

## К ЗАДАЧЕ О КОЛЕБАНИЯХ СЛАБОИСКРИВЛЕННОЙ ПЛАСТИНКИ

Д. С. Цельник (Москва)

На основе теории возмущений [1-4] рассматривается влияние малого искривления средней линии поперечного сечения на частоту и формы собственных колебаний бесконечно длинной, заземленной по торцам пластинки, колеблющейся в условиях плоской деформации, в том специальном случае, когда некоторая частота колебаний неискривленной пластинки — двойная. Исходная система вырожденная [2], для нее «небольшая неправильность может вызвать большой эффект» ([1], т. 1, п. 149). Рассматриваемая задача есть частный случай задачи о влиянии малого изменения формы на колебания оболочки, имеющей кратные собственные частоты.

В заметке содержится также одно дополнение к утверждению автора работы [5] о разделении собственных колебаний оболочки на квазипоперечные и квазитангенциальные.

1. Для определения форм и частот в рассматриваемом случае имеем из общих уравнений колебаний оболочек [5]

$$(A^{(0)} + \psi A^{(1)} + \psi^2 A^{(2)}) (v, w) = \lambda (v, w) \quad (1.1)$$

$$A^{(\nu)} = \| a_{ij}^{(\nu)} \| \quad \nu = 0, 1, 2 \quad i, j = 1, 2$$

Приводим выражения для ненулевых элементов матриц-операторов  $A^{(\nu)}$

$$a_{11}^{(0)} = -\frac{d^2}{ds^2}, \quad a_{22}^{(0)} = \frac{h_*^2}{3} \frac{d^4}{ds^4}, \quad a_{12}^{(1)} = \frac{d(\kappa \cdot)}{ds} - \frac{h_*^2}{3} \kappa \frac{d^3}{ds^3}$$

$$a_{21}^{(1)} = \frac{h_*^2}{3} \frac{d^3(\kappa \cdot)}{ds^3} - \kappa \frac{d}{ds}, \quad a_{11}^{(2)} = -\frac{h_*^2}{3} \kappa \frac{d^2(\kappa \cdot)}{ds^2}, \quad a_{22}^{(2)} = \kappa^2$$

$$\kappa(s) = \frac{\kappa_0(s)}{\psi}, \quad \psi = \left( \int_{-1/2}^{1/2} \kappa_0^2 ds \right)^{1/2}$$

$$\kappa_0(s) = k_0 / s, \quad s = s_0 / l, \quad h_* = h / l$$

Здесь  $v, w$  — перемещения по касательной и нормали к средней линии поперечного сечения пластинки,  $s_0$  — длина дуги (фиг. 1) вдоль средней линии,  $h$  — полутолщина пластинки,  $k_0$  — кривизна средней линии поперечного сечения.

