ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ НАГРУЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА СО СФЕРИЧЕСКИМ РАЗРЕЗОМ

В. А. Зюзин, В. И. Моссаковский

(Днепропетровск)

В работе [1] в общей постановке решена первая основная задача теории упругости для сферического разреза в упругом пространстве. Практическое использование решения [1] несколько затруднено ввиду неопределенности одной из постоянных, входящих в выражение для напряжений и перемещений; при этом имеющихся условий оказывается недостаточно для ее определения.

В настоящей работе аналогичная задача решена методом, отличающимся от приведенного в [1]. В качестве исходных зависимостей взяты интегральные соотношения, полученные применением к осесимметричной задаче теории упругости для сферы преобразования Г. Н. Положего — А. Я. Александрова [2–4]. Выражения для нахождения функций, решающих первую основную задачу теории упругости, также содержат одну неопределенную постоянную. Значение этой постоянной находится путем сопоставления полученного решением [1].

В качестве примера рассмотрена сферическая щель под действием приложенной к ее берегам симметричной и антисимметричной равномерных нагрузок. Получены замкнутые формулы для определения нормальных и касательных напряжений вне разреза на сфере, радиус которой равен радиусу разреза.

1. Общее решение осесимметричной задачи теории упругости в сферических координатах можно представить через две аналитические функции $F_1(\zeta)$ и $F_2(\zeta)$ комплексного переменного $\zeta = \rho e^{i\theta}$

$$2G\frac{U_R}{R} = \frac{1}{\pi i}\int_{\bar t}^{t}\left[\left(\zeta\frac{d}{d\zeta} - 2 + 4\nu\right)F_1 + \frac{1}{R^2}\zeta F_2'\right]\frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta - t)(\zeta - \bar t)}}$$

$$2G\frac{U_\theta}{R} = \frac{1}{\pi i r}\int_{\bar t}^{t}\left[\left(\zeta\frac{d}{d\zeta} + 5 - 4\nu\right)F_1 + \frac{1}{R^2}(\zeta F_2' + F_2)\right]\frac{(\zeta - z)\,d\zeta}{\sqrt{(\zeta - t)(\zeta - \bar t)}} \qquad (1.1)$$

$$\sigma_R = \frac{1}{\pi i}\int_{\bar t}^{t}\left[\left(\zeta^2\frac{d^2}{d\zeta^2} - 2 - 2\nu\right)F_1 + \frac{1}{R^2}\zeta^2 F_2''\right]\frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta - t)(\zeta - \bar t)}}$$

$$\tau_{R\theta} = \frac{1}{\pi i r}\int_{\bar t}^{t}\left[\left(\zeta^3\frac{d^3}{d\zeta^3} + 3\zeta\frac{d}{d\zeta} + 1 - 2\nu\right)F_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{R^2}\left(\zeta^2\frac{d}{d\zeta^2} + \zeta\frac{d}{d\zeta} - 1\right)F_2\right]\frac{(\zeta - z)\,d\zeta}{\sqrt{(\zeta - t)(\zeta - \bar t)}} \qquad (1.2)$$

Полагая

$$F_1 = a_n(n+1)\zeta^n,\ F_2 = b_n\zeta^n \text{ или } F_1 = c_n n\zeta^{-n-1},\ F_2 = d_n\zeta^{-n-1}$$

получим известные формулы для решения соответственно внутренней и внешней задачи осесимметричной деформации упругой сферы [5].

Разложения функций F_1 и F_2 на бесконечности имеют вид

$$F_1 = c_{-2}\zeta^{-2} + c_{-3}\zeta^{-3} + \ldots,\quad F_2 = d_{-1}\zeta^{-1} + d_{-2}\zeta^{-2} + \ldots \qquad (1.3)$$

Постоянная может быть определена через главный вектор сил Z^*, приложенных к выделенной внутри пространства области, охватывающей поверхность нагружения

$$Z^* = 8\pi(1-\nu)c_{-2} \qquad (1.4)$$

Рассматривается задача теории упругости для пространства со сферическим разрезом радиуса $R = 1$ и углом полураствора α (фигура).

