

ОБ АНАЛОГИИ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ И ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ И ПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ

В. М. Е н т о в

(Москва)

Между плоскими задачами нелинейной фильтрации и задачами о продольном сдвиге нелинейно-упругих и пластических тел имеется простая аналогия, позволяющая переносить результаты и постановки задач из одной области в другую. Ниже она формулируется в явном виде (п. 1), рассматриваются некоторые примеры и следствия из нее (п. 2) и устанавливается вариационный принцип для уравнений нелинейной фильтрации и вытекающие из него и из принципа максимума оценки для интегральных характеристик фильтрационного потока (п. 3).

1. 1°. Система уравнений плоской нелинейной фильтрации несжимаемой жидкости состоит из уравнений закона фильтрации и уравнения неразрывности [1, 2]

$$\text{grad} H = - \Phi(w) \mathbf{w} / w, \quad \text{div} \mathbf{w} = 0 \quad (1.1)$$

где \mathbf{w} — скорость фильтрации, H — напор. В плоской задаче \mathbf{w} и $\text{grad} H$ — двумерные векторы, лежащие в плоскости x, y .

Рассмотрим теперь цилиндрическое пластическое тело с образующей, параллельной оси z , и допустим, что каждая прямая, параллельная образующей, перемещается вдоль себя как жесткий стержень. При этом тело находится в условиях продольного сдвига (антиплоской деформации), действующие в теле напряжения сводятся к двум касательным напряжениям τ_{xz} и τ_{yz} , и имеют место уравнения (например [3])

$$\text{grad} \zeta = \boldsymbol{\gamma} = \Gamma(\boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\tau} / \tau, \quad \text{div} \boldsymbol{\tau} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь $\zeta = \zeta(x, y)$ — смещение в направлении оси z , через $\boldsymbol{\gamma}$ обозначен вектор деформации сдвига $(\partial \zeta / \partial x, \partial \zeta / \partial y)$, $\boldsymbol{\tau}$ — вектор касательных напряжений (τ_{xz}, τ_{yz}) . Чтобы перейти от твердого тела к нелинейно-вязкой жидкости, достаточно заменить соответствующие смещения скоростями, а деформации — скоростями деформации. При этом уравнения (1.2) будут описывать «куэттовские» движения, т. е. прямолинейно-параллельные движения жидкости без продольного градиента давления.

Входящие в уравнения (1.1) и (1.2) функции $\Phi(w)$ и $\Gamma(\boldsymbol{\tau})$ описывают соответственно законы фильтрации и деформирования или течения.

Введем теперь вместо векторов $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\tau}$ равные им по величине, но повернутые на угол $1/2 \pi$ векторы $\boldsymbol{\gamma}^*$ и $\boldsymbol{\tau}^*$. Имеем

$$\gamma_x^* = -\gamma_y = -\frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad \gamma_y^* = \gamma_x = \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \tau_x^* = -\tau_y, \quad \tau_y^* = \tau_x \quad (1.3)$$

В результате получим

$$\text{div} \boldsymbol{\gamma}^* = 0, \quad \text{rot} \boldsymbol{\tau}^* = 0 \quad (1.4)$$

так что можно рассматривать $\boldsymbol{\tau}^*$ как градиент функции напряжений χ ,

$$\boldsymbol{\tau}^* = \text{grad} \chi = S(\boldsymbol{\gamma}^*) \boldsymbol{\gamma}^* / \gamma^*, \quad \text{div} \boldsymbol{\gamma}^* = 0 \quad (1.5)$$

В силу того, что векторы $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\tau}^*$, $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\gamma}^*$ попарно равны по абсолютной величине, а векторы $\boldsymbol{\gamma}^*$ и $\boldsymbol{\tau}^*$ совпадают по направлению, функция $S(\boldsymbol{\gamma}^*)$ обратна функции $\Gamma(\boldsymbol{\tau})$.

Из сопоставления систем (1.1), (1.2) и (1.5) следуют две системы аналогий между задачами фильтрации и задачами прямолинейно-параллельных движений. В первой из них вектору скорости фильтрации соответствует вектор напряжения $\boldsymbol{\tau}$, градиенту напора, взятому с обратным знаком, — вектор деформации $\boldsymbol{\gamma}$, напору H с обратным знаком — продольное смещение ζ , а функции тока ψ — функции напряжений χ , наконец, функции $\Phi(w)$, отвечает функция $\Gamma(\boldsymbol{\tau})$

$$\mathbf{w} \rightleftharpoons \boldsymbol{\tau}, \quad -H \rightleftharpoons \zeta, \quad -\text{grad} H \rightleftharpoons \boldsymbol{\gamma}, \quad \psi \rightleftharpoons \chi, \quad \Phi \rightleftharpoons \Gamma \quad (1.6)$$

Во второй системе аналогий соответствие имеет вид

$$\mathbf{w} \rightleftharpoons \boldsymbol{\gamma}^*, \quad -H \rightleftharpoons \chi, \quad -\text{grad} H \rightleftharpoons \boldsymbol{\tau}^*, \quad \psi \rightleftharpoons \zeta, \quad \Phi \rightleftharpoons S \quad (1.7)$$

2°. Установим соответствия особых точек и граничных условий для решений соответствующих задач. В типичной для теории фильтрации постановке задачи граница S области D , в которой ищется решение, может состоять из участков S_H , на которых принимает заданное значение напор H , и участков S_w , на которых задано значение нормальной составляющей скорости фильтрации w_n (или, что то же самое, задана производная от функции тока вдоль границы, $\partial\psi / \partial s$). Наконец, внутри области D могут находиться особые точки M_i — источники и стоки, при обходе которых функция тока приобретает конечное приращение q_i и вблизи которых скорость фильтрации имеет особенность вида $q_i / [2\pi\rho(M, M_i)]$, где $\rho(M, M_i)$ — расстояние от точки M_i до текущей точки M .

В первой системе аналогий в задаче теории пластичности на участке границы S_H задается смещение ζ , на участке S_w задаются нормальные к границе напряжения τ_n (или производная от функции напряжений χ , взятая вдоль границы). Наконец, источникам и стокам отвечают, очевидно, сосредоточенные силы q_i , так что напряжения вблизи точек M_i имеют особенность вида $q_i / [2\pi\rho(M, M_i)]$.

