

ДВИЖЕНИЕ ГАЗА ПРИ ЗАДАННОМ ПРОСТРАНСТВЕННОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДАВЛЕНИЯ

В. Е. Неуважаев

(Челябинск)

Рассматривается одномерное движение идеального газа под действием распределенного давления, заданного по степенному закону в зависимости от массы $p = p_0 m^{-l}$, $l > 0$. Изучены задачи о разлете и о симметричном движении. Эти задачи формально автомодельны при любом показателе l . Однако при $l > 1$ получающаяся система обыкновенных дифференциальных уравнений не имеет решения, удовлетворяющего заданным краевым условиям. Это связано с тем, что в этом случае в окрестности точки $m = 0$ сосредоточена бесконечная энергия. Если же ее положить конечной, изменив в окрестности $m = 0$ профиль давления, то такая задача не автомодельна, но в пределе при $t \rightarrow \infty$ асимптотически стремится к автомодельному решению с показателем, отвечающим в случае разлета задаче о сосредоточенном ударе [1,2]. Для задачи о симметричном движении] показатель всегда равен единице и не зависит от начального распределения с $l > 1$.

Для случая $l \leq 1$ задача имеет автомодельное решение при любом показателе $l \leq 1$. Следует отметить, что при $l = 1$ получается тот же показатель автомодельности, что и в задаче о плоском взрыве [3]. Ниже основное внимание уделено случаю, когда $l \leq 1$. Результаты исследования приводятся в виде графиков. В некоторых случаях удастся найти точное аналитическое решение уравнений автомодельного движения. Численным интегрированием исходных уравнений в частных производных подтверждено предположение о выходе на автомодельное решение при $l > 1$.

1. Имеется идеальный газ с уравнениями состояния

$$p = R\rho T, \quad \varepsilon = p/(\gamma - 1)\rho \quad (1.1)$$

Здесь ρ — плотность, T — температура, p — давление, ε — внутренняя энергия, R и γ — газовые постоянные. При $t = 0$ газ покоится

$$u(0, m) = 0 \quad (1.2)$$

начальная плотность постоянна $\rho = \rho_0$, а давление задано по степенному закону

$$p(0, m) = p_0 m^{-l} \quad (l, p_0 = \text{const} > 0) \quad (1.3)$$

Здесь m — массовая координата. Будем рассматривать задачи:

о разлете, когда при $t = 0$ газ граничит с вакуумом

$$m = 0, \quad p(0, t) = 0 \quad (1.4)$$

о симметричном движении с центром в точке $m = 0$

$$m = 0, \quad u(0, t) = 0 \quad (1.5)$$

Движение газа в лагранжевых координатах описывается системой

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\rho} - \frac{\partial u}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + p \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\rho} = 0 \quad (1.6)$$

Условия на ударной волне имеют вид

$$\begin{aligned} \rho_1 (D - u_1) &= \rho_0 (D - u_0), & p_1 + \rho_1 (D - u_1)^2 &= p_0 + \rho_0 (D - u_0)^2 \\ \varepsilon_1 - \varepsilon_0 &= \frac{1}{2} (p_1 + p_0) \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_1} \right) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь D — скорость ударной волны, индекс нуль относится к состоянию перед фронтом, индекс единица — за фронтом волны.

Введем безразмерные функции по формулам (1.8)

$$\begin{aligned} p &= (\gamma - 1) A t^{-2l/(l+2)} \rho_0 \pi(\alpha), & \rho &= \rho_0 \delta(\alpha), & u &= \sqrt{A \gamma (\gamma - 1)} t^{-l/(l+2)} \zeta(\alpha) \\ \alpha &= \frac{2mt^{-2/(l+2)}}{(l+2) \sqrt{\gamma(\gamma-1)} A \rho_0}, & p_0 &= \left(\frac{l+2}{2} \right)^l \gamma^{1/l} [A \rho_0 (\gamma - 1)]^{1/2(l+2)} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Подстановка (1.8), (1.9) в (1.6) и (1.7) дает систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \delta^2 \zeta' - \alpha \delta' &= 0, & \alpha \zeta' - \frac{1}{\gamma} \pi' &= -\frac{1}{2} l \zeta \\ -\gamma \pi \delta' + \delta \pi' &= -l \pi \delta / \alpha \end{aligned} \quad (1.10)$$

с условиями на ударной волне

$$\begin{aligned} \delta_1 (\alpha - \xi_1) &= \delta_0 (\alpha - \xi_0), & \gamma^{-1} \pi_1 + \delta_1 (\alpha - \xi_1)^2 &= \gamma^{-1} \pi_0 + \delta_0 (\alpha - \xi_0)^2 \\ \frac{\pi_1}{\delta_1} - \frac{\pi_0}{\delta_0} &= \frac{\gamma - 1}{2} (\pi_1 + \pi_0) \left(\frac{1}{\delta_0} - \frac{1}{\delta_1} \right) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Известно [3], что последнее уравнение системы (1.10) можно проинтегрировать и получить

$$\delta = k \alpha^{l/\gamma} \pi^{1/\gamma} \quad (1.12)$$

Здесь k — постоянная интегрирования. Воспользовавшись (1.12), преобразуем систему (1.10) к виду

$$\begin{aligned} \pi' &= -\frac{l\gamma}{\Gamma} \left(\frac{\pi}{\gamma} + \frac{k}{2} \alpha^{(l-\gamma)/\gamma} \pi^{(\gamma+1)/\gamma} \zeta \right), & \zeta' &= -\frac{l}{\Gamma} \left(\frac{\pi}{\gamma \alpha} + \frac{\zeta}{2} \right) \\ \Gamma &= \alpha - k \alpha^{(l-\gamma)/\gamma} \pi^{(\gamma+1)/\gamma} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Следуя работе [4], введем новые переменные Π и Z

$$\zeta = \alpha^{\frac{\gamma-l-1}{\gamma+1}} \Pi^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} Z, \quad \pi = \alpha^{\frac{2\gamma-l}{\gamma+1}} \Pi^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} \quad (1.14)$$