К берегам разреза приложены осесимметричные нагрузки — нормальная $p^+(\theta)$, $p^-(\theta)$ и касательная $q^+(\theta)$, $q^-(\theta)$. При $R = 1$ на берегах разреза имеем ($\sigma = e^{i\vartheta}$):

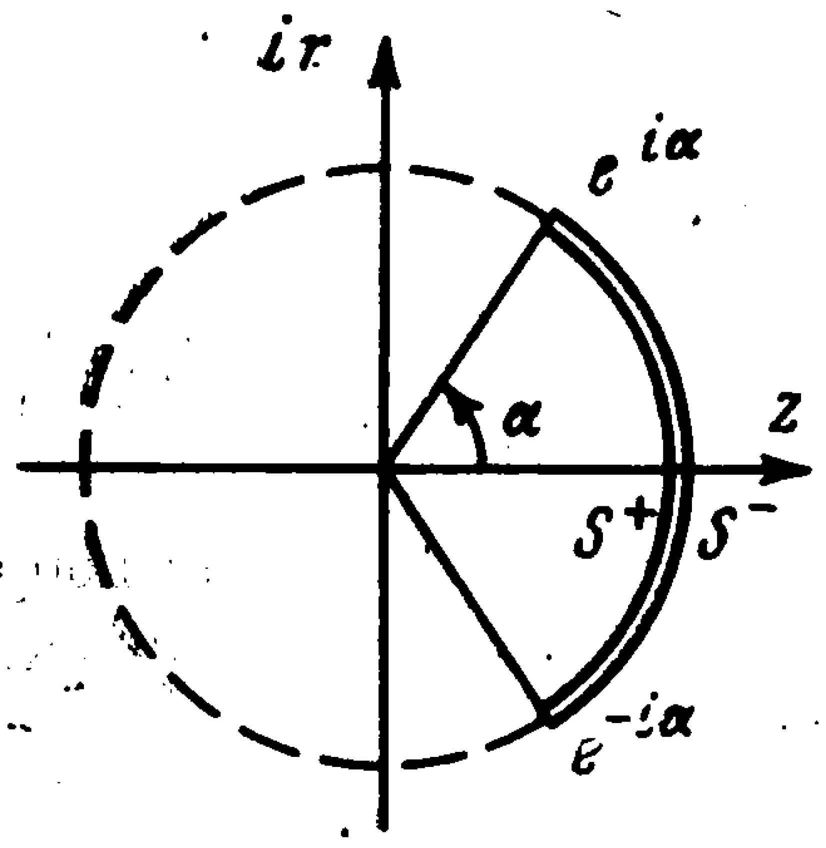
$$p^{\pm} = \pm\frac{2}{\pi}\int_0^{\theta}\operatorname{Re}\left[A^{\pm}(\sigma)\,e^{1/2 i\vartheta}\right]\frac{d\vartheta}{\sqrt{2(\cos\vartheta-\cos\theta)}}$$

$$q^{\mp}\sin\theta = \mp\frac{2}{\pi}\int_0^{\theta}\operatorname{Re}\left[B^{\pm}(\sigma)\,e^{1/2 i\vartheta}\right]\sqrt{2(\cos\vartheta-\cos\theta)}\,d\vartheta \tag{1.5}$$

Здесь $A(\zeta)$, $B(\zeta)$ — аналитические функции переменного ζ, определяемые выражениями

$$\begin{aligned} A(\zeta) &= \zeta^2F_1'' - 2(1+\nu)F_1 + \zeta^2F_2'' \\ B(\zeta) &= \zeta\left[\zeta^2F_1'' + 3\zeta F_1' - (1-2\nu)F_1 + \zeta^2F_2'' + \zeta F_2' - F_2\right]' \end{aligned} \tag{1.6}$$

Из условия ограниченности перемещений на границе разреза $R = 1$, $\theta = \alpha$ для $A(\zeta)$ и $B(\zeta)$ должны выполняться неравенства



$$A(\zeta) = K_1|\zeta-c|^{-\delta}$$

$$B(\zeta) = K_2|\zeta-c|^{-\delta-1} \quad \delta < 3/2 \tag{1.7}$$

Здесь K_1, K_2 —некоторые положительные постоянные, c — любой из концов разреза.

