ДЕЙСТВИЕ ШТАМПА НА УПРУГОЕ АНИЗОТРОПНОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

В. А. Свекло (Калининград)

Изученность вопроса о действии штампа на изотропное или трансверсально-изотропное полупространство при условии, что границей полупространства служит плоскость упругой симметрии и штамп давит в направлении оси упругой симметрии и имеет осесимметричную форму, общеизвестна. Действию же штампа на анизотропное полупространство в более общем случае анизотропии или для трансверсально-изотропного тела при условии, что граница полупространства не является плоскостью упругой симметрии, посвящены лишь отдельные работы [1,5] или таковые отсутствуют вовсе.

Ниже показывается, что распределение давления под круглым или эллиптическим в плане штампом при его действии на изотропное полупространство остается таким же при действии штампа на анизотропное (ортотропное) полупространство. Метод основан на построении комплексной функции нагружения, соответствующей заданной нагрузке.

Указываются формулы для осадки штампа различной формы для ортотропного тела и трансверсально-изотропной среды. В последнем случае предполагается, что граничная плоскость содержит ось упругой симметрии. Рассмотрен случай внецентренного действия прижимающей силы. Указана возможность распространения метода — построение и использование комплексной функции нагружения — на случай изотропной среды.

1. Ортотропное полупространство под действием нормальной нагрузки. Уравнения упругого равновесия ортотропного тела имеют решение [2]

$$u(x, y, z) = \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left[\sum_{k=1}^{3} \alpha \nu_k \Delta_k^{(1)} \omega_k(\Omega_k)\right] d\theta$$

$$v(x, y, z) = \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left[\sum_{k=1}^{3} \beta \nu_k \Delta_k^{(2)} \omega_k(\Omega_k)\right] d\theta$$

$$w(x, y, z) = \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left[\sum_{k=1}^{3} \Delta_k^{(3)} \omega_k(\Omega_k)\right] d\theta \qquad (1.1)$$

Здесь ν_k — корни уравнения

$$\begin{vmatrix} A^* & (N+H)\alpha\beta & (M+G)\alpha\nu \\ (N+H)\alpha\beta & B^* & (L+F)\beta\nu \\ (M+G)\alpha\nu & (L+F)\beta\nu & C^* \end{vmatrix} = 0 \qquad (1.2)$$

$$A^* = A\alpha^2 + N\beta^2 + M\nu^2, \qquad B^* = N\alpha^2 + B\beta^2 + L\nu^2$$

$$C^* = M\alpha^2 + B\beta^2 + C\nu^2, \qquad \alpha = \cos\theta, \qquad \beta = \sin\theta$$

Функции ω_k, зависящие от аргумента $\Omega_k = x\alpha + y\beta + \nu_k z$ — произвольны, $\alpha\nu_k\Delta_k^{(1)}$, $\beta\nu_k\Delta_k^{(2)}$, $\Delta_k^{(3)}$ — миноры определителя, стоящего в левой части равенства (1.2), соответствующие элементам третьей строки и корню ν_k, B, C, A...— упругие постоянные. Попарно комплексно сопряженные корни ν_k зависят только от α^2 и β^2, что следует из (1.2).

Если на границе полупространства $z \geqslant 0$ действует только нормальная осесимметричная нагрузка, то аналитические в верхней полуплоскости исчезающие на бесконечности функции ω_k находятся из равенств, вытекающих из граничных условий

$$\sum_{k=1}^{3} \nu_k \left[G\alpha^2\Delta_k^{(1)} + F\beta^2\Delta_k^{(2)} + C\Delta_k^{(3)}\right] \omega_k = \Psi^+$$

$$\sum_{k=1}^{3} (\nu_k\Delta_k^{(j)} + \Delta_k^{(3)})\, \omega_k = 0 \qquad (j = 1, 2) \qquad (1.3)$$

Здесь Ψ^+ — предельное значение функции $\Psi(\Omega)$, определяемой равенствами

$$\frac{d\Psi}{d\Omega}=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi(\tau)\,d\tau}{\tau-\Omega}, \qquad \Phi(\tau)=\frac{1}{2\pi}\frac{d}{d\tau}\int\limits_{0}^{\tau}\frac{\sigma_z\rho d\rho}{\sqrt{\tau^2-\rho^2}} \tag{1.4}$$

Функцию $\Psi(\Omega)$, исчезающую на бесконечности, назовем комплексной функцией нагружения, соответствующей заданной на границе полупространства нагрузке.