Во второй системе аналогий на участке границы S_H задаются значения функции напряжений χ (а следовательно, и направленная вдоль границы компонента «дополнительного» напряжения τ^* или нормальная к границе компонента напряжения τ). На участке S_w задаются значения смещения ζ (или компонента деформации γ в направлении границы). Обход особой точки M_i приводит к приращению смещения ζ на величину q_i . Это означает, что точки M_i должны рассматриваться как винтовые дислокации с вектором Бюргерса, направленным вдоль образующей и равным q_i . Наконец, сосредоточенные силы P_i отвечают точечным вихрям¹ интенсивности P_i .

Очевидно также, что имеет место двойственность решений задач нелинейной упругости (пластичности) при продольном сдвиге. Именно, каждому решению $\tau = \tau(x, y)$, $\gamma = \gamma(x, y)$, $\zeta = \zeta(x, y)$ системы (1.2) отвечает решение системы (1.5) $\gamma^* = \tau(x, y)$, $\tau^* = \gamma(x, y)$, $\chi = \zeta(x, y)$ при условии, что функция S для второй системы совпадает с функцией Γ для первой.

2. Проиллюстрируем сказанное некоторыми примерами. 1°. В работе В. В. Соколовского [4] указан частный случай нелинейного закона фильтрации, имеющего в принятых здесь обозначениях вид

$$\Phi(w) = w [1 - (w/w_*)^2]^{-1/2} \quad (2.1)$$

для которого отображение плоскости переменных ψ, H на плоскость вспомогательных переменных h, θ является конформным.

Здесь θ — угол между скоростью w и осью x , h определено соотношением

$$C \frac{e^h}{e^{2h} + C^2/4w_*^2} = w \quad (2.2)$$

Аналогичный результат для задачи продольного сдвига нелинейно-упругого тела получен Нейбером [5].

2°. Нейбер [6], используя по аналогии с газовой динамикой преобразование годографа (т. е. принимая за независимые переменные напряжение τ и угол θ , составленный им с осью x), нашел решения с особенностью для тел с клинообразным вырезом. Уравнение для функции напряжений χ имеет вид

$$\frac{\tau^2}{\Gamma(\tau)} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\Gamma^2(\tau)}{\tau \Gamma'(\tau)} \frac{\partial \chi}{\partial \tau} \right) + \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (2.3)$$

Пусть ищется распределение напряжений во внешности полубесконечного разреза. Тогда для любого вида зависимости $\Gamma(\tau)$ можно указать особое решение, т. е. нетривиальное решение, для которого напряжения на берегах разреза равны нулю. Искомое решение определено с точностью до постоянного множителя и имеет вид

$$\chi = A \sin \theta [\Gamma(\tau)]^{-1} \quad (2.4)$$

¹ Под точечным вихрем здесь понимается особенность поля скоростей фильтрации того же типа, что и особенность скорости вблизи гидродинамического вихря. В задачах теории фильтрации течения с вихрями не возникают, представляя, таким образом, теоретическую идеализацию.

Используя формулы возвращения на физическую плоскость, можно найти картину распределения напряжений вблизи выреза.

С учетом указанных выше аналогий получаем немедленно решения двух других задач. Заменой $\tau \rightarrow \gamma^*$, $\chi \rightarrow \zeta$, $\Gamma \rightarrow S$ получаем особое решение задачи о распределении смещений вблизи края жестко закрепленной плоскости в теле («впаянной в тело жесткой пластинки»)

$$\zeta = A [S(\gamma^*)]^{-1} \sin \theta \quad (2.5)$$

Здесь θ — угол между вектором γ^* и осью x .

Наконец, замена $\tau \rightarrow w$, $\chi \rightarrow \psi$, $\Gamma \rightarrow \Phi$ дает уравнение для определения функции тока ψ в плоскости годографа скорости фильтрации w, θ

$$\frac{w^2}{\Phi(w)} \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\Phi^2(w)}{w\Phi'(w)} \frac{\partial \psi}{\partial w} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (2.6)$$

(что, очевидно, совпадает с уравнением (1.5) работы [7]). Рассмотренное Нейбером решение дает зависимость $\psi(w, \theta)$ для задачи об обтекании полубесконечной пластинки фильтрационным потоком (см. [7])

$$\psi = A [\Phi(w)]^{-1} \sin \theta \quad (2.7)$$

Отметим, что газодинамическая задача об обтекании пластинки была решена Ринглем [8] (см. также [9]). Из работы Ринглеба немедленно усматривается существование решения вида (2.4) при произвольном законе $\Gamma(\tau)$.

Наконец, приводимые Нейбером решения для клиновидных областей могут быть непосредственно использованы для описания поведения решения в угловых точках области фильтрации при степенном законе фильтрации.

3°. Преобразование годографа может быть применено и к задачам с более сложной геометрией. В работах [10-12] приведен ряд возникающих при этом постановок задач и некоторые конкретные решения для случая фильтрации с предельным градиентом, когда функция $\Phi(w)$ имеет вид

$$\Phi(w) = w + \lambda \quad (w > 0), \quad 0 \leq \Phi(w) \leq \lambda \quad (w = 0) \quad (2.8)$$

Нетрудно видеть, что все эти задачи могут быть истолкованы так же как задачи продольного сдвига жестко-пластического тела с упрочнением, для которого напряжения зависят от деформаций по закону

$$S(\gamma) = \gamma + \lambda \quad (\gamma > 0), \quad 0 \leq S(\gamma) \leq \lambda \quad (\gamma = 0) \quad (2.9)$$

При этом источникам будут отвечать винтовые дислокации соответствующей величины, застойные зоны перейдут в жесткие ядра, а линии тока — в линии постоянных смещений ζ . В частности, полученное в [11] решение определяет поле винтовой дислокации с вектором Бюргерса q , центрально расположенной в слое, поверхности которого смещены друг относительно друга на расстояние $q/2$.