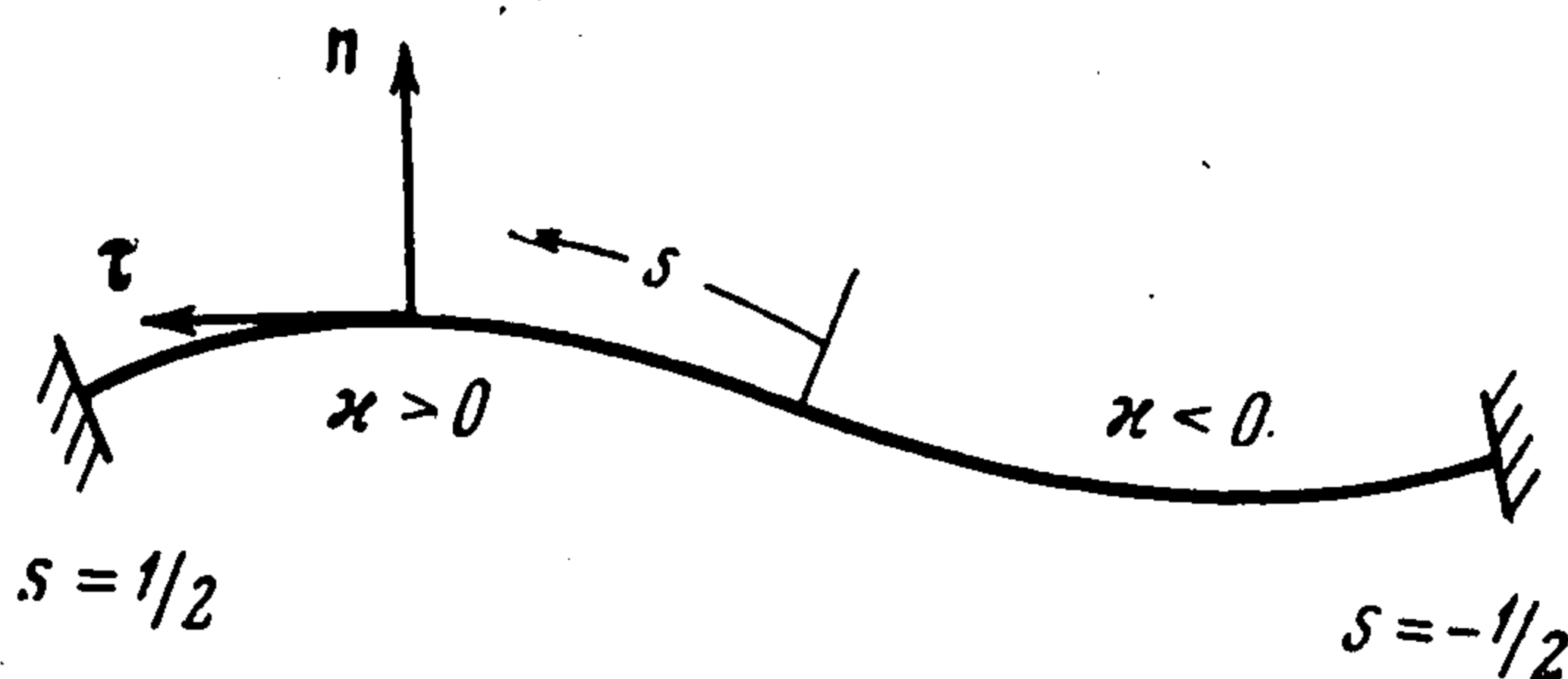
Для частот колебаний  $\omega$  имеем следующее выражение:

$$\omega^2 = \lambda E / \rho l^2 (1 - \sigma^2)$$

Здесь  $\rho$  — плотность материала пластинки,  $\sigma$  — коэффициент Пуассона и  $E$  — модуль Юнга.

Граничные условия таковы (1.2)

$$v(-1/2) = v(1/2) = w(-1/2) = w(1/2) = 0$$



Фиг. 1

Всюду считается, что вектора  $(v, w)$  принадлежат гильбертову пространству вектор-функций со скалярным произведением ([6], стр. 19, 27)

$$((v_1, w_1) \cdot (v_2, w_2)) = \int_{-1/2}^{1/2} v_1 \bar{v}_2 ds + \int_{-1/2}^{1/2} w_1 \bar{w}_2 ds$$

при этом операторы  $A^{(\nu)}$  (граничные условия — (1.2)) — самосопряженные.

Введем в рассмотрение собственные значения и нормированные собственные векторы оператора  $A^{(0)}$ , соответствующие продольным колебаниям стержня

$$\lambda_{0m} = (m\pi)^2, \quad (v_{0m}, 0) \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

поперечным колебаниям стержня

$$\lambda_{0k} = 1/3 h_*^2 \mu_k^4, \quad (0, w_{0k}) \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

Как известно

$$\cos(\mu_k) \operatorname{ch}(\mu_k) = 1, \quad \mu_k \approx (k + 1/2)\pi$$

Пусть для некоторых  $m$  и  $k$  будет

$$\lambda_{0m} = \lambda_{0k} = \lambda_0 \quad (1.3)$$

Собственному значению  $\lambda_0$  отвечает двумерное собственное подпространство  $L_{\lambda_0}$  оператора  $A^{(0)}$ ; в качестве базисных в этом подпространстве выберем векторы

$$\chi_1 = (v_{0m}, 0), \quad \chi_2 = (0, w_{0k})$$

Оператору  $A^{(1)}$  в подпространстве  $L_{\lambda_0}$  отвечает матрица

$$\begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{vmatrix} \quad a = \int_{-1/2}^{1/2} v_{0m} (\kappa w_{0k})' ds - \frac{h_*^2}{3} \int_{-1/2}^{1/2} \kappa v_{0m} w_{0k}''' ds \quad (1.4)$$