При этом система (1.13) приведет к следующей:

$$\begin{aligned} \alpha \frac{d\Pi}{d\alpha} &= \Pi \frac{-(l+2) - 1/2 l (\gamma+1) k \Pi Z + (2 - l/\gamma) k \Pi}{1 - k \Pi} \\ \alpha \frac{dZ}{d\alpha} &= \frac{-l/\gamma + 1/2 (l+2) Z - k \Pi Z + 1/2 l \gamma k \Pi Z^2}{1 - k \Pi} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Поделив одно уравнение на другое, получим

$$\Pi \frac{dZ}{d\Pi} = \frac{-l/\gamma + 1/2 (l+2) Z - k \Pi Z + 1/2 l \gamma k \Pi Z^2}{-(l+2) - 1/2 l (\gamma+1) k \Pi Z + (2 - l/\gamma) k \Pi} \quad (1.16)$$

2. В случае разлета газа в вакуум структура решения будет такова: при $t > 0$ в движение придет вся масса газа, за исключением точки в бесконечности, где естественно положить

$$u(\infty, t) = 0 \quad (2.1)$$

Граница газ — вакуум с бесконечной скоростью полетит в вакуум. В газе образуется ударная волна, распространяющаяся по возмущенному фону.

Для уравнения (1.16) поставим граничные условия. Сначала рассмотрим условия на бесконечности (2.1). Заметим, что из (1.8) и (1.9) следует

$$p = p_0 m^{-l} \alpha^l \pi(\alpha), \quad u = (\gamma p_0)^{1/2} m^{-1/2l} \alpha^{1/2l} \zeta(\alpha) \quad (2.2)$$

Отсюда при фиксированном m и $t \rightarrow 0$ должны иметь место начальные условия (1.2), (1.3), поэтому

$$\alpha \rightarrow \infty, \quad \alpha^{1/2l} \zeta(\alpha) \rightarrow 0, \quad \alpha^l \pi(\alpha) \rightarrow 1 \quad (2.3)$$

Из (1.14), получим

$$\Pi \alpha^{l+2} \rightarrow 1 \quad \text{при } \alpha \rightarrow \infty \quad (2.4)$$

Покажем, что условиям на бесконечности должна отвечать точка

$$\Pi = 0, \quad Z = 2l/(l+2)\gamma \quad (2.5)$$

На основании (2.4) граничное условие для (1.16) лежит на координатной оси $\Pi = 0$, но так как ось $\Pi = 0$, являясь решением уравнения (1.16), не может быть искомым решением, то начальная точка будет особой, т. е. решение пересечет прямую $\Pi = 0$. Особыми точками, принадлежащими оси $\Pi = 0$, будут (2.5) и точка

$$\Pi = 0, \quad z = \infty \quad (2.6)$$

Последняя не может быть начальной. Из физических соображений ясно, что в окрестности точки (2.6) функции Π и Z положительны — см. (1.8), (1.14). Легко показать, что уравнение (1.16) при $\Pi > 0$ и $Z > 0$ имеет целое семейство решений, выходящих из точки (2.6)

$$\Pi = CZ^{-2} + \dots \quad (2.7)$$

где C — некоторая постоянная. Однако в этом случае в окрестности рассматриваемой точки имеем

$$\zeta = C_1 \alpha^{-1/2l} + \dots$$

Это противоречит условию $\zeta \alpha^{-1/2l} \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow \infty$ из (2.3). Поэтому условиям на бесконечности в переменных Π и Z отвечает единственная точка (2.5). Характер ее — седло, а искомое решение имеет следующее разложение:

$$\Pi = -\frac{3\gamma(l+2)^3}{4l(l^2-l-2)} \left(z - \frac{2l}{(l+2)\gamma} \right) + \dots \quad (2.8)$$

3. Рассмотрим на границе газ — вакуум условие (1.4) и покажем, что в переменных Π и Z этому условию отвечает особая точка с координатами

$$\Pi_0 = 0, \quad Z_0 = -\infty \quad (3.1)$$

Укажем также разложение решения в окрестности (3.1).