Аналогичным образом построенные в работе [7], особые решения задач теории фильтрации с предельным градиентом могут интерпретироваться как задачи о деформации клиновидных тел, следующих соотношению (2.9), с закрепленным краем или как задачи продольного течения вязко-пластических (бингамовских) жидкостей в клиновидных областях.

При более сложной геометрии, когда получить точное решение задачи не удается, может оказаться полезным использование метода годографа с последующим приближенным решением задачи в плоскости годографа.

Рассмотрим в качестве примера деформацию слоя (фиг. 1) жестко-пластического тела с линейным упрочнением (соотношение (2.9)), если в срединной плоскости слоя приложена перпендикулярная плоскости чертежа сосредоточенная сила величины P в расчете на единицу длины в направлении оси z («Вытягивание жесткой нити из слоя»), причем боковые поверхности слоя жестко закреплены. Фильтрационным аналогом этой задачи является задача о течении с предельным градиентом, создаваемым точечным вихрем интенсивности P , расположенным посередине между двумя непроницаемыми прямыми. При этом возникает застойная зона, отвечающая для пластического тела

жесткой области (на фиг. 1 заштрихована). Отображение элемента $OABC$ деформированной области в плоскость годографа γ, θ показано на фиг. 2, причем имеем

$$\zeta = 0 \text{ на } ABC, \partial\psi / \partial\theta = 0 \text{ на } OA, OC \quad (2.10)$$

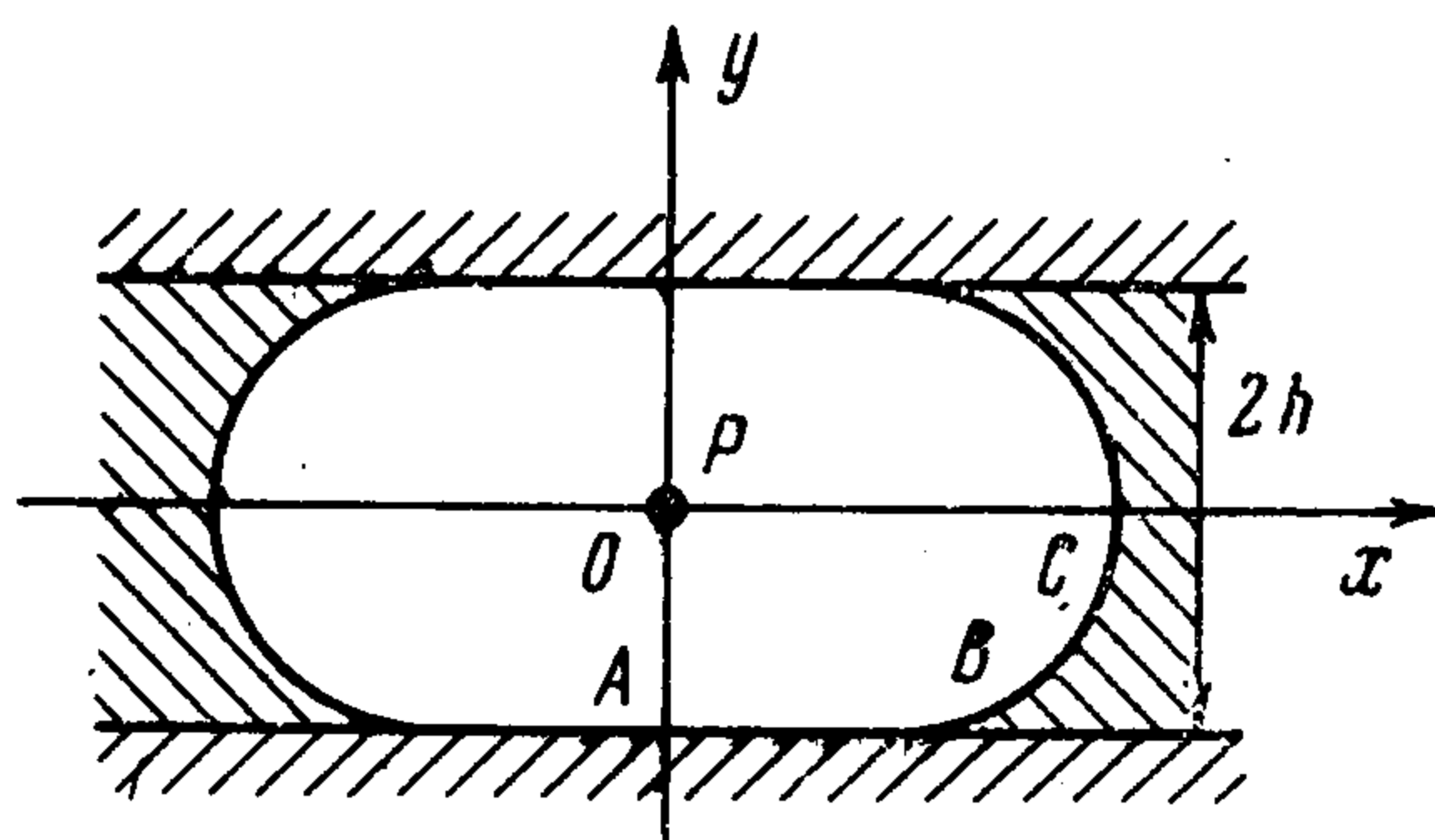
а при $\gamma \rightarrow \infty$ решение имеет особенность, отвечающую сосредоточенной силе, т. е., как легко убедиться