Во всех последующих рассмотрениях она находится непосредственно путем аналитического продолжения.

Если Δ_k — миноры определителя Δ_0 системы уравнений (1.3), то

$$\omega_k(\Omega_k)=\frac{\Delta_k}{\Delta_0}\Psi(\Omega_k) \qquad (k=1,\ 2,\ 3) \tag{1.5}$$

Подставляя в (1.1), получим формулы для упругих перемещений и, в частности

$$w(x,\ y,\ z)=\int\limits_{0}^{2\pi}\sum_{k=1}^{3}\operatorname{Re}\frac{\Delta_k^{(3)}\Delta_k}{\Delta_0}\Psi(\Omega_k)\,d\theta \tag{1.6}$$

2. Действие на ортотропное полупространство круглого плоского штампа. Пусть на ортотропное полупространство действует нормальная нагрузка вида

$$\sigma_z=\frac{-P}{2\pi R_0(R_0^2-\rho^2)^{1/2}} \qquad (\rho<R_0)\ \sigma_z=0 \qquad (\rho>R_0) \tag{2.1}$$

Имеем

$$\Phi(\xi)=\frac{P}{8\pi^2R_0}\frac{d}{d\xi}\ln\frac{|\xi-R_0|}{|\xi+R_0|} \qquad (\xi=x\alpha+y\beta) \tag{2.2}$$

Отсюда

$$\Psi(\Omega)=\frac{P}{8\pi^2R_0}\ln\frac{\Omega-R_0}{\Omega+R_0} \tag{2.3}$$

Под логарифмами здесь понимаются их главные значения. Соответственно получаем

$$\Psi^+=\frac{P}{8\pi^2R_0}\left[\ln\frac{|\xi-R_0|}{|\xi+R_0|}+\pi i\right] \qquad (|\xi|<R_0)$$

$$\Psi^+=\frac{P}{8\pi^2R_0}\ln\frac{|\xi-R_0|}{|\xi+R_0|} \qquad (|\xi|>R_0) \tag{2.4}$$

Из (1.6) выводим

$$w(x,\ y,\ 0)=\int\limits_{0}^{2\pi}\sum_{k=1}^{3}\operatorname{Re}\frac{\Delta_k^{(3)}\Delta_k}{\Delta_0}\Psi^+d\theta \tag{2.5}$$

Имеем далее

$$x=\rho\cos\varphi, \qquad y=\rho\sin\varphi, \qquad \xi=\rho\cos(\theta-\varphi)$$

Если $\rho<R_0$, то $|\xi|<R_0$. Поэтому, согласно (2.4), в точках границы полупространства, где $\rho<R_0$, получаем

$$w(x,\ y,\ 0)=\frac{P}{2\pi R_0}\int\limits_{0}^{1/2\pi}\sum_{k=1}^{3}\operatorname{Re}\frac{\Delta_k^{(3)}\Delta_k}{\Delta_0}i\,d\theta \tag{2.6}$$

Здесь учтено, что интегралы вида

$$\int\limits_{0}^{2\pi}E(\alpha^2,\ \beta^2)\ln\frac{|\xi-R_0|}{|\xi+R_0|}\,d\theta$$

равны нулю и что подынтегральное выражение в (2.6) зависит только от α^2 и β^2. Таким образом, в точках полупространства, где $\rho < R_0$, упругие перемещения, нормальные к границе, оказываются постоянными. Отсюда следует, что решение (1.1), отвечающее нагрузке (2.1), есть решение задачи о давлении на ортотропное полупространство гладкого круглого плоского штампа с радиусом R_0, нагруженного в центре силой P. Формула (2.6) определяет осадку штампа.

Заметим, что для всех реальных ортотропных тел интеграл в правой части равенства (2.6) положителен. В противном случае имели бы результат, противоречащий теореме существования и единственности решения поставленной задачи.

Прямое доказательство положительности упомянутого интеграла легко может быть проведено для ортотропного тела частного вида, когда упругие постоянные связаны дополнительными соотношениями

$$B = A, \quad G = F, \quad M = L \tag{2.7}$$

а также неравенствами

$$HC - F^2 > 0, \qquad A > H \tag{2.8}$$

которые выполняются для всех реальных тел класса (2.7), приведенных в [3]. Однако мы на этом здесь не останавливаемся.

Ниже в случае трансверсально-изотропного тела положительность интеграла, определяющего осадку штампа, устанавливается непосредственно.