При выводе (1.4) предположено, что функция  $\kappa$  «не нарушает» возможности интегрирования в (1.4) по частям с обращением внеинтегральных членов в нули в силу граничных условий (1.2) (аналогичные требования накладываются на  $\kappa$  при проверке самосопряженности).

Для малых  $\psi$  станем искать решения (1.1) в виде

$$\begin{aligned} (v, w) &= u_0 + \psi(v_1, w_1) + \psi^2(v_2, w_2) + \dots \\ \lambda &= \lambda_0 + \psi\lambda_1 + \psi^2\lambda_2 + \dots, \quad u_0 = \alpha\chi_1 + \beta\chi_2 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Всюду в дальнейшем ограничимся отысканием векторов  $u_0$  и первых ненулевых поправок к  $\lambda_0$ , считая параметр  $\psi$  «достаточно малым». Если  $a \neq 0$ , то имеем

$$\lambda_1 = \pm a, \quad \alpha / \beta = \pm 1 \quad (1.6)$$

Пусть  $a = 0$ . Разыскивая решения, для которых представление (1.5) по-прежнему справедливо, положим  $v = \psi v^0$  (другая возможность — использовать замену  $w = \psi w^0$ ), тогда вместо (1.1) получаем

$$(B^{(0)} + \psi^2 B^{(1)})(v^0, w) = \lambda(v^0, w)$$

где

$$B^{(v)} = \|b_{ij}^{(v)}\| \quad v=0,1 \quad i,j=1,2$$

Ненулевые элементы  $b_{ij}$  таковы

$$\begin{aligned} b_{11}^{(0)} &= -\frac{d^2}{ds^2}, & b_{12}^{(0)} &= \frac{d(\kappa \cdot)}{ds} - \frac{h_*^2}{3} \kappa \frac{d^3}{ds^3}, & b_{22}^{(0)} &= \frac{h_*^2}{3} \frac{d^4}{ds^4} \\ b_{11}^{(1)} &= -\frac{h_*^2}{3} \kappa \frac{d^2(\kappa \cdot)}{ds^2}, & b_{21}^{(1)} &= \frac{h_*^2}{3} \frac{d^3(\kappa \cdot)}{ds^3} - \kappa \frac{d}{ds}, & b_{22}^{(1)} &= \kappa^2 \end{aligned}$$

Если  $a = 0$ , то  $\lambda_0$  есть двойное собственное значение оператора  $B^{(0)}$ , причем ему отвечают ортонормированные собственные векторы  $g_1, g_2$

$$g_1 = (v_{0m}, 0), \quad g_2 = \mu(p_0, w_{0k}), \quad \mu = (1 + (p_0 \cdot p))^{-1/2}$$

где  $p_0$  — решение уравнения

$$p_0'' + \lambda_0 p_0 = (\kappa w_{0k})' - 1/3 h_*^2 \kappa w_{0k}''' (= p)$$

с граничными условиями, принятыми для  $v$ , и такое, что

$$(p_0 \cdot v_{0m}) = 0$$

Если  $a = 0$ , то  $\lambda_0$  есть также двойное собственное значение оператора  $(B^{(0)})^*$ , сопряженного с  $B^{(0)}$ . Ортонормированные собственные векторы оператора  $(B^{(0)})^*$ , соответствующие  $\lambda_0$ , есть  $e_1, e_2$

$$e_1 = \gamma(v_{0m}, r_0), \quad e_2 = (0, w_{0k}), \quad \gamma = (1 + (r_0 \cdot r_0))^{-1/2}$$

Здесь  $r_0$  — ортогональное к  $w_{0k}$  решение уравнения

$$\frac{1}{3}h_*^2 r_0''' - \lambda_0 r_0 = \kappa v_{0m}' - \frac{1}{3}h_*^2 (\kappa v_{0m})''' \quad (= r)$$

с граничными условиями для  $w$ .