$$\zeta = (P / 2\pi) \ln \gamma \quad (2.11)$$

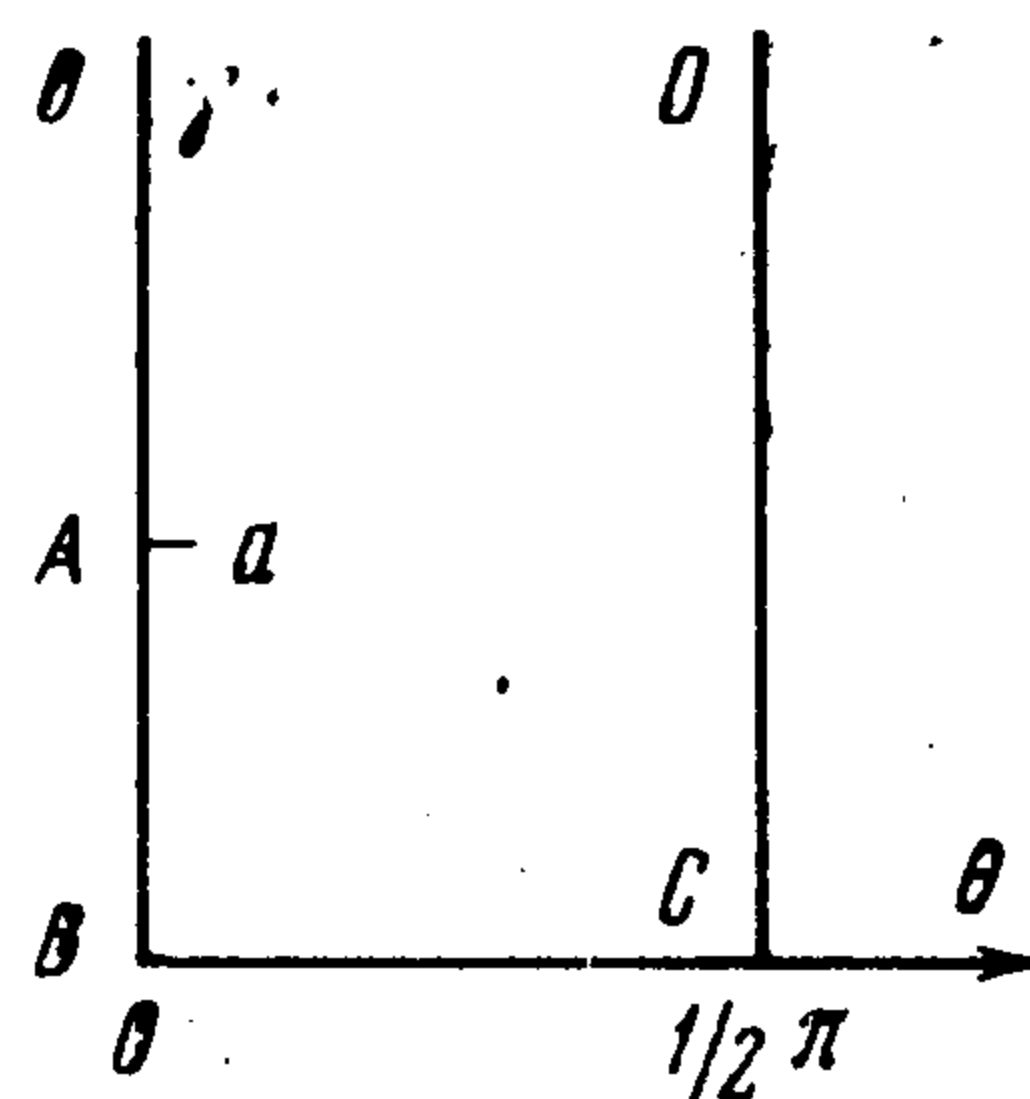
Уравнение для смещений ζ для тела, следующего соотношению (2.9), переходит в уравнение

$$\gamma(\gamma + \lambda) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \gamma^2} + (\gamma - \lambda) \frac{\partial \zeta}{\partial \gamma} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} = 0 \quad (2.12)$$

Возникающая в плоскости годографа смешанная задача (2.10) — (2.12) может быть эффективно приближенно решена, если величина a , т. е. деформация в точке границы A , расположенной непосредственно под силой, велика по сравнению с характерной деформацией λ , $a \gg \lambda$. Для получения решения в первом приближении достаточно,



Фиг. 1



Фиг. 2

используя аналогию с задачей теории фильтрации и результаты работы [12], заменить распределение ζ на участке OA (фиг. 2) распределением, отвечающим нулевому значению λ . При $\lambda = 0$ получаем

$$\zeta = \zeta_0 = \frac{P}{2\pi} \operatorname{Re} \ln \frac{\gamma e^{i\theta} + (\gamma^2 e^{2i\theta} - a^2)^{1/2}}{a} \quad (2.13)$$

На линии $\gamma = a$ имеем

$$\zeta_0 = \frac{P}{2\pi} \operatorname{Re} \ln (e^{i\theta} + (e^{2i\theta} - 1)^{1/2}) \quad (2.14)$$

В прямоугольнике $0 < \gamma < a$, $0 < \theta < 1/2 \pi$ решение уравнения (2.12), удовлетворяющее краевым условиям на сторонах $\theta = 0$, $\theta = 1/2 \pi$, $\gamma = 0$, имеет вид

$$\zeta = \gamma^2 \sum_{m=1}^{\infty} B_m F(2m+1, -2m+3, 3, -\gamma/\lambda) \sin(2m-1)\theta \quad (2.15)$$

(F — гипергеометрическая функция).

Для получения первого приближения достаточно определить коэффициенты B_m из условия

$$\zeta|_{\gamma=a} = \zeta_0|_{\gamma=a} \quad (2.16)$$

Отсюда имеем

$$\zeta \approx \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{a}\right)^2 f_m \frac{F(2m+1, 3-2m, 3, -\gamma/\lambda)}{F(2m+1, 3-2m, 3, -a/\lambda)} \sin(2m-1)\theta \quad (2.17)$$

$$f_m = \frac{4}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \zeta_0(a, \theta) \sin(2m-1)\theta d\theta \quad (2.18)$$

Для определения границы жесткой области в первом приближении достаточно вычислить первый член выражения (2.17). Имеем

$$f_1 = \frac{2P}{\pi^2} \int_0^{1/2\pi} \sin \theta \operatorname{Re} [\ln (e^{i\theta} + \sqrt{e^{2i\theta} - 1})] d\theta = \frac{P}{2\pi} \quad (2.19)$$

Координаты границы жесткой области с рассматриваемой точностью определяются выражением

$$x + iy = \frac{P}{2\pi} \frac{a + \lambda}{a^2} [\sin^2 \theta + i\theta - i^{1/2} \sin 2\theta] \quad (2.20)$$