Разложения $A(\zeta)$ и $B(\zeta)$ в нуле и на бесконечности определяются поведением функций F_1 и F_2

$$\begin{aligned} &\lim_{\zeta\to\infty} A(\zeta) = O(\zeta^{-1}), && \lim_{\zeta\to\infty} B(\zeta) = O(\zeta^{-2}) \\ &\lim_{\zeta\to 0} A(\zeta) = O(\zeta), && \lim_{\zeta\to 0} B(\zeta) = \text{const} + O(\zeta) \end{aligned} \tag{1.8}$$

При известных $A(\zeta)$ и $B(\zeta)$ функция $F_1(\zeta)$ определяется из дифференциального уравнения

$$B - \zeta A' - A = 2\zeta^2F_1'' + 4(1+\nu)\zeta F_1' + 2(1+\nu)F_1 \tag{1.9}$$

Учитывая (1.4), из (1.9) найдем

$$\lim_{\zeta\to\infty}(B - \zeta A' - A) = \frac{4Z^*}{4\pi\zeta^2} + O(\zeta^{-3}) \tag{1.10}$$

В дальнейшем рассматриваемая задача разбивается на симметричную ($p^+ = p^- = p$, $q^+ = q^- = q$) и антисимметричную ($p^+ = -p^- = p$, $q^+ = -q^- = q$).

2. При симметричном нагружении разреза условия (1.5) принимают вид

$$p = \pm\frac{2}{\pi}\int_0^{\theta}\frac{\operatorname{Re}A^{\pm}(\sigma)\,e^{1/2 i\vartheta}\,d\vartheta}{\sqrt{2(\cos\vartheta-\cos\theta)}} \qquad (\theta \leqslant \alpha) \tag{2.1}$$

$$-q\sin\theta = \pm\frac{2}{\pi}\int_0^{\theta}\operatorname{Re}\left[B^{\pm}(\sigma)\,e^{1/2 i\vartheta}\right]\sqrt{2(\cos\vartheta-\cos\theta)}\,d\vartheta \tag{2.2}$$

Решая интегральные уравнения (2.1), (2.2), получим

$$\operatorname{Re}A^+e^{1/2 i\vartheta} = g_1(\vartheta), \qquad \operatorname{Re}A^-e^{1/2 i\vartheta} = -g_1(\vartheta) \tag{2.3}$$

$$\operatorname{Re}B^+e^{1/2 i\vartheta} = g_2(\vartheta), \qquad \operatorname{Re}B^-e^{1/2 i\vartheta} = -g_2(\vartheta) \tag{2.4}$$

Здесь

$$g_1(\vartheta) = \frac{d}{d\vartheta}\int_0^{\vartheta}\frac{p(\theta)\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\vartheta)}}, \qquad g_1(\vartheta) = g_1(-\vartheta) \tag{2.5}$$

$$g_2(\vartheta) = \frac{d}{d\vartheta}\sin^{-1}\vartheta\,\frac{d}{d\vartheta}\int_0^{\vartheta}\frac{q(\theta)\sin^2\theta\,d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\vartheta)}}, \qquad g_2(\vartheta) = g_2(-\vartheta) \tag{2.6}$$

Задачи (2.3), (2.4) могут быть приведены к соответствующим задачам линейного сопряжения. В частности, для решения задачи (2.3) вводим в S^- функцию Ω, связанную с $A(\zeta)$ зависимостью $\Omega(\zeta) = \bar{A}(\zeta^{-1})$

Соотношения (2.1) переходят в следующие:

$$\sigma A^+ + \Omega^- = g_1 e^{1/_2 i\vartheta}, \qquad \sigma A^- + \Omega^+ = -g_1 e^{1/_2 i\vartheta} \tag{2.7}$$

Задача (2.7) решается известными методами [6]. Учитывая (1.7), (1.8), найдем

$$A(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\bar{a}}^{a} g_1 e^{1/_2 i\vartheta} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} + \frac{a_0(\zeta - 1)}{X^2(\zeta)} \tag{2.8}$$

$$a = e^{i\alpha}, \qquad X(\zeta) = \sqrt{(\zeta - a)(\zeta - \bar{a})}, \qquad \lim_{\zeta \to 0} X(\xi) = 1$$