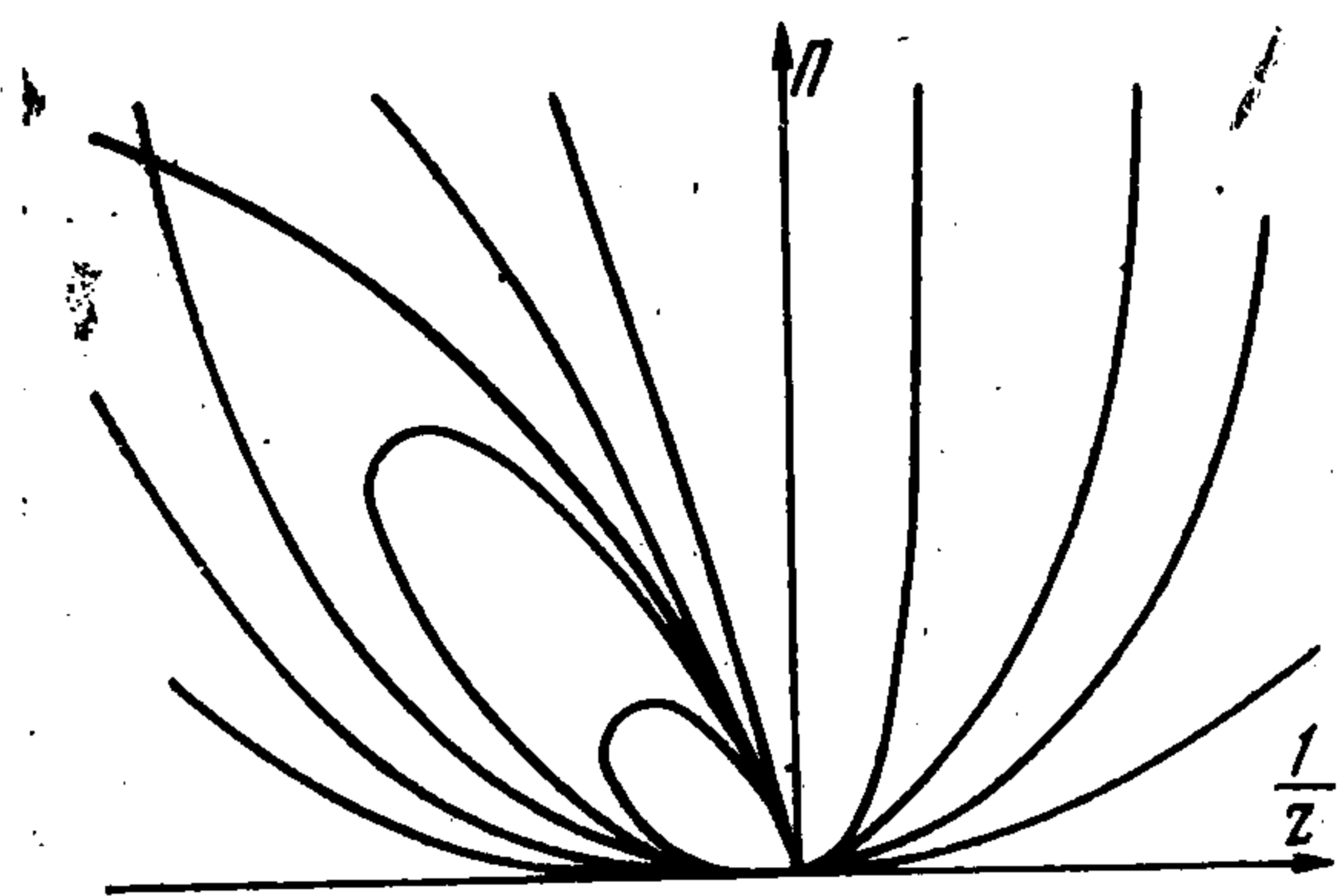
Допустим, что Π_0 и Z_0 — конечные величины при $\alpha = 0$. Тогда из (1.14) и (1.13) следуют уравнения для определения Π_0 и Z_0

$$\begin{aligned} -\frac{2\gamma - l}{(\gamma + 1)l\gamma} (1 - k\Pi_0) &= \frac{1}{\gamma} + \frac{k}{2} \Pi_0 Z_0 \\ -\frac{\gamma - l - 1}{l(\gamma + 1)} Z_0 (1 - k\Pi_0) &= \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{2} Z_0 \end{aligned}$$