Разность $y(1/2\pi) - y(0) = h$, и из (2.20) получаем

$$h = \frac{P}{4a} \left(1 + \frac{\lambda}{a}\right), \quad a \approx \frac{P}{4h} \left(1 - \frac{4\lambda h}{P}\right) \quad (2.21)$$

Отметим, что при $\lambda/a \rightarrow 0$ граница жесткой области стремится к некоторой предельной кривой. Ее положение будет вполне определено, если указать еще расстояние до какой-либо ее точки от оси y . Имеем

$$x_B - x_A = \int_0^a \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right)_{\theta=0} \frac{dw}{w^2}$$

подставляя сюда выражение (2.17), получим

$$x_B - x_A = \frac{\lambda}{a^2} \sum_{m=2}^{\infty} f_m \frac{2m-1}{m(2m-2)} \frac{F(2m, 2m-2, 2, -a_0)}{F(3-2m, 1+2m, 3, -a_0)} + \\ + \lambda a^2 f_1 (1+a_0) \ln(1+a_0), \quad a_0 = a/\lambda \quad (2.22)$$

Можно показать, что порядок суммы ряда при $a_0 \rightarrow \infty$ ниже порядка выделенного члена, так что имеем

$$x_B - x_A \approx \frac{\lambda + a}{a^2} \frac{P}{2\pi} \ln(1+a_0) = \frac{8}{\pi} h \ln \frac{P}{4\lambda h} \quad (2.23)$$

3. 1°. Аналогия задач пластичности и фильтрации позволяет непосредственно перенести в теорию фильтрации известные вариационные принципы деформационной теории пластичности (нелинейной упругости). В теории пластичности для несжимаемого тела имеем следующие утверждения [3]. Прежде всего

$$A = \int_V T \Gamma dV \quad (3.1)$$

Здесь A — работа внешних приложенных к телу сил на статически соответствующих им перемещениях, T и Γ — интенсивности девиаторов тензоров напряжений и деформаций. Далее, при фиксированных внешних нагрузках

$$\delta \left(\int_V \Pi dV - A \right) = 0 \quad (3.2)$$

(принцип минимума полной энергии системы), здесь

$$\delta \Pi = T \delta \Gamma \quad (3.3)$$

— вариация потенциала деформации Π ; под полной энергией понимается величина

$$\mathcal{E} = \int \Pi dV - A \quad (3.4)$$

Наконец, имеет место принцип минимума дополнительной работы R при фиксированных внешних нагрузках

$$\delta \int R dV = 0, \quad R = \int_0^T \Gamma(T) dT \quad (3.5)$$

При продольном сдвиге

$$\delta\Pi = \tau\delta\gamma, \quad \delta R = \gamma\delta\tau \quad (3.6)$$

Рассмотрим теперь плоское фильтрационное движение в области D , ограниченной контуром C , не содержащим внутри себя источников. Из (3.1) по второй системе аналогий (п.1) получаем

$$\oint_C (\text{grad } H)_s \psi ds = \int_D w \text{grad } H dS \quad (3.7)$$

Но

$$\oint_C (\text{grad } H)_s \psi ds = - \oint_C H \frac{\partial \psi}{\partial s} ds + [H\psi]_C$$

и, поскольку приращение $[H\psi]_C$ при обходе контура C равно нулю

$$\oint_C (\text{grad } H)_s \psi ds = - \oint_C H \frac{\partial \psi}{\partial s} ds = \oint_C H w_n ds \quad (3.8)$$

и из (3.7)

$$- \oint_C H w_n ds = - \int_D \text{grad } H w dS \quad (3.9)$$

Здесь слева стоит работа внешних сил над жидкостью, поступающей в область фильтрации в единицу времени, а справа — мощность диссипации в области фильтрации. Таким образом, (3.9) есть тождество полной диссипации — вся работа внешних сил рассеивается в области фильтрации.

Вводя по аналогии с пластическим потенциалом Π потенциал диссипации для фильтрационного движения

$$D = \int_0^w \Phi(w) dw \quad (3.10)$$

получим по аналогии с (3.2) вариационное уравнение

$$\delta \left(\int_D D dS + \int_C H w_n ds \right) = 0 \quad (3.11)$$

где варьирование производится при постоянных значениях напора H на контуре C_H , а в качестве допустимых принимаются поля скорости w , удовлетворяющие условию неразрывности

$$\text{div } w = 0 \quad (3.12)$$

В частности, при $(\delta w_n)_C = 0$ имеем

$$\delta \left(\int_D D dS \right) = 0 \quad (3.13)$$

т. е. истинное поле скоростей отличается от всех других полей скоростей, удовлетворяющих уравнению неразрывности и имеющих те же значения нормальной составляющей скорости на контуре области, тем, что минимизирует полный потенциал диссипации