Формула (2.5) дает возможность найти нормальные перемещения точек границы, лежащих вне круга $\rho \leqslant R_0$. Здесь подынтегральное выражение в (2.5) будет отлично от нуля на множестве значений θ, удовлетворяющих неравенствам

$$\rho\cos(\theta - \varphi) < R_0, \qquad \rho > R_0 \tag{2.9}$$

3. Действие плоского штампа, эллиптического в плане. Пусть E — область плоскости $z = 0$, ограниченная эллипсом с полуосями a, b, CE — ее дополнение до полной плоскости.

Нормальными напряжениями в точках M $(x, y, 0)$ границы полупространства зададимся в виде

$$\sigma_z = \frac{-P}{2\pi\sqrt{ab}\,(1 - x^2/a^2 - y^2/b^2)^{1/2}} \qquad (M \in E)$$

$$\sigma_z = 0 \qquad (M \in CE) \tag{3.1}$$

Положим

$$\sigma_z(x, y, 0) = \int_0^{2\pi} f\left(\frac{x\alpha + y\beta}{\Delta}\right)\frac{d\theta}{\Delta^2}, \qquad \Delta^2 = (l_2^2\alpha^2 + l_1^2\beta^2) \qquad \begin{pmatrix} l_1^2 = b/a \\ l_2^2 = a/b \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Получим

$$\sigma_z(r_1, 0) = \int_0^{2\pi} f(x_1\alpha_1 + y_1\beta_1)\,d\theta_1 \qquad \begin{pmatrix} x_1 = l_1 x, \quad y_1 = l_2 y \\ r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

$$\alpha_1 = \cos\theta_1 = l_2\alpha\Delta^{-1}, \qquad \beta_1 = \sin\theta_1 = l_1\beta\Delta^{-1}, \qquad d\theta_1 = \Delta^{-2}d\theta$$

Здесь мы воспользовались тем, что если $\theta \in (0, 2\pi)$, то и $\theta_1 \in (0, 2\pi)$, и наоборот. Таким образом, разрешающая функция, соответствующая нагрузке (3.1), имеет вид

$$\Psi(\Omega_k) = \frac{P}{8\pi^2\sqrt{ab}} \ln\frac{\Omega_k - \sqrt{ab}}{\Omega_k + \sqrt{ab}} \tag{3.4}$$

т. е. получается из (2.3) заменой R_0 на $\sqrt{ab}$. При этом в формулах (1.1) — (1.3), (2.5), (2.6) необходимо заменить α, β, на $\alpha\Delta^{-1}$, $\beta\Delta^{-1}$ и положить $\Omega_k = (x\alpha + y\beta + \nu_k z)\,\Delta^{-1}$.

Соответственно получим

$$w(x, y, 0) = \frac{P}{2\pi\sqrt{ab}} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{3} \operatorname{Re} \frac{\Delta_k^{(3)}\Delta_k}{\Delta_0}\, i\, \frac{d\theta}{\Delta} \tag{3.5}$$

4. Трансверсально-изотропное тело. Здесь имеем более простые результаты. Если ось z — ось упругой симметрии, то, полагая

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}, \qquad w = \frac{\partial\chi}{\partial z} \tag{4.1}$$

запишем уравнения равновесия в виде [2]

$$\begin{gathered} A\nabla\varphi + L\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + (L+F)\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2} = 0, \qquad N\nabla\psi + L\frac{\partial\psi}{\partial z^2} = 0 \\ (L+F)\nabla\varphi + L\nabla\chi + C\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2} = 0, \qquad \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{gathered} \tag{4.2}$$

Принимая за границу полупространства плоскость $y = 0$, построим решение (4.2) в виде

$$\varphi = \operatorname{Re}\int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{2}\varphi_k(\Omega_k)\,d\theta, \qquad \chi = \operatorname{Re}\int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{2}\chi_k(\Omega_k)\,d\theta, \qquad \psi = \operatorname{Re}\int_0^{2\pi}\psi_1(\Omega_3)\,d\theta$$

$$\Omega_p = \xi + \nu_p y, \qquad \nu_p = i\lambda_p = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2\gamma_p^{-2}} \qquad (p = 1, 2)$$

$$\xi = \alpha x + \beta z, \qquad \alpha = \cos\theta, \qquad \beta = \sin\theta \tag{4.3}$$