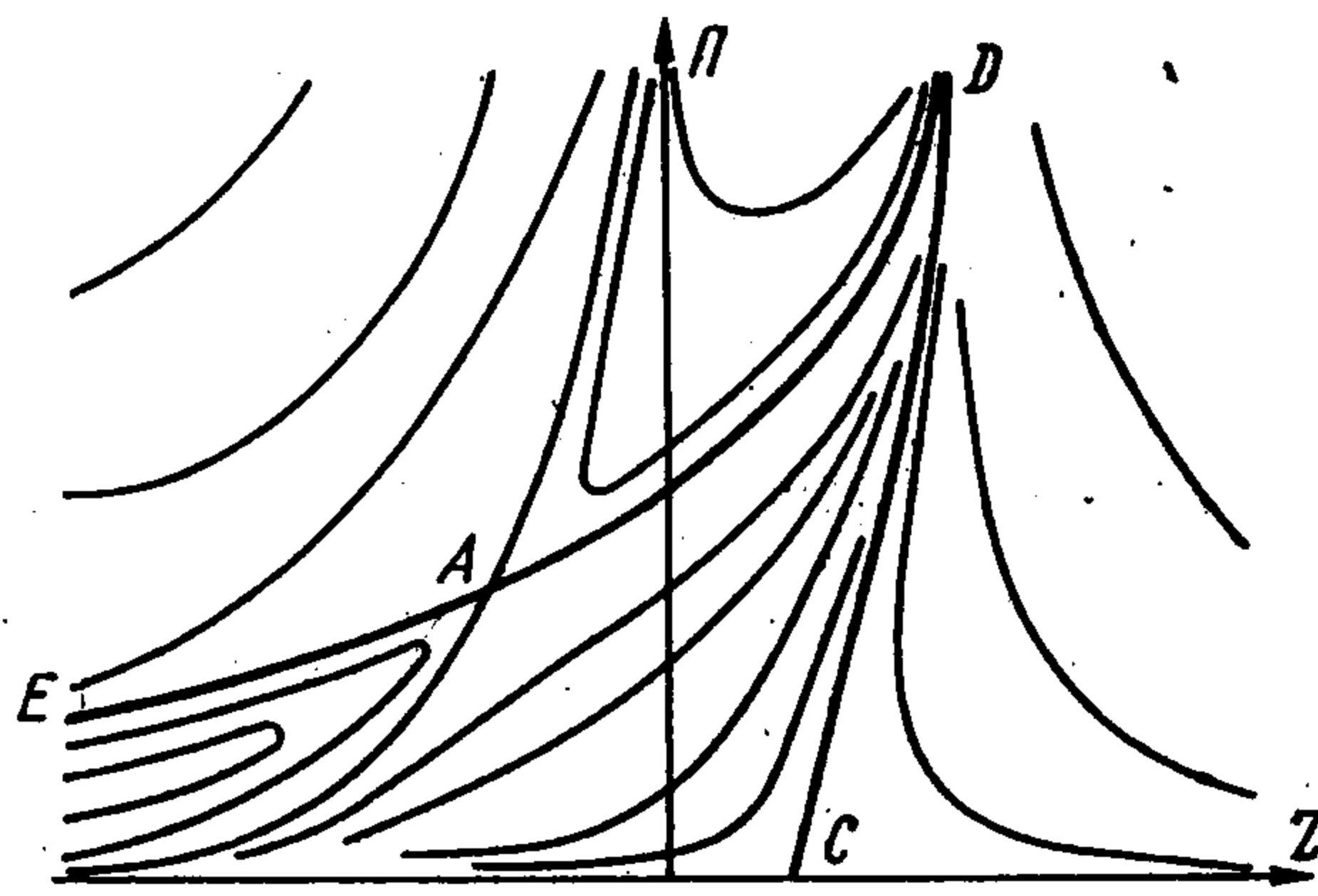
Решая последние, имеем

$$A \left(Z_0 = -\frac{2}{\gamma}, \Pi_0 = \frac{1}{k} \right), \quad B \left(Z_0 = \frac{4(l - 2\gamma)}{\gamma(l + 2)(1 - \gamma)}, \Pi_0 \right)$$

Для точки B при $l - 2\gamma < 0$ получим $Z_0 > 0$, поэтому эта точка должна быть отброшена, так как из (1.14) следует $Z_0 < 0$ при $\alpha = 0$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Точка A , как и точка B , является особой для уравнения (1.16). Характер особенности — седло. Сепаратрисы седла имеют разложения

$$\Pi = \frac{1}{k} + \lambda_1 \left(Z + \frac{2}{\gamma} \right) + \dots, \quad \Pi = \frac{1}{k} + \lambda_2 \left(Z + \frac{2}{\gamma} \right) + \dots \quad (3.2)$$

Подставив (3.2) в (1.15), получим

$$\Pi = (l + 2) \ln \alpha + C \quad (3.3)$$

Это противоречит предположению о конечности Π_0 . Следовательно, и точка A должна быть отброшена. Остается единственная точка (3.1), которая и соответствует границе газ — вакуум. Разложение решения в ее окрестности имеет вид

$$\Pi = -\frac{2 + l}{lk} \frac{1}{Z} + \dots, \quad Z = C \alpha^{1/2(l+2)(1-\gamma)} + \dots \quad (3.4)$$

$$\zeta \sim \alpha^{-1/2l}, \quad \pi \sim \alpha^{1/2(l+2)\gamma-l} \quad (3.5)$$

Из (3.1) выходит еще семейство интегральных кривых (2.7), для которого $\pi \sim \alpha^{-l}$, что при $l > 0$ противоречит граничному условию (1.4). Поэтому искомое решение представляется разложением (3.4). Из (3.5) видно, что газ истекает с бесконечной скоростью. Поведение интегральных кривых в окрестности (3.1), представлено на фиг. 1.

4. Опишем метод построения решения. Из предыдущего вытекает, что решение должно лежать в верхней полуплоскости $\Pi \geq 0$ (фиг. 2) и проходить через особые точки C и E . Очевидно, при движении вдоль кривой CD от точки C к точке D параметр α должен убывать. Однако это будет происходить, пока $\Pi < k^{-1}$. Следовательно,

непрерывного решения построить нельзя и нужно воспользоваться условиями на ударной волне (1.11), с тем чтобы, выйдя из точки C , прийти в точку E . Из условий на ударной волне вытекает $Z_1 > 0$, поэтому решение должно пройти еще через особую точку A .

Постоянная k , входящая в уравнение (1.16), по разные стороны разрыва будет разной. Как следует из условия (2.3), перед фронтом ударной волны $k_0 = 1$. Дальнейшее построение решения состоит в подборе местоположения фронта ударной волны, определяемого значением α . Последнее должно быть выбрано так, чтобы точка (Π_1, Z_1) , получаемая из соотношений (1.14) и условий, на ударной волне, (1.11) и (1.12), лежала на сепаратрисе DA . Пять неизвестных α , ζ_1 , δ_1 , π_1 , k_1 , вообще говоря, определяются из трех условий (1.11), соотношения (1.12) и условия прохождения интегральной кривой через особую точку A .

Численное интегрирование для уравнения (1.16) ведется в промежутке $0 < \Pi < 1$, причем в точке (2.5) используется разложение (2.8). Когда функция $Z = Z(\Pi)$ определена, решение первого уравнения системы (1.15), находится в промежутке $\alpha_* < \alpha < \infty$ с учетом, что точка $(\alpha = \infty, \Pi = 0)$ — особая, а искомая интегральная кривая имеет асимптотику (2.4). Далее по формулам (1.11), (1.12), (1.14) вычисляем последовательно

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= \alpha^{(\gamma-l-1)/(\gamma+1)} \Pi_0^{\gamma/(\gamma+1)} Z_0, & \delta_1 &= \delta_0 \frac{\zeta_0 - \alpha}{\zeta_1 - \alpha}, & \pi_0 &= \alpha^{(2\gamma-l)/(\gamma+1)} \Pi_0^{\gamma/(\gamma+1)} & (4.1) \\ \delta_0 &= \alpha^{l/\gamma} \pi_0^{1/\gamma}, & \zeta_1 &= \alpha + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} (\zeta_0 - \alpha) + \frac{2\pi_0}{(\gamma+1)\delta_0(\zeta_0 - \alpha)}, & k_1 &= \delta_1 \alpha^{-l/\gamma} \pi_1^{-1/\gamma} \\ \pi_1 &= \pi_0 \frac{1-\gamma}{1+\gamma} + \frac{2\gamma}{1+\gamma} \delta_0 (\zeta_0 - \alpha)^2, & \Pi_1 &= \alpha^{(l-2\gamma)/\gamma} \pi_1^{(\gamma+1)/\gamma} \\ Z_1 &= \alpha^{(l+1-\gamma)/(\gamma+1)} \Pi_1^{-\gamma/(\gamma+1)} \zeta_1 \end{aligned}$$

Полученная кривая $\Pi_1(Z_1)$ должна пересечь сепаратрису EAD , определяемую также численно, при некотором значении параметра α_1 .