$$D^* = \int_D D dS \quad (3.14)$$

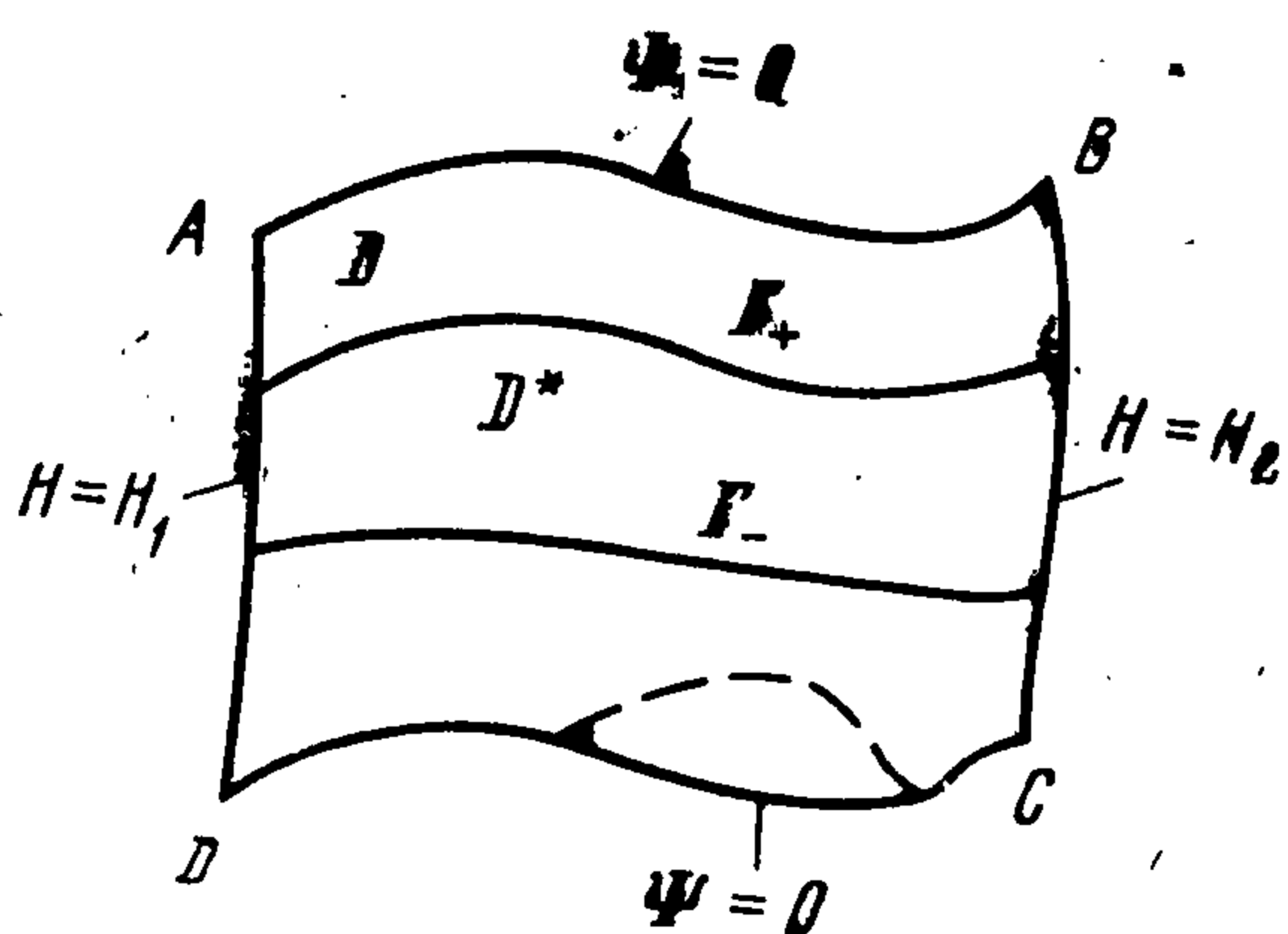
Наконец, по аналогии с (3.5) находим, что истинное распределение напора отличается от всех других распределений, принимающих те же значения на границе, тем, что минимизирует полный дополнительный потенциал диссипации

$$R^* = \int_D R dS, \quad R = \int_0^Z \Psi(\eta) d\eta, \quad Z = |\text{grad } H| \quad (3.15)$$

где Ψ — функция, обратная Φ .

2°. По поводу полученных вариационных принципов следует сделать несколько замечаний.

Прежде всего все они могут быть доказаны непосредственно, без обращения к аналогии с пластичностью, не только для двумерных, но и для пространственных фильтрационных движений. При этом легко убедиться, что истинное движение реализует минимум соответствующего функционала не только по отношению к бесконечно близким состояниям, но и по отношению ко всем допустимым состояниям. Отсюда следует также единственность фильтрационного движения в конечной области, на части границы которой заданы значения w_n , а на части — значения H . Все доказательства могут быть проведены по образцу доказательств Прагера [13] с использованием известного неравенства Юнга [14]



Фиг. 3

$$ab \leq \int_0^a f(x) dx + \int_0^b \varphi(x) dx \quad (3.16)$$

где f и φ — взаимно обратные функции. Доказательства сохраняют свою силу для движений с предельным градиентом, когда образуются застойные зоны.

Наконец, из вариационного принципа (3.11) обычным путем могут быть получены уравнения закона фильтрации и граничные условия.

Если среда является неоднородной, то в каждой точке закон фильтрации можно записать в виде

$$\text{grad } H = -\Phi(w, h) \frac{\mathbf{w}}{w}, \quad \mathbf{w} = -\Psi(|\text{grad } H|, h) \frac{\text{grad } H}{|\text{grad } H|} \quad (3.17)$$

где $h = h(x, y, z)$ — параметр относительного сопротивления среды, $\Phi_h' > 0$, $\Psi_h' < 0$. Нетрудно видеть, что все приведенные вариационные принципы сохраняют смысл и для неоднородной среды.

3°. Рассмотрим область фильтрации $ABCD$, ограниченную двумя линиями тока AB и DC и двумя линиями равного напора AD и BC (фиг. 3).

Допустим, что закон фильтрации $\Phi(w, h)$ имеет вид

$$\Phi(w, h) = hw^k \quad (3.18)$$

Тогда имеем из (3.9)

$$(H_1 - H_2) Q = \int_D hw^{k+1} dS \quad (3.19)$$

где Q — полный расход фильтрационного потока.

Рассмотрим теперь некоторое другое поле фильтрационных сопротивлений $h^* \geq h$ и отвечающее ему при прежних значениях напора на границах AD и BC поле скоростей w^* . Поскольку поле w^* является допустимым для исходной области, из (3.11) получаем

$$\begin{aligned} \int_D D(w, h) dS - Q(H_1 - H_2) &\leq \int_D D(w^*, h) dS - Q^*(H_1 - H_2) \leq \\ &\leq \int_D D(w^*, h^*) dS - Q^*(H_1 - H_2) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Из (3.10) и (3.18) имеем $D = hw^{k+1} / (k+1)$, так что

$$\int_D D(w, h) dS = \frac{1}{k+1} (H_1 - H_2) Q \quad (3.21)$$

Поэтому из (3.20) получаем

$$Q^* \leq Q \quad (3.22)$$

Этот результат с физической точки зрения очевиден; он означает, что при увеличении фильтрационного сопротивления в какой-либо части области фильтрации расход при том же перепаде напора уменьшается.