Получим

$$\begin{gathered} \varphi_k' = \sum_{k=1}^{2}(\gamma_k^2 C - L)\,\omega_k(\Omega_k), \qquad \chi_k' = (L+F)\sum_{k=1}^{2}\omega_k(\Omega_k) \\ \psi_1' = \omega_3(\Omega_3), \qquad \varphi_k' = d\varphi_k/d\Omega_k, \ldots \end{gathered} \tag{4.4}$$

Здесь $\gamma_3^2 = N/L$, а γ_k — корни уравнения

$$\begin{vmatrix} A - \gamma^2 L & -(L+F)\gamma^2 \\ L+F & L - \gamma^2 C \end{vmatrix} = 0 \tag{4.5}$$

При этом γ_k^2 вещественны, если $\sqrt{AC} > 2L + F$ и один из корней (его обозначим γ_1) больше единицы.

На границе полупространства имеем для σ_y условия (2.1) и равенство нулю касательных напряжения τ_{yx}, τ_{yz}.

Определитель Δ_0 в данном случае имеет вид

$$\Delta_0 = i \det |\, a_{kl} \,| \qquad (k = 1, 2, 3) \tag{4.6}$$

При этом его элементы имеют следующие выражения:

$$\begin{gathered} a_{1l} = L[(\gamma_l^2 C + F)\beta^2 + 2(\gamma_l^2 C - L)\alpha^2 \quad (l = 1, 2), \qquad a_{13} = 2N\alpha\lambda_3 \\ a_{2l} = 2(\gamma_l^2 C - L)\lambda_l\alpha \quad (l = 1, 2), \qquad a_{23} = \beta^2\gamma_3^{-2} + \alpha^2 \\ a_{3l} = (\gamma_l^2 C + F)\lambda_l \quad (l = 1, 2), \qquad a_{33} = \alpha, \end{gathered} \tag{4.7}$$

Получим

$$\Delta_0 = i(L+F)C(\gamma_2^2 - \gamma_1^2)\beta^2\Delta_1(\alpha, \beta) \tag{4.8}$$

Здесь

$$\Delta_1(\alpha, \beta) = \frac{4\alpha^2 L\lambda_2\lambda_3(\gamma_1^2 - \gamma_3^2)}{\gamma_1^2(\lambda_1 + \lambda_2)} + \\ + \frac{L(AC - F\cdot)\beta^2 + 4LN(\gamma_2^2 C + F)\alpha^2\beta^2 + 4N^2(\gamma_1^2 C - L)\alpha^4}{NA(\lambda_1 + \lambda_2)} \tag{4.9}$$

Если $\sqrt{AC} > 2L + F$, $N \leqslant L$, то $\Delta_1(\alpha, \beta) > 0$ для всех вещественных α, β. Получим

$$v(x, 0, z) = -4 \int_0^{1/2\pi} \frac{\lambda_1\lambda_2}{\Delta_1(\alpha, \beta)} \operatorname{Re} i\Psi^+ d\theta \tag{4.10}$$

Осадка под штампом согласно (2.4) определится формулой

$$v(x, 0, z) = \frac{P}{2\pi R_0} \int_0^{1/2\pi} \frac{\lambda_1\lambda_2}{\Delta_1(\alpha, \beta)} d\theta \tag{4.11}$$

Для эллиптического в плане плоского штампа получим соответственно

$$v(x, 0, z) = \frac{P}{2\pi\sqrt{ab}} \int_0^{1/2\pi} \frac{\lambda_1\lambda_2}{\Delta_1(\alpha, \beta)} \frac{d\theta}{\Delta} \tag{4.12}$$

Если среда изотропна, то

$$C = A = \lambda + 2\mu, \quad L = N = \mu, \quad F = \lambda, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1 \tag{4.13}$$

Подставляя в (4.12), выводим известный результат [4]

$$v(x, 0, z) = \frac{(\lambda + 2\mu) P}{4\pi\mu(\lambda + \mu) ab} \int_0^{1/2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha^2/a^2 + \beta^2/b^2}} \tag{4.14}$$

5. **Штамп, ограниченный поверхностью эллиптического параболоида.** Пусть нормальные напряжения в точках M границы распределены по закону

$$\sigma_y(x, 0, z) = \frac{3P}{2\pi ab}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}\right)^{1/2} \qquad (M \in E)$$

$$\sigma_y(x, 0, z) = 0 \qquad (M \in CE) \tag{5.1}$$

В данном случае как нетрудно показать

$$\Psi(\Omega_k) = \frac{3P}{8\pi(ab)^{3/2}}\left[-\sqrt{ab}\,\Omega_k + \frac{ab - \Omega_k^2}{2} \ln \frac{\Omega_k - \sqrt{ab}}{\Omega_k + \sqrt{ab}}\right] \tag{5.2}$$