Для собственных векторов оператора  $B^{(0)}$  присоединенные к ним векторы отсутствуют. Основываясь на результатах [4] (стр. 61—62), станем искать при малых  $\psi$

$$(v^0, w) = u^0 + \psi^2 (v_1^0, w_1^*) + \psi^4 (v_2^0, w_2^*) + \dots$$

$$\lambda = \lambda_0 + \psi^2 \lambda_2 + \psi^4 \lambda_4 \dots, \quad u^0 = \alpha^0 g_1 + \beta^0 g_2$$

Величины  $\lambda_2$  — собственные значения, а  $u_0^0$  — соответствующие им собственные векторы оператора  $C$  в двумерном подпространстве с базисом  $g_1, g_2$  — такого, что ему в этом базисе отвечает матрица

$$C = \begin{vmatrix} \gamma^{-1} (B^{(1)} g_1 \cdot e_1) & \gamma^{-1} (B^{(1)} g_2 \cdot e_1) \\ 0 & \mu^{-1} (B^{(1)} g_2 \cdot e_2) \end{vmatrix}$$

Имеем

$$\lambda_{21} = \gamma^{-1} (B^{(1)} g_1 \cdot e_1) = \frac{h_*^2}{3} \int_{-1/2}^{1/2} [(\kappa v_{0m})']^2 ds - \int_{-1/2}^{1/2} r r_0 ds$$

$$\lambda_{22} = \mu^{-1} (B^{(1)} g_2 \cdot e_2) = \int_{-1/2}^{1/2} (\kappa w_{0k})^2 ds + \int_{-1/2}^{1/2} p p_0 ds$$

Если одна из величин  $\lambda_2$  окажется равной нулю, то для получения соответствующей первой поправки к собственному значению  $\lambda_0$  требуются дальнейшие рассмотрения. Если же  $\lambda_{21} = \lambda_{22}$ , то определение  $u^0$  из рассмотрения собственных векторов оператора  $C$  возможно не всегда. Оба эти случая требуют дальнейшего анализа и в настоящей работе не рассматривались.

Во всех других случаях собственные векторы, соответствующие  $\lambda_{21}, \lambda_{22}$ , есть

$$(v, w)_1 = (v_{0m}, 0) + \psi (0, (\gamma\mu)^{-1} (\lambda_{21} - \lambda_{22})^{-1} (B^{(1)} g_2 \cdot e_1) w_{0k} + r_0) + \dots$$

$$(v, w)_2 = (0, w_{0k}) + \psi ((\gamma\mu)^{-1} (\lambda_{22} - \lambda_{21})^{-1} (B^{(1)} g_2 \cdot e_1) v_{0m} + p_0, 0) + \dots$$

Пусть кривизна панели  $1/R$  постоянна, тогда  $\kappa = 1$ ,  $\psi = l/R$ ; если  $m, k$  разной четности и  $k \gg m$ , то

$$a \approx (-1)^{(m+k+1)/2} 4 \sqrt{2} m/k$$

Собственные векторы  $(v_{0m}, w_{0k})$  взяты такими

$$\sqrt{2} (\sin(m\pi s), \cos(\mu_k s)), \quad m = 2m', \quad m' = 1, 2, 3, \dots$$

$$\sqrt{2} (\cos(m\pi s), \sin(\mu_k s)), \quad m = 2m' - 1, \quad m' = 1, 2, 3, \dots$$

Поскольку  $a \neq 0$ , то справедливы формулы (1.6). Если теперь четность  $m, k$  одинакова, то  $a = 0$ ; ограничиваясь случаем четных  $m, k$  при условии  $k \gg m$ , получаем

$$\lambda_{21} \approx 1 + (m/k)^4, \quad \lambda_{22} \approx -3(m/k)^2$$

соответствующие формы колебаний при  $\psi \rightarrow 0$  переходят в чисто поперечную и чисто тангенциальную.

Задачи, аналогичные рассмотренной выше, для оболочки достаточно общей формы, имеющей кратные частоты колебаний, также целесообразно решать на основе теории возмущений.