Отсюда вытекает возможность получать оценки для расхода фильтрационного потока, заменяя его течением с более простой геометрией. Так, если в потоке произвольно указать направление линий тока (что равносильно разбиению потока непроницаемыми перегородками на трубки тока), то при заданном распределении давления на границах области движения расход только уменьшится. Если рассматривается движение в пласте постоянной мощности, то, проводя достаточно часто непроницаемые границы параллельно кровле и подошве, получим схему предельно-анизотропного пласта с нулевой проницаемостью поперек напластования. Движение жидкости в таком пласте происходит послойно без обмена жидкостью между слоями. Согласно сказанному выше, такое течение будет иметь не больший расход, чем исходное. Если ввести отрезки нулевого сопротивления, то расход только увеличится.

Отметим, что подобные приемы широко применялись в случае фильтрации, следующей закону Дарси ($k = 1$), И. А. Чарным (см., например [15]). В частности, если происходит «вдавливание» в область фильтрации непроницаемых границ, то расход уменьшается, при «вдавливании» же линий постоянного напора расход увеличивается. По своему существу эти утверждения близки к используемым при оценках предельных нагрузок жестко-пластических тел (см. [3]), что отвечает предельному случаю $k = 0$ в (3.18).

4°. Несколько более слабые утверждения можно получить для произвольного закона фильтрации, описываемого возрастающей функцией $\Phi(w)$. Легко убедиться, что для напора H и функции тока ψ справедлив принцип максимума, так что эти функции не могут принимать максимальных и минимальных значений внутри области движения или на тех границах, где их нормальные производные равны нулю (линия тока для напора H и линия постоянного напора для функции тока ψ). Рассмотрим теперь область D' , получающуюся из области D «вдавливанием» линии тока DC (см. пунктир на фиг. 3). Пусть далее расход Q одинаков в обоих случаях. Тогда имеет место утверждение: во всех точках области D' выполняется неравенство

$$\psi' \leq \psi \quad (3.23)$$

и, как следствие этого во всех точках границы AB

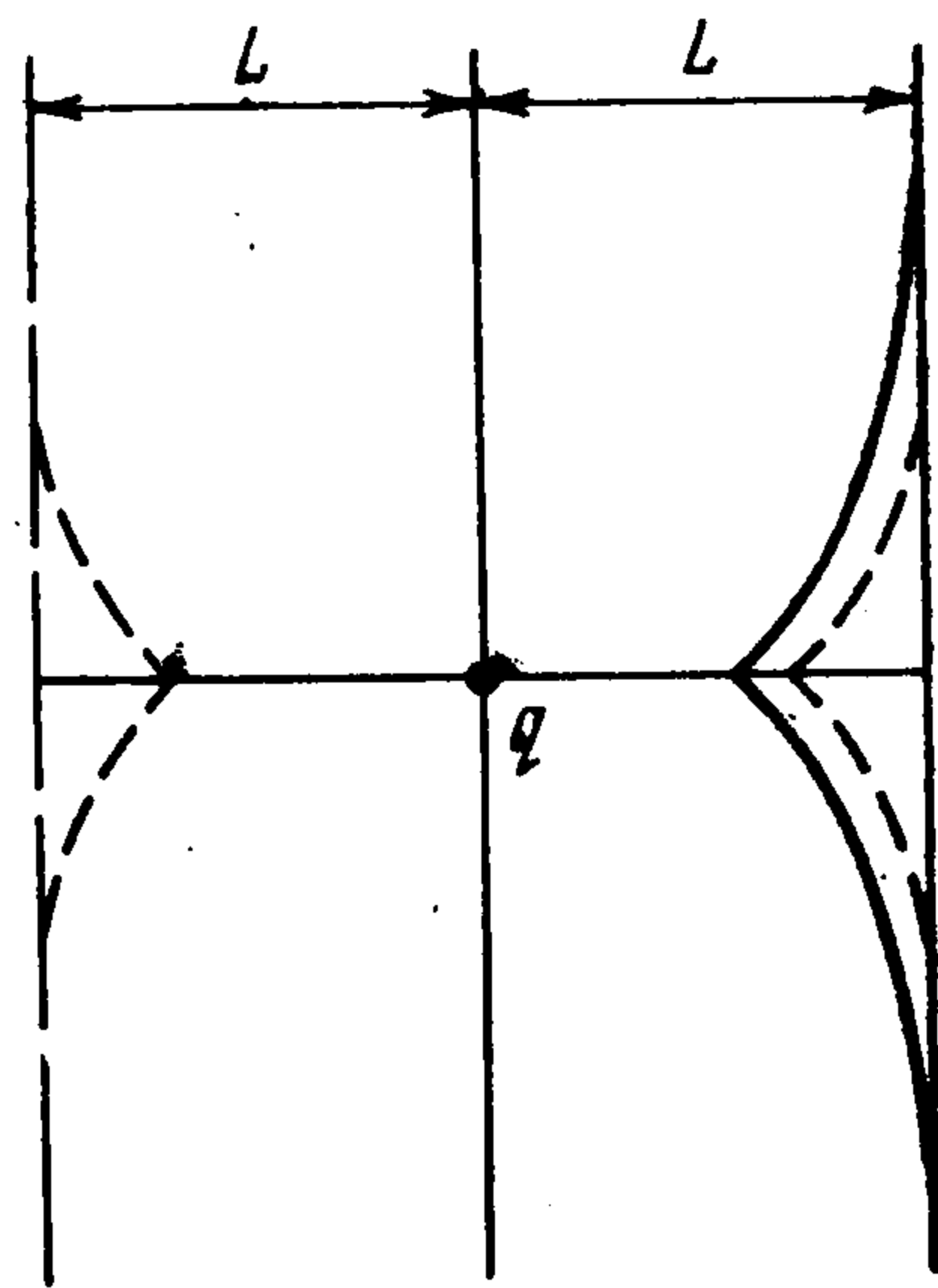
$$w' \geq w \quad (3.24)$$

перепад напора не уменьшается

$$H' \geq H \quad (3.25)$$

и наконец, в «недеформированных» участках линии тока

$$w' \leq w \quad (3.26)$$



Фиг. 4

(Такого рода утверждения в теории фильтрации, следующей закону Дарси, доказаны Г. Н. Положим [16] и использованы им для получения оценок расхода при фильтрации в областях со сложной геометрией.) Действительно, пусть $\psi' > \psi$ в некоторой точке $M \in D'$.