Здесь

$$\Omega_k' = (\alpha x + i\lambda_k y + \beta z)\cdot\Delta^{-1}$$

При $y = 0$ получим, учитывая предельное значение функции Ψ при указанном выше выборе ветвей логарифмов

$$v(x, 0, z) = \frac{3P}{16\pi(ab)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_1\lambda_2}{\Delta_1(\alpha, \beta)} \left[ab - \frac{(\alpha x + \beta z)^2}{\Delta^2}\right] \frac{d\theta}{\Delta} \tag{5.3}$$

Отсюда

$$v(x, 0, z) = \delta - J_1 x^2 - J_2 z^2, \qquad \delta = \frac{3P}{4\pi\sqrt{ab}} \int_0^{1/2\pi} \frac{\lambda_1\lambda_2}{\Delta_1(\alpha, \beta)} \frac{d\theta}{\Delta}$$

$$J_l = \frac{3P}{4\pi(ab)^{3/2}} \int_0^{1/2\pi} \frac{\lambda_1\lambda_2\alpha_l^2}{\Delta_1(\alpha, \beta)} \frac{d\theta}{\Delta} \qquad \left(\begin{matrix}\alpha_1 = \alpha, \ \alpha_2 = \beta \\ l = 1, 2\end{matrix}\right) \tag{5.4}$$

Член, содержащий произведение xy, выпадает, так как соответствующий интеграл обращается в нуль. Считая площадку соприкосновения штампа с полупространством достаточно малой, получим

$$J_1 = R_1^{-1}, \qquad J_2 = R_2^{-1} \tag{5.5}$$

Здесь R_1, R_2 — главные радиусы кривизны поверхности, ограничивающей штамп, в точке M (0, 0, 0). Из (5.5) находим l_1 и $l_2 = l_1^{-1}$, затем a, b и δ.

Отметим, что в рассматриваемом случае круговому в плане штампу отвечает площадка контакта эллиптической формы, так как при $a = b$ значения J_1 и J_2 различны.

6. Давление круглого в плане штампа при внецентренном действии прижимающей силы. Нормальными напряжениями в круге $\rho < R_0$ границы полупространства $y = 0$ зададимся в виде

$$\sigma_y = -P/2\pi R_0^2\,[1 + 3\,(x_0 x + z_0 z)\,R_0^{-2}]\,.\,(R_0^2 - \rho^2)^{-1/2} \tag{6.1}$$

Построим соответствующую нагрузке (6.1) комплексную функцию нагружения. Положим

$$\frac{x}{(R_0^2 - \rho^2)^{1/2}} = \int_0^{2\pi} \alpha f(\xi)\, d\theta, \qquad \xi = \alpha x + \beta z \qquad \begin{pmatrix} \alpha = \cos\theta \\ \beta = \sin\theta \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

Легко устанавливается, что

$$\int_0^{2\pi} \alpha f(\xi)\, d\theta = \cos\varphi \int_0^{2\pi} \alpha f(\rho\alpha)\, d\theta \qquad \begin{pmatrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{pmatrix} \tag{6.3}$$

Поэтому для $f(\xi)$ получаем уравнение

$$\frac{\rho}{(R_0^2 - \rho^2)^{1/2}} = \int_0^{2\pi} \xi f(\xi)\, d\theta \tag{6.4}$$

сводящееся к уравнению Абеля. Его решение записывается в виде

$$f(\xi) = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{d\xi}\, \xi \ln \left| \frac{\xi - R_0}{\xi + R_0} \right| \tag{6.5}$$

Аналогично имеем

$$\frac{z}{(R_0^2 - \rho^2)^{1/2}} = \int_0^{2\pi} \beta f(\xi)\, d\theta \tag{6.6}$$

Таким образом, учитывая изображение функции $(R_0^2 - \rho^2)^{-1/2}$, получим изображение (6.1) в виде

$$\Phi(\xi) = \frac{P}{8\pi R_0} \frac{d}{d\xi} \left\{ \left[1 + \frac{3\,(x_0\alpha + z_0\beta)\,\xi}{R_0^2} \right] \ln \left| \frac{\xi - R_0}{\xi + R_0} \right| \right\} \tag{6.7}$$