5. Рассмотрим случай $l > 1$. Заметим, что пересечение не всегда возможно. Это значит, что поставленная задача не имеет автомодельного решения. Докажем для $l = 2, \gamma = 1.5$.

В частном случае при $l = 2 (\gamma - 1) / (2 - \gamma)$ сепаратриса DA может быть определена аналитически

$$\Pi = \frac{1}{k} \cdot 1/(2 - \gamma) / \gamma - (\gamma - 1)Z \quad (5.1)$$

Интегральная кривая CD при $l = 2$ будет прямой $Z = 1/\gamma$. Для $l = 2, \gamma = 1.5$ имеем

$$\alpha = (1 + 1/4 \Pi_0)^{1/2} \Pi_0^{-1/4}$$

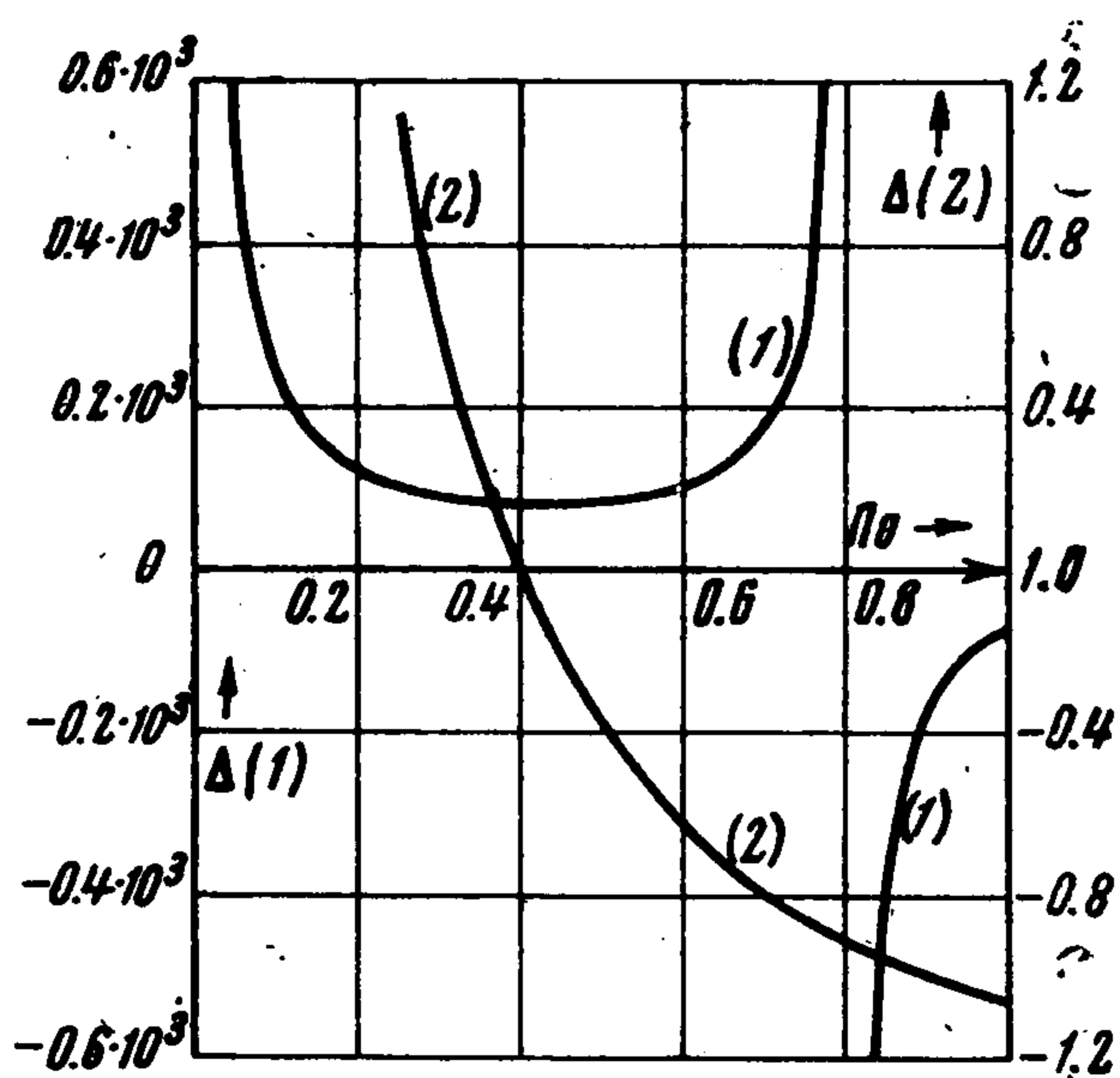
По формулам (4.1) получим некоторую кривую

$$\Delta = \pi_1^{1/2} \alpha^{-2/3} - 6/k (3 - 2\alpha \zeta_1 \pi^{-1/4})$$

изображенную на фиг. 3. Как видно из приводимого графика, она не пересекает ось $\Delta = 0$, а потому при $\gamma = 1.5$ и $l = 2$ автомодельного решения рассматриваемая задача не имеет.