В тех случаях, когда вырождение полностью или частично обусловлено симметрией, следует использовать упрощения, вносимые учетом симметрии невозмущенной и возмущенной задач ([7], п. 20, 22; [8], гл. 20).

Некоторые рассмотрения для системы, вырождение которой обусловлено симметрией, имеются в книге Релея [1] (т. 1, п. 209, 221); Рэлей использует принцип стационарности частот. Иллюстрацией к этим рассмотрениям могут служить эксперименты [9].

Отметим еще, что в случае оболочки с кратными частотами формы колебаний могут быть довольно своеобразными ([1], [10], гл. 4, [11—15]).

2. В работе [5] утверждается, что формы собственных колебаний оболочек (при определенных, указанных в [5] условиях) подразделяются на квазипоперечные и квазитангенциальные. Разобранные выше случаи, когда поперечные и тангенциальные колебания накладываются друг на друга в соотношении 1 : 1, показывают, что это не всегда так. Другие аналогичные примеры можно получить следующим образом. Рассмотрим собственные осесимметричные колебания цилиндрической круговой оболочки. Имеем

$$\begin{aligned} (D^{(0)} + \sigma D^{(1)}) (u, w) &= q (u, w) \\ D^{(\nu)} &= \|d_{ij}^{(\nu)}\| \quad \nu = 0, 1 \quad i, j = 1, 2 \\ d_{11}^{(0)} &= -\frac{d^2}{dx^2}, \quad d_{22}^{(0)} = \frac{h_*^2}{3} \frac{d^4}{dx^4} + 1 \\ d_{12}^{(1)} &= -d_{21}^{(1)} = \frac{d}{dx}, \quad d_{12}^{(0)} = d_{21}^{(0)} = d_{11}^{(1)} = d_{22}^{(1)} = 0 \\ x &= s / R, \quad h_* = h / R, \quad 0 \leq s \leq l \\ q &= \rho R^2 \omega^2 (1 - \sigma^2) / E \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $u, w$  — перемещения вдоль и по нормали к образующей,  $s$  — длина дуги вдоль образующей,  $R$  — радиус оболочки,  $h$  — полутолщина; величины  $\rho, \omega, \sigma, E$  означают то же, что и в п.1. Обозначим

$$q_{0m}, q_{0k} \quad (m, k = 1, 2, 3, \dots)$$

простые собственные значения оператора  $D^{(0)}$ , отвечающие чисто тангенциальным и чисто поперечным колебаниям соответственно. Пусть для некоторых  $m, k$

$$q_{0m} = q_{0k} \quad (2.2)$$

тогда для достаточно малых  $\sigma$  вектор смещения будет в первом приближении равен  $(\alpha u_{0m}, \beta w_{0k})$ , где  $\alpha, \beta$  в общем случае не нули одновременно.

Рассмотрим конкретные примеры.

1. Оболочка закреплена по торцам ( $L = l / R$ )

$$u(0) = u(L) = w(0) = w'(0) = w(L) = w'(L) = 0 \quad (2.3)$$

Условие (2.2) дает

$$(m\pi / L)^2 = 1 + \frac{1}{3} h_*^2 (\mu_k / L)^4$$

Если  $m, k$  разной четности, то  $\alpha / \beta = \pm 1$ . В случае, когда четность  $m, k$  одинакова, анализ можно провести аналогично тому, как это сделано в п.1. для  $a = 0$ .

2. Оболочка оперта по торцам

$$u'(0) = u'(L) = w(0) = w''(0) = w(L) = w''(L) = 0$$

Для этого случая Флюгге [16] нашел следующие решения:

$$u = \alpha \cos(n\pi x / L), \quad w = \beta \sin(n\pi x / L) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Условие (2.2) дает

$$(m\pi / L)^2 = 1 + \frac{1}{3} h_*^2 (k\pi / L)^4$$

Если  $m \neq k$ , то при  $\sigma \rightarrow 0$  предельные значения нормированных собственных векторов есть

$$\sqrt{2} (\cos(m\pi x / L), 0), \quad \sqrt{2} (0, \sin(k\pi x / L)) \quad (2.4)$$

