыми

$$p = 0,\ u = 0,\quad v = 0 \quad (x = \infty) \tag{2.4}$$

В соответствии со сделанными предположениями внутри угла α (фиг. 2), где среда движется, имеем уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{p}{\rho} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{p}{\rho} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{p}{\rho} + c_1^2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \qquad \left(c_1^2 = \frac{K}{\rho}\right) \tag{2.5}$$

Коэффициент K соответствует разгрузочной ветви диаграммы $p - \varepsilon$. Будем предполагать, что

$$c < D < c_1 \tag{2.6}$$

3. Считая движение установившимся, т. е. давление и скорость зависит лишь от $\xi = Dt + x$ и y, из первого уравнения (2.5) и условия в бесконечности (2.4) получаем

$$u = -p/\rho D \tag{3.1}$$

Учитывая это соотношение и (2.6) и вводя новые переменные

$$\xi = Dt + x, \qquad \eta = ky\,(k = \sqrt{1 - D^2/c_1^2}) \tag{3.2}$$

приводим уравнения (2.5) к виду

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\,p = \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\rho D}{k}\,v, \qquad \frac{\partial}{\partial \eta}\,p = -\frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\rho D}{k}\,v$$

Уравнения Коши — Римана будут удовлетворены, если считать p и $\rho D/kv$ соответственно действительной и мнимой частями аналитической функции $Q(\zeta)$

$$Q(\zeta) = p + i\frac{\rho D}{k}v \qquad (\zeta = \xi + i\eta)$$

Функция $Q(\zeta)$ должна быть регулярной внутри угла величины β в комплексной плоскости ζ; при этом $\operatorname{tg}\beta = k\operatorname{tg}\alpha$. Из условия (2.1) следует

$$\operatorname{Re} Q = f(\xi) \qquad (\eta = 0,\ \xi \geqslant 0) \tag{3.3}$$

Условие (2.3) приводит к виду

$$\operatorname{Re} Q = \operatorname{tg}\beta \operatorname{Im} Q \qquad (\zeta = re^{i\beta}) \tag{3.4}$$

Из условия (2.4) вытекает, что Q должно стремиться к нулю, когда ζ стремится к бесконечности, оставаясь внутри угла. Сформулированная задача решается известным методом [6]. Конформное отображение

$$z = \zeta^{\nu} \qquad (\nu = \pi/\beta) \tag{3.5}$$

переводит внутренность угла в верхнюю полуплоскость.

Из условия (3.4) следует, что на отрицательной части действительной оси в плоскости z

$$\operatorname{Im} ie^{i\beta}Q = 0$$

Это позволяет сделать аналитическое продолжение в нижнюю полуплоскость, и задача сводится к определению функции, равной нулю в бесконечности, регулярной вне положительной части действительной оси и удовлетворяющей на ней условию

$$Q_+ = e^{i2\beta}\,Q_- + 2f\,(t^{1/\nu})$$

Здесь Q_+ и Q_-.— предельные значения $Q(z)$ соответственно сверху и снизу. Решение этой задачи, ограниченное в начале координат и равное нулю в бесконечности, единственно и имеет вид [6]

$$Q(z) = \frac{z^{1-1/\nu}}{\pi i} \int\limits_0^\infty \frac{f(t^{1/\nu})\,dt}{t^{1-1/\nu}(t-z)}$$

Или, возвращаясь к переменной $\zeta = \xi + i\eta$, получим

$$Q(\zeta) = -\frac{1}{i\beta\zeta} \int\limits_0^\infty \frac{f(\tau)\,d\tau}{1-\tau^\nu/\zeta^\nu} \tag{3.6}$$

4. Построенное решение удовлетворяет сделанному ранее предположению о том, что за фронтом волны среда находится в стадии разгрузки. Действительно, $\partial p/\partial t = D\,\partial p/\partial\xi$ и, следовательно

$$\partial p \,/\, \partial t = D \operatorname{Re} Q'(\zeta)$$

Нетрудно проверить, что

$$Q'(\zeta) = -\frac{1}{i\beta\zeta^2} \int\limits_0^\infty \frac{\tau f'(\tau)\,d\tau}{1-\tau^\nu/\zeta^\nu}$$

Отсюда следует, что на положительной части действительной оси

$$\operatorname{Re} Q' = \xi^{-1} f'(\xi) \tag{4.1}$$

При $\zeta = re^{-i\beta}$ имеем

$$\operatorname{Re} Q' = \frac{\sin\beta}{\beta r^2} \int\limits_0^\infty \frac{\tau f'(\tau)\,d\tau}{1+\tau^\nu/r^\nu} \tag{4.2}$$

Условие $f'(\xi) < 0$ вместе с (4.1) и (4.2) и очевидным соотношением $Q'(\infty) = 0$ дает, что $\operatorname{Re} Q' < 0$ на границе, и в силу известного свойства гармонических функций отрицательно всюду, что и доказывает утверждение $\partial p/\partial t < 0$

5. Рассмотрим случай, когда $c \ll D$ или

$$\beta \ll 1, \quad \nu \gg 1 \tag{5.1}$$

Учитывая (2.6), замечаем, что в этом случае нужно потребовать, чтобы разгрузка происходила в условиях несжимаемости.