Для выяснения физической сути получающегося при этом решения определим полную энергию системы при $t = 0$

$$E_0 = \frac{p_0}{(\gamma - 1) \rho_0} \frac{m^{1-l}}{1-l} \Big|_0^\infty \quad (5.2)$$

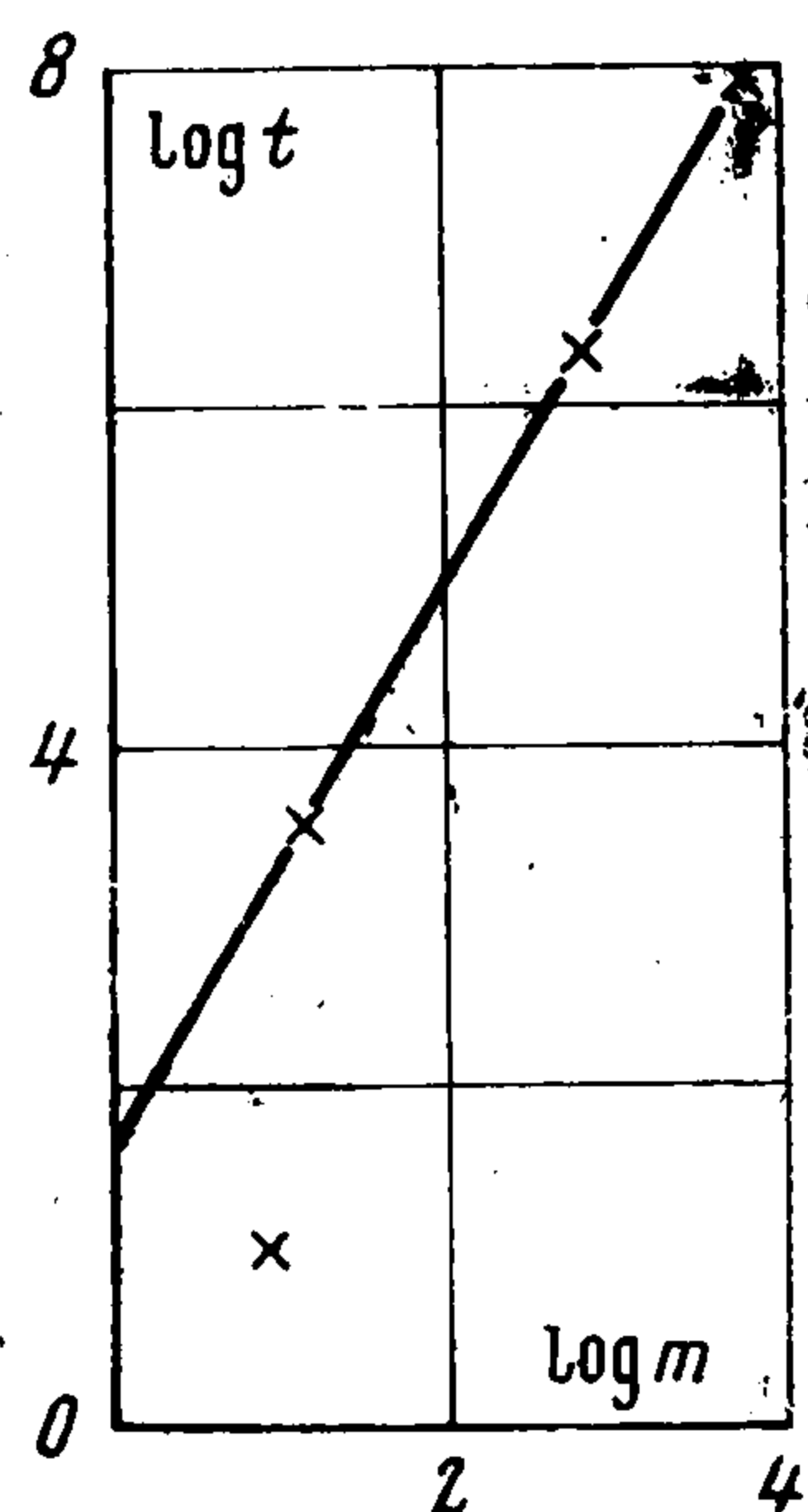


Фиг. 3

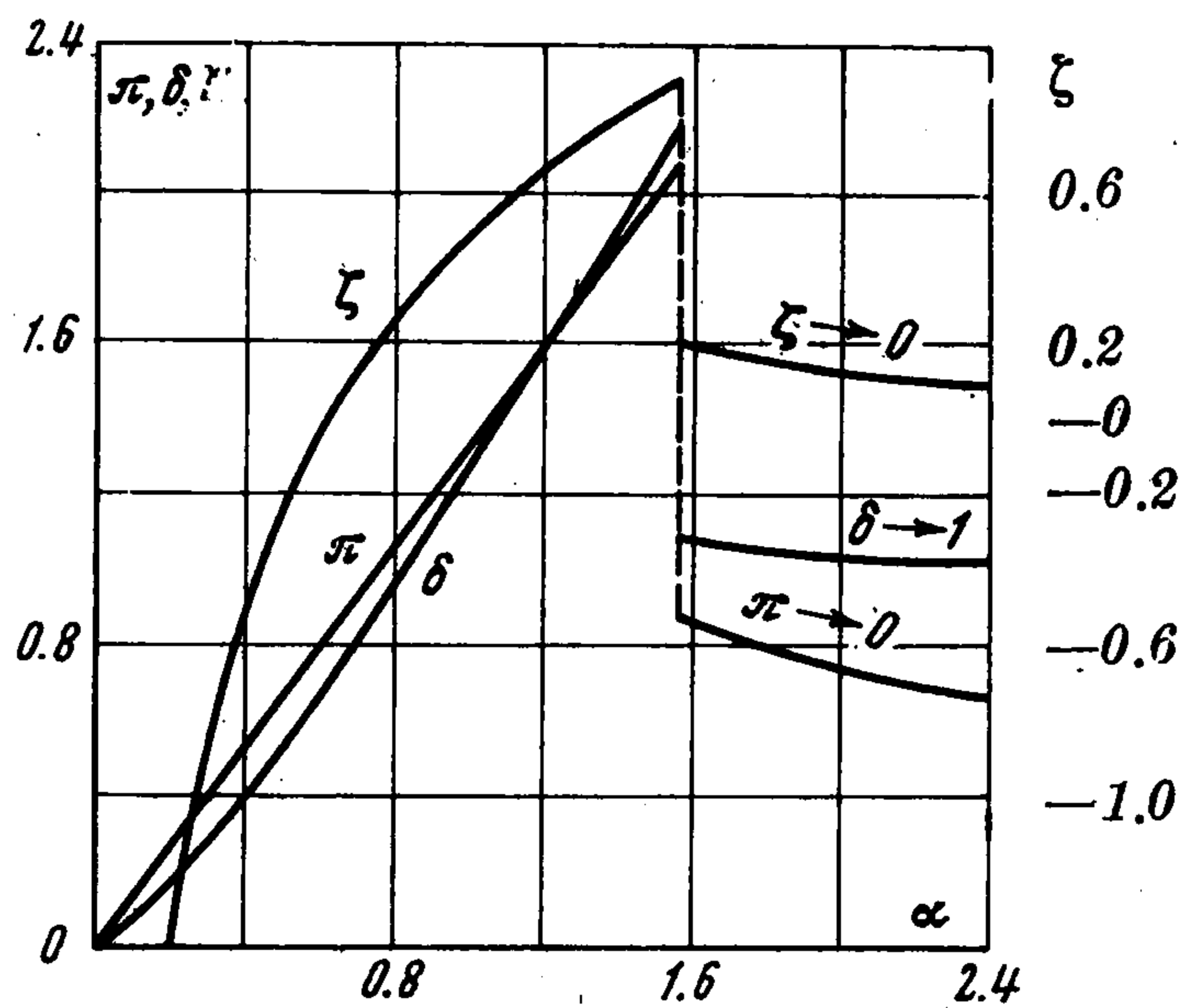
Получим, что она бесконечна: при $l > 1$ интеграл расходится в точке $m = 0$, а при $l < 1$ для $m = \infty$. Если $l > 1$, то получаем, что при некотором фиксированном m_0 конечная масса газа обладает бесконечной энергией, а газ бесконечной массы ($m > m_0$) имеет конечную энергию. На границе газа с вакуумом в этом случае сосредоточена бесконечная энергия. Если эту энергию считать конечной, положив, например