Отсюда, не нарушая (6.7) и обеспечивая исчезание $\Psi(\Omega)$ на бесконечности, выводим

$$\Psi(\Omega) = \frac{P}{8\pi R_0} \left\{ \left[1 + \frac{3\,(x_0\alpha + z_0\beta)}{R_0^2}\,\Omega \right] \ln \frac{\Omega - R_0}{\Omega + R_0} + \frac{6\,(x_0\alpha + z_0\beta)}{R_0} \right\} \tag{6.8}$$

Легко убедиться в том, что второе слагаемое в скобках не влияет на осадку штампа. Выбор ветвей логарифмов указан выше. Подставляя в (4.10), получим при $y = 0$, $\rho < R_0$

$$v(x, 0, z) = \frac{P}{8\pi R_0} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_1\lambda_2}{\Delta_1(\alpha, \beta)} \left[1 + \frac{3\,(x_0\alpha + z_0\beta)}{R_0^2}\,\xi \right] d\theta \tag{6.9}$$

или, так как интеграл, содержащий произведение $\alpha\beta$, равен нулю

$$v(x, 0, z) = \frac{P}{2\pi R_0} \int_0^{1/2\pi} \frac{\lambda_1\lambda_2}{\Delta_1(\alpha, \beta)} \left[1 + \frac{3(x_0x\alpha^2 + z_0z\beta^2)}{R_0^2}\right] d\theta \tag{6.10}$$

Из (6.10) следует, что функция нагружения (6.8) реализует решение задачи о действии на анизотропное полупространство плоского круглого штампа при внецентренном приложении силы P.

Если таким же образом нагрузить силой P эллиптический в плане плоский штамп, то, рассуждая как выше, получим соответственно

$$\Psi(\Omega_k) = \frac{P}{8\pi\sqrt{ab}} \left\{\left[1 + \frac{3(x_0\alpha + z_0\beta)}{ab\Delta}\Omega_k\right] \ln\frac{\Omega_k - \sqrt{ab}}{\Omega_k + \sqrt{ab}} + \right.$$
$$\left. + \frac{6(x_0\alpha + z_0\beta)}{\sqrt{ab}}\right\}, \qquad \Omega_k = (x\alpha + z\beta + i\lambda_k y)\,\Delta^{-1} \tag{6.11}$$

Функция (6.11) соответствует нагрузке

$$\sigma_y(x, 0, z) = -\frac{P}{2\pi\sqrt{ab}}\left(1 + \frac{3x_0x}{a^2} + \frac{3z_0z}{b^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{-1/2} \tag{6.12}$$

Выражение в скобках, содержащее x_0, z_0, должно быть положительным, что накладывает ограничение на положение точки приложения силы P. Перемещения точек под штампом найдутся по формуле

$$v(x, 0, z) = \frac{P}{2\pi\sqrt{ab}} \int_0^{1/2\pi} \frac{\lambda_1\lambda_2}{\Delta_1(\alpha, \beta)} \left[1 + \frac{3x_0x\alpha^2 + 3z_0z\beta^2}{ab\Delta^2}\right] \frac{d\theta}{\Delta} \tag{6.13}$$

Аналогичные результаты могут быть записаны для ортотропного тела.

Принимая (4.13), везде получим известные результаты для изотропной среды.

Во всех рассмотренных случаях упругие перемещения в полупространстве исчезают не медленнее, чем $(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$.

Из изложенного выше заключаем, что по крайней мере для ортотропного тела и трансверсально-изотропной среды в рассмотренных задачах распределение давления под штампом не зависит от вида анизотропии. От последней зависят размеры площадки давления (если они не заданы) и осадка штампа.

В заключение отметим возможность применения метода в случае изотропного тела. Здесь необходимо предварительно построить решение (1.1). Для этого достаточно внести (1.5) в (1.1) и перейти к пределу, используя (4.13).

Поступила 13 II 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Купрадзе В. Д., Гегелия Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В. Трехмерные задачи математической теории упругости. Тбилиси, Изд. Тбил. ун-та, 1968.
2. Свекло В. А. Задачи типа Буссинеска для анизотропного полупространства. ПММ, 1964, т. 28, вып. 5.
3. Лява А. Математическая теория упругости. М.— Л., ОНТИ, 1935.
4. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1955.
5. Willis J. R. Boussinesq problems for an anisotropic half — space. J. Mech. and Phys. Solids., 1967, 15, № 5.