Аналогично для (2.4) получим

$$B(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\bar{a}}^{a} g_2 e^{-1/_2 i\vartheta} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} + \frac{\zeta - 1}{2\pi i X^{2}(\zeta)}\int_{\bar{a}}^{a} g_2 e^{-1/_2 i\vartheta} d\sigma + b_0 \frac{\zeta(\zeta - 1)}{X^4(\zeta)} \tag{2.9}$$

Из (1.9) и (1.10) находим связь между a_0 и b_0

$$b_0 + a_0(2\cos\alpha - 1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\bar{a}}^{a} [g_1\sigma + g_2(\sigma + 1 - 2\cos\alpha)]\, \sigma^{-1/_2} d\sigma \tag{2.10}$$

Чтобы найти второе условие для определения a_0 и b_0, можно поступить следующим образом. Согласно [1], вводится в рассмотрение аналитическая функция $A_1(\zeta)$, причем

$$p_z = \frac{2}{\pi}\int_0^{\theta} \frac{\operatorname{Re} A_1(\sigma)\, e^{1/_2 i\vartheta} d\vartheta}{\sqrt{2(\cos\vartheta - \cos\theta)}} \qquad (\theta < \alpha) \tag{2.11}$$

$$p_z = p\cos\theta - q\sin\theta \tag{2.12}$$

Метод определения $A_1(\zeta)$ изложен в [1]. Соответствующие вычисления дают

$$A_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\bar{a}}^{a} g_3 e^{-1/_2 i\vartheta} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} + \frac{\zeta - 1}{2\pi i X^2(\zeta)}\int_{\bar{a}}^{a} g_3 e^{-1/_2 i\vartheta} d\vartheta \tag{2.13}$$

$$g_3(\vartheta) = g_3(-\vartheta) = \frac{d}{d\vartheta}\int_0^{\vartheta} \frac{p_z(\theta)\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\vartheta)}} \tag{2.14}$$

На основании (2.12) на сфере $R = 1$ должно выполняться следующее условие:

$$\operatorname{Re}\int_0^{\theta} \frac{A(\sigma)\cos\theta + 2(\cos\vartheta - \cos\theta)B(\sigma) - A_1(\sigma)}{\sqrt{2(\cos\vartheta - \cos\theta)}} e^{1/_2 i\vartheta} d\vartheta = 0 \tag{2.15}$$

Условие (2.15) совместно с (2.10) служит для определения постоянных a_0 и b_0.

В качестве примера рассмотрим сферический разрез с углом полураствора α, нагруженный равномерным давлением p. Воспользовавшись (2.3) — (2.6), получим при $R = 1$

$$\operatorname{Re} A^+ e^{1/_2 i\vartheta} = p\cos\vartheta/2, \qquad \operatorname{Re} A^- e^{1/_2 i\vartheta} = -p\cos\vartheta/2$$

$$\operatorname{Re} B^+ e^{1/_2 i\vartheta} = 0, \qquad \operatorname{Re} B^- e^{1/_2 i\vartheta} = 0$$

Из формул (2.8) определяются $A(\zeta)$ и $B(\zeta)$

$$A(\zeta) = \frac{p}{2\pi i}\left[\left(1 + \frac{1}{\zeta}\right)\ln\frac{\zeta - a}{\zeta - \bar{a}} - \frac{2i\alpha}{\zeta}\right] + \frac{a_0(\zeta - 1)}{X^2(\zeta)}$$

$$B(\zeta) = \frac{b_0\zeta(\zeta - 1)}{X^4(\zeta)}, \qquad b_0 + a_0(2\cos\alpha - 1) = \frac{p}{\pi}\sin\alpha(1 + \cos\alpha)$$

Далее находим

$$I_1 = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\bar t}^{t} \frac{A(\zeta)\,d\zeta}{\sqrt{(\zeta - t)(\zeta - \bar t)}}, \qquad I_2 = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\bar t}^{t} B(\zeta)\sqrt{(\zeta - t)(\zeta - \bar t)}\,d\zeta \tag{2.16}$$