$$p = p_0 m_0^{-l} \quad (m \leq m_0), \quad p = p_0 m^{-l} \quad (m > m_0) \quad (5.3)$$

то такая задача уже не будет автомодельной. Заранее не очевидно, на какое автомодельное решение выйдет поставленная задача. Им могло бы оказаться некоторое решение системы обыкновенных уравнений (1.15). Но, как было показано на примере



Фиг. 4



Фиг. 5

$\gamma = 1,5$, $l = 2$, такого решения не существует. Из численного расчета, проведенного для исходных уравнений в частных производных (1.6) по разностной методике [6], следует, что решение довольно быстро выходит на автомодельное с показателем, соответствующим задаче о сосредоточенном ударе [1].

На фиг. 4 для $\gamma = 1,4$ и $l = 2$ изображена зависимость координаты фронта ударной волны от времени: сплошной линией обозначен фронт волны в автомодельной задаче о сосредоточенном ударе по холодному газу ($l = 4/3$, см. [6]), точками нанесены результаты численного интегрирования неавтомодельной задачи с начальным профилем (5.3) для $l = 2$ и $\gamma = 1,4$.

6. Случай $l \leq 1$. При таком распределении начального давления задача автомодельна. Кривая 2 на фиг. 3 пересекает ось $\Delta = 0$. Метод построения решения указан в п. 3.

При $l = 2(\gamma - 1) / (2 - \gamma)$ решение за фронтом ударной волны может быть выписано в конечном виде

$$\pi = \frac{\pi_1}{\alpha_1} \alpha, \quad \delta = k_1 (\pi_1/\alpha_1)^{1/\gamma} \alpha^{1/(2-\gamma)} \quad (6.1)$$

$$\zeta = (\pi_1/\alpha_1)^{-1/\gamma} \frac{1}{(1-\gamma)k_1} \alpha^{(\gamma-1)/(\gamma-2)} + \frac{2-\gamma}{(\gamma-1)\gamma} \frac{\pi_1}{\alpha_1}$$

Решение перед фронтом получается в результате численного интегрирования уравнений (1.15), (1.16). Для $\gamma = 1,2$, $l = 0,5$ оно представлено на фиг. 5. На фронте ударной волны соответствующие параметры задачи получились равными

$$\alpha_1 = 1,56, \quad \delta_0 = 1,09, \quad \delta_1 = 2,19, \quad \pi_0 = 0,892$$

$$\pi_1 = 2,08, \quad \zeta_0 = 0,213, \quad \zeta_1 = 0,886, \quad k_1 = 0,988$$

Как видно из фиг. 5, максимальные значения плотности, скорости и давления достигаются на фронте ударной волны. Сжатие на ударной волне получается заметно ниже предельного, которое при $\gamma = 1,2$ равно 11.

7. Рассмотрим симметричное движение газа. Эта задача допускает обобщение на цилиндрическую и сферическую геометрии. Исследуем точку, отвечающую плоскости симметрии $m = 0$. Граничное условие (1.5) примет вид

$$\alpha = 0, \quad \zeta = 0 \quad (7.1)$$

Если предположить, что давление на плоскости симметрии отлично от нуля, то из (1.14) следует

$$Z = \frac{\zeta \alpha}{\pi}, \quad Z(\alpha = 0) = 0 \quad (7.2)$$

а также при $2\gamma - l > 0$

$$\Pi(\alpha = 0) = \infty \quad (7.3)$$

Поэтому в плоскости ΠZ граничному условию соответствует точка

$$Z = 0, \quad \Pi = \infty \quad (7.4)$$

Эта особая точка — узел. Можно показать, что искомым решением будет кривая, пересекающая в особой точке семейство интегральных кривых. Разложение решения при $l < \gamma$ имеет вид

$$\Pi = l/k (\gamma - l) 1/Z + \dots \quad (7.5)$$

Как и в случае задачи о разлете, здесь решение может быть построено для $l \leq 1$. Причем, если $l = 1$, то за ударной волной оно выписывается в конечном виде, так как кривая