Для получения асимптотики перепишем $Q(\zeta)$ в виде

$$Q(\zeta) = -\frac{1}{i\beta\zeta} \int\limits_0^\infty \frac{f(\tau) - f(r) - f'(r)(\tau - r)}{1-(\tau/\zeta)^\nu}\,d\tau +$$

$$+ (1 + i\operatorname{ctg}\beta)[f(r) - rf'(r)] + \zeta(1 + i\operatorname{ctg} 2\beta) f'(r)$$

$$\zeta = re^{i\varphi}, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant \beta$$

Удерживая в этом равенстве члены не выше второго порядка малости по β, получаем для давления p

$$p = f(r) + \frac{\varphi}{\beta}\left[\frac{1}{r}\int\limits_0^r f(\tau)\,d\tau - f(r)\right] - \beta^2 F_1\left(r, \frac{\varphi}{\beta}\right) \tag{5.2}$$

$$F_1(r, \gamma) = \frac{\gamma^3}{6}\left[\frac{1}{r}\int\limits_0^r f(\tau)\,d\tau - f(r)\right] - \frac{1}{6}\gamma(4 - 3\gamma)\, rf'(r)$$

Заметим, что

$$\beta = kc \,/\, D + O\,(c^3 \,/\, D^3) \tag{5.3}$$

Для вертикальной компоненты скорости v имеем

$$\rho c v = \frac{1}{r}\int_0^r f(\tau)\,d\tau - \beta^2 F_2\left(r,\ \frac{\varphi}{\beta}\right) \tag{5.4}$$

$$F_2(r,\gamma) = \frac{\gamma^2}{2r}\int_0^r f(\tau)\,d\tau + \frac{1}{3}(1-\gamma^2)\,f(r) + \frac{1}{3}\left(1 - 3\gamma + \frac{3}{2}\gamma^2\right) r f'(r)$$

Из формул (5.2) и (5.4) видно, что поправки к конечным величинам имеют второй порядок малости по β.

Конечная часть давления есть линейная функция угла или, что тоже, глубины, в то же время конечная часть вертикальной скорости от угла не зависит.

Из формулы (3.1) следует, что горизонтальная скорость есть величина порядка β

$$u = -\,\beta p \,/\, k\rho c$$

Для больших значений r имеем

$$p = f(r) + \frac{\varphi}{\beta}\left(1 - \frac{\varphi^2}{6}\right)\frac{P}{r}, \qquad \rho c v = \left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right)\frac{P}{r} \quad \left(P = \int_0^\infty f(\tau)\,d\tau\right)$$

Предполагается, что интеграл сходится. Из этих формул следует, что давление на фронте убывает всегда как r^{-1}.

Сравним конечную часть давления и скорости с решением задачи о движении в полубесконечном стержне из материала, описываемого диаграммой линейной при нагружении и несжимаемого при разгрузке. Движение вызывается давлением, приложенным к торцу в момент $t = 0$ и меняющимся по закону $p = f\,(Dt)$.

В этом случае для скорости имеем

$$v = \frac{1}{c\rho Dt}\int_0^{Dt} f(\tau)\,d\tau$$

а давление на фронте дается формулой $p = c\rho v$.

Учитывая, что $Dt = r$, замечаем, что главные члены (5.2) и (5.4) совпадают с приведенными формулами. Это может служить основанием для использования одномерных задач для построения приближенных решений, как это указывалось в [5].

Поступила 5 VIII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеенко В. Д., Григорян С. С., Новгородов А. Ф., Рыков Г. В. Некоторые экспериментальные исследования по динамике мягких грунтов. Докл. АН СССР, 1960, т. 133, № 6.
2. Фрейденталь А., Гейрингер X. Математические теории неупругой сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
3. Григорян С. С. Об основных представлениях динамики грунтов. ПММ, 1960, т. 24, вып. 6.
4. Кузнецов В. М. О форме воронки выброса при взрыве на поверхности грунта. ПМТФ, 1960, № 3.
5. Григорян С. С. О приближенном решении некоторых задач динамики грунтов. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
6. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функции и некоторые их приложения к матем. физике. Изд. 2. М., Физматгиз, 1962.