Интегралы (2.16) вычисляются методом Н. И. Мусхелишвили

$$I_1 = \frac{p}{\pi}\operatorname{Im}\Big\{\ln\left[X(a, t) + a - R\cos\theta\right] - $$

$$- \frac{1}{R}\ln \bar a\left[X(a, t) + R - a\cos\theta\right] + a_0 \operatorname{Im}\frac{1-a}{\sin\alpha X(a, t)}$$

$$I_2 = b_0\left[\operatorname{Im}\frac{\cos\alpha - 1}{2\sin^3\alpha}X(a, t) - \operatorname{Re}\frac{(a-1)(a-z)}{2\sin^2\alpha X(a, t)}\right]$$

Здесь

$$X(a, t) = \sqrt{(a-t)(a-\bar t)} = \sqrt{R^2 - 2az + a^2}, \quad \lim_{R\to 0} X(a, t) = a$$

Аналогично по (2.13) находим $A_1(\zeta)$ и

$$I_3 = (\pi i)^{-1}\int\limits_{\bar t}^{t} A_1\left[(\zeta - t)(\zeta - \bar t)\right]^{-1/2} d\zeta =$$

$$= \frac{p}{\pi}\operatorname{Im}\left\{\left(1 - \frac{1}{aR^2}\right)X(a, t) + z\ln\left[X(a, t) + a - z\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos\theta}{R^2}\ln\left[\bar a X(a, t) + \bar a R - \cos\theta\right] + (1 + \cos\alpha)\frac{1-a}{X(a, t)}\right\}$$

Воспользовавшись (2.15), после некоторых упрощений получим

$$-\frac{2p}{\pi}\sin^3\alpha\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos\theta\right) + b_0\sin^2\frac{\alpha}{2}(1 + \cos\theta) + a_0\sin^2\alpha\cos\theta = 0 \tag{2.17}$$

Для выполнения (2.17) должно быть

$$a_0 = \frac{2p}{\pi}\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha, \qquad b_0 = \frac{2p}{\pi}\sin^3\alpha$$

Нетрудно видеть, что при данных a_0 и b_0 условие (2.15) удовлетворяется тождественно. Напряжения на участке сферы $R = 1$, $\theta > \alpha$ могут быть определены в замкнутом виде. Соответствующие вычисления дают

$$\sigma_R = \frac{2p}{\pi}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}\sin\alpha/2}{\sqrt{\cos\alpha - \cos\theta}} - \frac{\sin\alpha\cos\alpha/2}{\sqrt{2(\cos\alpha - \cos\theta)}}\right]$$

$$\tau_{R\theta} = -\frac{4p\sin^3\alpha/2}{\pi\sin\theta}\,\frac{1 + \cos\theta}{\sqrt{2(\cos\alpha - \cos\theta)}} \tag{2.18}$$

В предельном случае плоского разреза выражения (2.18) переходят в известные формулы распределения напряжений в плоскости, совпадающей с плоскостью щели $z=0$ [7].

3. При антисимметричном нагружении вычисления, аналогичные проделанным выше, дают (3.1)

$$A = \frac{1}{2\pi i X(\zeta)}\int\limits_{\bar a}^{a} g_1 e^{-1/2\, i\vartheta} X^+(\sigma)\left(1 + \frac{\zeta}{\sigma}\right)\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} + \frac{a_0(\zeta - 1)}{2\pi i X^2(\zeta)}\int\limits_{\bar a}^{a} g_1 e^{-3/2\, i\vartheta} X^+(\sigma)\,d\sigma$$

$$B = \frac{1}{2\pi i X(\zeta)}\int\limits_{\bar a}^{a} g_2 e^{-3/2\, i\vartheta} X^+(\sigma)\left(1 + \frac{\zeta}{\sigma}\right)\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} + \frac{\zeta^2 - 1}{2\pi i X^3(\zeta)}\int\limits_{\bar a}^{a} g_2 e^{-3/2\, i\vartheta} X^+(\sigma)\,d\sigma + \frac{b_0\zeta(\zeta - 1)}{X^4(\zeta)}$$

Воспользовавшись результатами работы [1], найдем

$$A_1 = \frac{1}{2\pi i X(\zeta)}\int\limits_{\bar a}^{a} \frac{g_3}{\sqrt{\sigma}}X^+(\sigma)\left(1 + \frac{\zeta}{\sigma}\right)\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} + \frac{\zeta^2 - 1}{4X^2(\zeta)}\int\limits_{\bar a}^{a} \frac{g_3}{\sigma^{3/2}}X^+(\sigma)\,d\sigma\Big] \tag{3.2}$$

Здесь g_1, g_2 и g_3 определяются соответственно выражениями (2.5), (2.6), (2.14). Постоянные a_0 и b_0 определяются из совместного рассмотрения зависимости (2.10) и условия (2.15).