Пусть теперь  $m = k$

$$[(k\pi / L)^2 = 1 + \frac{1}{3} h_*^2 (k\pi / L)^4] \quad (2.5)$$

В этом случае можно записать точное решение

$$q = (k\pi / L)^2 [1 \pm \sigma (L / k\pi)], \quad \alpha / \beta = \pm 1$$

Ввиду малости  $h_*$  можно подобрать такие  $L \approx k\pi$ , что (2.5) будет выполняться и соответствующие формы с числом полуволн  $k$  будут наложением тангенциальных и поперечных колебаний в соотношении «один к одному». Впрочем, с увеличением  $L$  оболочка довольно быстро «переходит» в тонкостенный стержень.

Уравнение (2.5) имеет также корень

$$k \approx \sqrt{3L} (\pi h_*)^{-1}$$

Соответствующие решения системы (2.1) нельзя уже считать определяющими частоты и формы колебаний оболочки. Однако, рассматривая такие решения, удается наблюдать интересную закономерность.

Пусть при некоторых  $L$ ,  $h_*^{2(0)}$ ,  $k$  (большом) равенство (2.5) удовлетворено, тогда  $\alpha/\beta = \pm 1$ . Стоит, однако, немного изменить  $h_*^2$ , как собственные векторы системы (2.1) почти немедленно становятся близкими к одному из векторов (2.4). На фиг. 2 показано изменение

$$\alpha/\beta \text{ при } h_*^2 > h_*^{2(0)}, \quad \beta/\alpha \text{ при } h_*^2 < h_*^{2(0)}$$

для одной из ветвей решений при изменении  $h_*^2$  в окрестности  $h_*^{2(0)}$  и  $(\pi/L) \approx 1$ ,  $h_*^{2(0)} \approx 10^{-4}$ ,  $k = 173$

В связи с характером кривой фиг. 2 см. [1] (т. 1, стр. 90).

Если  $k = 1$ , то соответствующие кривые почти горизонтальны.

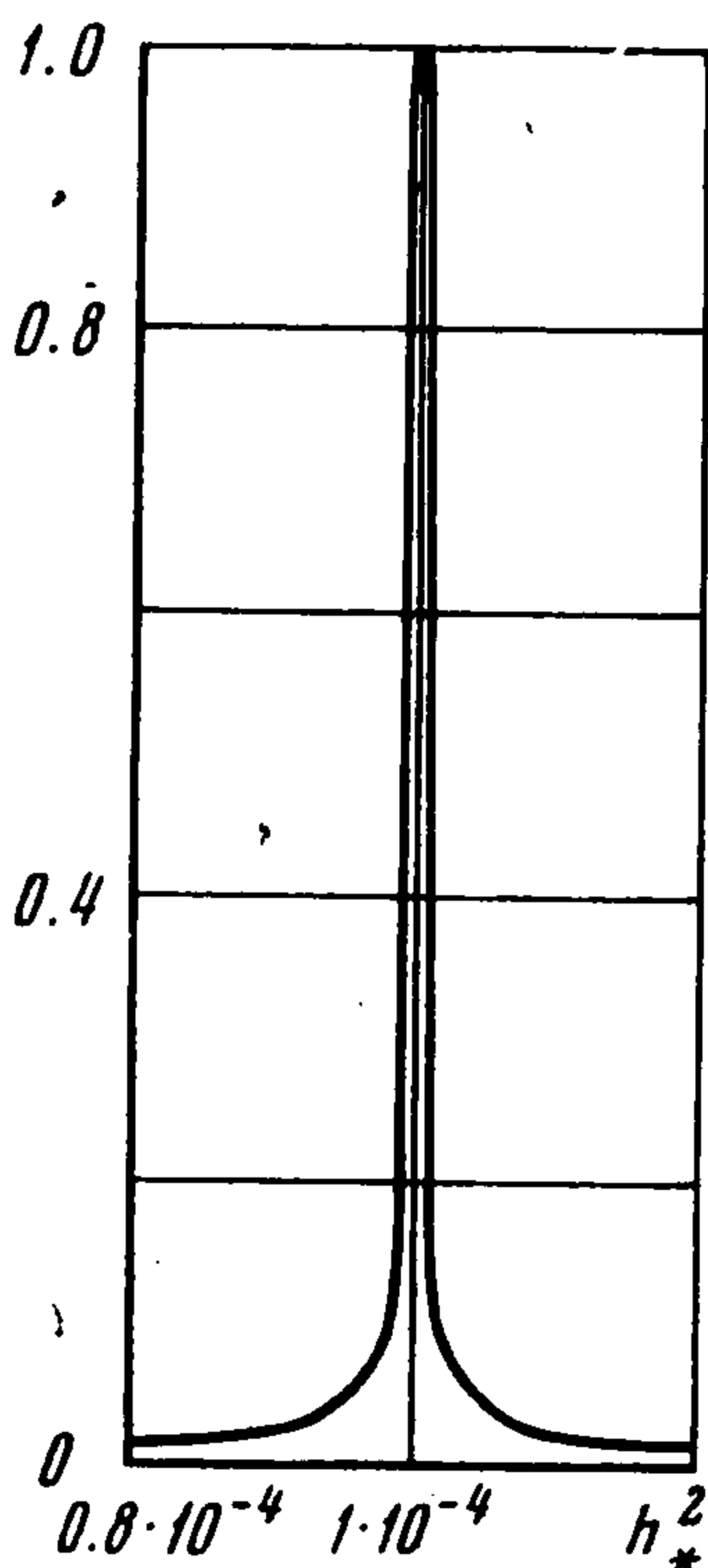
Меняя  $L$  (при  $h_*^2 = h_*^{2(0)}$ ) получаем аналогичного характера зависимость  $\alpha/\beta = f(L)$  (если менять одновременно  $h_*^2$  и  $L$ , то эффекта фиг. 2 можно и не получить).