$$\Pi = 2/k (\gamma - 1)Z (2 - \gamma Z) \quad (7.6)$$

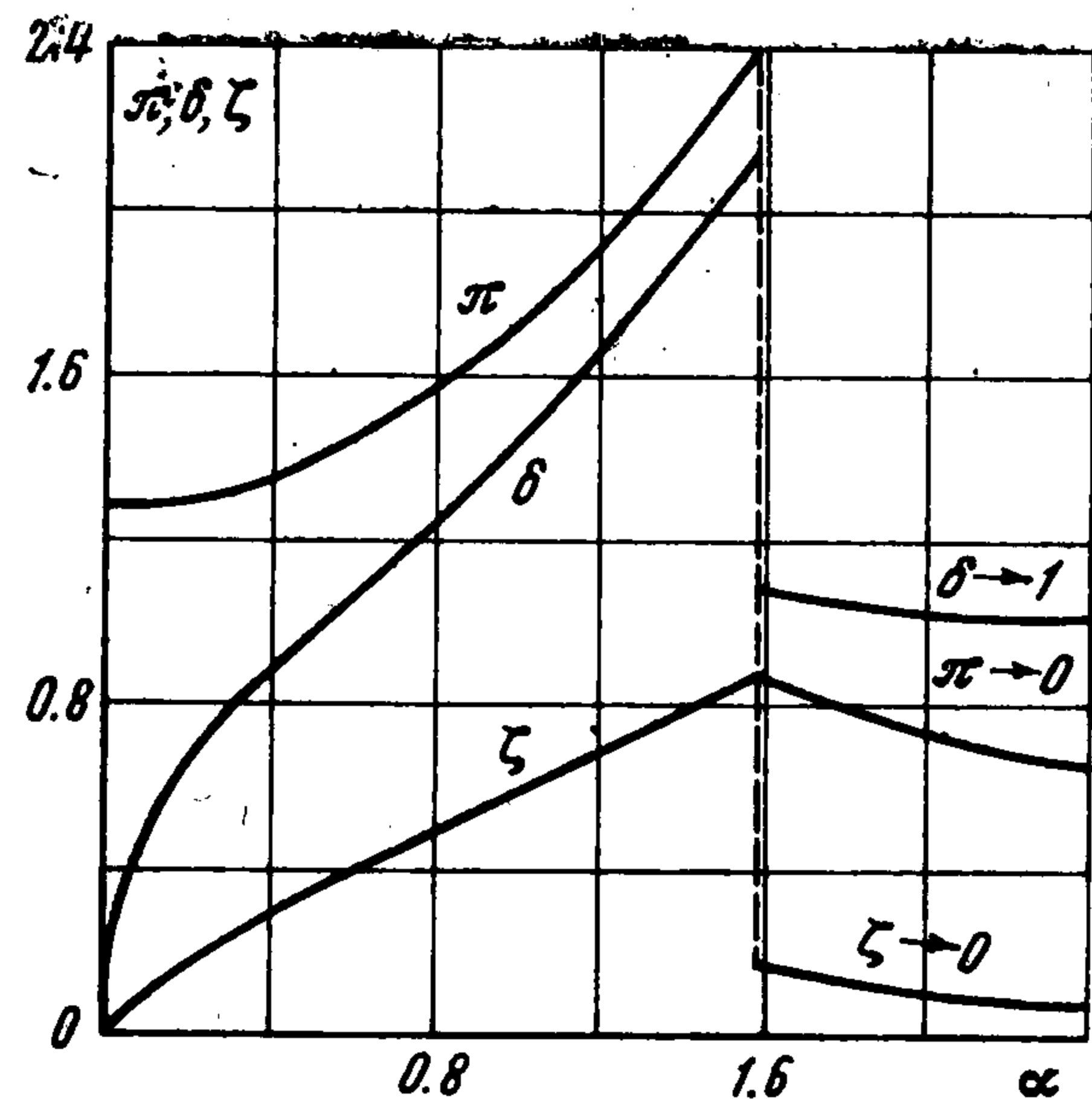
будет решением (1.16). Зная (7.6), можно проинтегрировать (1.15). Для $l > 1$ решение автомодельной задачи не существует. Если же в качестве начального распределения при $l > 1$ взять профиль давления (5.3), то такая задача при $t \rightarrow \infty$ выйдет на автомодельное решение, отвечающее задаче о плоском взрыве [3] с показателем автомодельности $l = 1$. На фиг. 6 приведено решение для $\gamma = 1,4$, $l = 0,5$. По возмущенному фону распространяется ударная волна, максимальные значения скорости, плотности и давления достигаются на ударной волне. При $m = 0$ давление конечно, а плотность равна нулю.

Автор благодарит Р. А. Жилину и М. П. Бронникову, оказавших помощь при численном интегрировании уравнений (1.15), (1.16).

Поступила 29 VII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. З е л ь д о в и ч Я. Б. Движение газа под действием кратковременного давления (удара). Акуст. ж., 1956, т. 2, вып. 1.
2. З е л ь д о в и ч Я. Б., Р а й з е р Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., Физматгиз, 1963.
3. С е д о в Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Изд. 4-е. М., Гостехиздат, 1957.
4. А д а м с к и й В. Б. Интегрирование системы автомодельных уравнений в задаче о кратковременном ударе по холодному газу. Акуст. ж., 1956, т. 2, вып. 1.
5. Я н е н к о Н. Н., Н е у в а ж а е в В. Е. Один метод расчета газодинамических движений с нелинейной теплопроводностью. Тр. матем. ин-та им. Стеклова, 1966, т. 74.
6. Ж у к о в А. И., К а ж д а н Я. М. О движении газа под действием кратковременного импульса. Акуст. ж., 1956, т. 2, вып. 4.



Фиг. 6