В качестве примера рассматривается нагружение разреза антисимметричным равномерным давлением p. В этом случае

$$\operatorname{Re} A^+ e^{1/2\, i\vartheta} = \operatorname{Re} A^- e^{1/2\, i\vartheta} = p \cos {}^1/_2\, \vartheta, \quad \operatorname{Re} B^+ e^{1/2\, i\vartheta} = \operatorname{Re} B^- e^{1/2\, i\vartheta} = 0$$

Формулы (3.1) и (3.2) дают

$$A = \frac{p}{2}\left[1 + \frac{1}{\zeta} + \frac{\zeta - \zeta^{-1}}{X(\zeta)}\right] + \frac{a_0(\zeta - 1)}{X^2(\zeta)}, \qquad B = \frac{b_0 \zeta(\zeta - 1)}{X^4(\zeta)}$$

$$A_1(\zeta) = \frac{p}{2}\left[\zeta + \frac{1}{\zeta^2} + \frac{\zeta + \zeta^{-2} + \cos\alpha\,(\zeta - \zeta^{-1})}{X(\zeta)} + \frac{\sin^2\alpha}{2X^2(\zeta)}\right]$$

Из (1.11) имеем

$$b_0 + a_0 (2\cos\alpha - 1) = 0.75\; p \sin^2\alpha \tag{3.3}$$

Формула (2.15) после несложных вычислений приводит к уравнению

$$^1/_4 \cos^4\alpha = a_0 \cos\theta \sin^2\alpha + b_0 \sin^2\alpha \,/\, 2\ (1 + \cos\theta)$$

Постоянные a_0 и b_0 равны

$$b_0 = p\cos^2\alpha \,/\, 2,\quad 4a_0 = -\,p\sin^2\alpha$$

Нетрудно видеть, что условие (3.3) выполнено. Напряжения σ_R и $\tau_{R\theta}$ при $R = 1$ $\theta > \alpha$ определяются зависимостями

$$\sigma_R = -\frac{p\sin^2\alpha}{4\sqrt{2(\cos\alpha - \cos\theta)}}, \quad \tau_{R\theta} = \frac{p\sin^2\alpha\cos^2\alpha/2}{\sin\theta\sqrt{2(\cos\alpha - \cos\theta)}}\,(1 + \cos\theta)$$

Предельный переход к плоской щели в данном случае является незаконным, так как в пределе вне разреза напряжение σ_z в плоскости щели равен нулю, а интеграл

$$\int_{r_0}^{\infty} \sigma_z\big|_{z=0} dr$$

взятый в этой же плоскости, равен постоянной величине. Поэтому антисимметричное нагружение плоской щели должно рассматриваться особо [8,9].

Поступила 18 VI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Бойко Л. Т., Зюзин В. А., Моссаковский В. И. Сферический разрез в упругом пространстве. Докл. АН СССР, 1968, т. 181, № 6.
2. Александров А. Я., Вольперт В. С. О применении одного метода решения осесимметричных задач теории упругости к задаче о шаре и о пространстве с шаровой полостью. Изв. АН СССР, ОТН, Механ. и машиностр., 1961, № 6.
3. Положий Г. Н. Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. P — аналитические и (p, q) — аналитические функции и некоторые их применения. Киев, изд-во Киевского ун-та, 1965.
4. Александров А. Я., Соловьев Ю. И. Одна форма решения пространственных осесимметричных задач теории упругости при помощи функций комплексного переменного и решение этих задач для сферы. ПММ, 1962, т. 26, вып. 1.
5. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1955.
6. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функции и некоторые их приложения к математической физике. Изд. 2, Физматгиз, 1962.
7. Снеддон И. Преобразования Фурье. М., Изд. иностр. лит., 1955.
8. Моссаковский В. И. Первая основная задача теории упругости для пространства с плоской круглой щелью. ПММ, 1955, т. 19, вып. 4.
9. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.—Л., Изд-во АН СССР, Ленингр. отделение, 1963.