Вообще, если для некоторой оболочки собственные колебания подразделяются, как это предположено в [5], на квазипоперечные и квазитангенциальные, то возможность «перевязывания» этих двух видов колебаний не следует упускать из виду. Такое перевязывание может быть обусловлено близостью частот некоторых форм колебаний обоих видов.

Поступила 26 IX 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Р э л е й. Теория звука. М., Гостехиздат, 1955, т. 1, 2.
2. Ш у б и н С. Некоторые проблемы теории возмущений линейных колебательных систем. Ж. прикл. физ., 1930, т. 7, вып. 2.
3. Р и с с Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М., Изд-во иностр. лит., 1954.
4. В и ш и к М. И., Л ю с т е р н и к Л. А. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. Усп. матем. н., 1960, т. 15, вып. 3 (93).
5. Г о л ь д е н в е й з е р А. Л. Качественный анализ свободных колебаний упругой тонкой оболочки. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
6. М о р е н К. Методы гильбертова пространства. М., «Мир», 1965.
7. Ф е р м и Э. Квантовая механика. М., «Мир», 1968.
8. П е т р а ш е н ь М. И., Т р и ф о н о в Е. Д. Применение теории групп в квантовой механике. М., «Наука», 1967.
9. T o b i a s S. A. A theory of imperfection for the vibrations of elastic bodies of revolution. Engineering, 1951, vol. 172, No. 4470.
10. T u n d a l l J. Sound. London, Longmans, Green and Co, 1867.
11. W a t k i n s J. D., C l a r y R. R. Vibrational characteristics of thin-wall conical frustum shells. AIAA Journal, 1964, vol. 2, No. 10.
12. H u W. C. L. Comments on vibrational characteristics of thin-wall conical frustum shells. AIAA Journal, 1965, vol. 3, No. 6.
13. W a t k i n s J. D., C l a r y R. R. Reply by authors to W. C. L. Hu. AIAA Journal, 1965, vol. 3, No. 6.
14. K o v a l L. R. Note on the vibrational characteristics of thin-walled shells. AIAA Journal, 1966, vol. 4, No. 3.
15. С а л ь н и к о в Г. М. О собственных колебаниях усеченных конических оболочек со свободными краями. Прикл. механ., 1969, т. 5, № 1.
16. F l u g g e W. Schwingungen zylindrischer Schallen. ZAMM, 1933, Bd. 13, H. 6



Фиг. 2