Тогда найдется подобласть $D^* \subset D$, $M \in D^*$, в которой $\psi' > \psi$, ограниченная линией Γ , причем $\psi' = \psi$ на Γ . Линия Γ не может быть замкнутой линией, содержащей D^* внутри себя, так как иначе в D^* в силу единственности $\psi = \psi'$. По тем же соображениям D^* не может примыкать лишь к одной из линий равного напора. Поэтому подобласть D^* должна иметь вид полосы, соединяющей линии равного напора (фиг. 3). Вдоль верхней границы этой полуполосы Γ_+ имеем

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\Phi(w) \frac{w_s}{w} = -\frac{\Phi(|\text{grad } \psi|)}{|\text{grad } \psi|} \frac{\partial \psi}{\partial n}$$

При этом для решений ψ и ψ' имеем

$$\frac{\partial \psi'}{\partial s} = \frac{\partial \psi}{\partial s}, \quad \left| \frac{\partial \psi'}{\partial n} \right| < \left| \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|$$

(по предположению). В результате

$$-\frac{\partial H'}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial s} = \frac{\Phi(w')}{w'} \frac{\partial \psi'}{\partial n} - \frac{\Phi(w)}{w} \frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{\Phi(w')}{\Delta'} - \frac{\Phi(w)}{\Delta} \leq 0$$

$$\Delta = \left[1 + \left(\frac{\partial \psi / \partial s}{\partial \psi / \partial n} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Отсюда

$$(H_1 - H_2)' < H_1 - H_2$$

С другой стороны, на границе Γ_- имеем

$$\partial \psi' / \partial s = \partial \psi / \partial s, \quad 0 < \partial \psi / \partial n < \partial \psi' / \partial n$$

так что

$$-\frac{\partial H'}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial s} \geq 0, \quad (H_1 - H_2)' \geq H_1 - H_2$$

Отсюда следует, что $(H_1 - H_2)' \geq H_1 - H_2$ и в силу единственности $\psi' = \psi$ в D^* в противоречии с предположением. Таким образом, всюду в D' имеем $\psi' \leq \psi$; тогда на AB

$$w = \left| \frac{\partial \psi}{\partial n} \right| \leq w' = \left| \frac{\partial \psi'}{\partial n} \right|, \quad \frac{\partial H}{\partial s} = \Phi(w) \leq \frac{\partial H'}{\partial s} = \Phi(w')$$

Отсюда следуют утверждения (3.24) — (3.25). Аналогичным образом доказывается и утверждение (3.26). Из (3.23) следует также, что все линии тока либо остаются на месте, либо вдавливаются в сторону неподвижной линии тока. Заметим, наконец, что все результаты остаются в силе для полосы между двумя линиями тока бесконечной протяженности.

Легко видеть, что если «вдавленный» участок линии тока лежит внутри застойной зоны $\psi = \text{const}$ для исходного течения, то во всех предыдущих оценках имеет место равенство.

Аналогичные рассуждения показывает, что при «вдавливании» внутрь области движения одной из линий равного напора расход не может уменьшиться, равно как и скорости фильтрации во всех точках оставшейся неизменной линии равного напора.

Приведенные выше утверждения, физически вполне очевидные, позволяют строить оценки для решений в тех случаях, когда трудно получить точное решение.

5°. Важное качественное следствие из полученных результатов состоит в том, что для фильтрационных течений, ограниченных двумя линиями тока (течение в конечной или бесконечной полосе, возможно, переменной ширины) «вдавливание» внутрь области одной из линий тока может привести лишь к уменьшению застойных зон, примыкающих к другой линии тока. В частности, если таких застойных зон не было, то они не могут и появиться.

Пример. Застойная зона, возникающая вблизи стенки при течении от источника интенсивности q , расположенного на расстоянии L от стенки, больше застойной зоны, создаваемой тем же источником, расположенным между двумя стенками (фиг. 4). Поскольку вторая задача допускает точное решение [11], отсюда следует нижняя оценка застойной зоны в первой задаче.

6°. Все приведенные утверждения в силу указанных в п.1 аналогий справедливы также для задач продольного сдвига пластических тел. Пусть, в частности, продольный сдвиг вызван извлечением из жестко-пластического тела жесткого стержня произвольного сечения. Пусть r — радиус круга, который весь заключен внутри контура стержня, а R — радиус круга, покрывающего сечение стержня. Тогда внешняя жесткая область содержится в жесткой области для круглого стержня радиуса r и содержит в себе жесткую область для стержня радиуса R (что, конечно, вполне очевидно).

В качестве следующего примера рассмотрим движение, создаваемое в вязко-пластической жидкости полуплоскостью, движущей вдоль своего ребра со скоростью U

и перпендикулярной неподвижной стенке (фиг. 5). Рассматриваемое движение является в силу п.1 аналогом обтекания стенки фильтрационным потоком с расходом U . На бесконечности течение, очевидно, должно стремиться к радиальному течению. Отсюда следует, что в рассматриваемом течении не возникают застойные зоны (элементарно доказывается, что граница застойной зоны вогнута в сторону области течения, и поэтому нельзя построить застойную зону, не нарушив условий на бесконечности). Тогда из доказанного в п.5 следует, что при движении вдоль стенки любого цилиндрического тела, содержащего внутри себя полуплоскость $x \geq L$, на стенке не возникают застойные зоны.

Интересно отметить, что Олдройд [17] построил для движения тела специальной формы в бингамовой жидкости пример точного решения, в котором у стенки возникает застойная зона, уходящая в бесконечность.

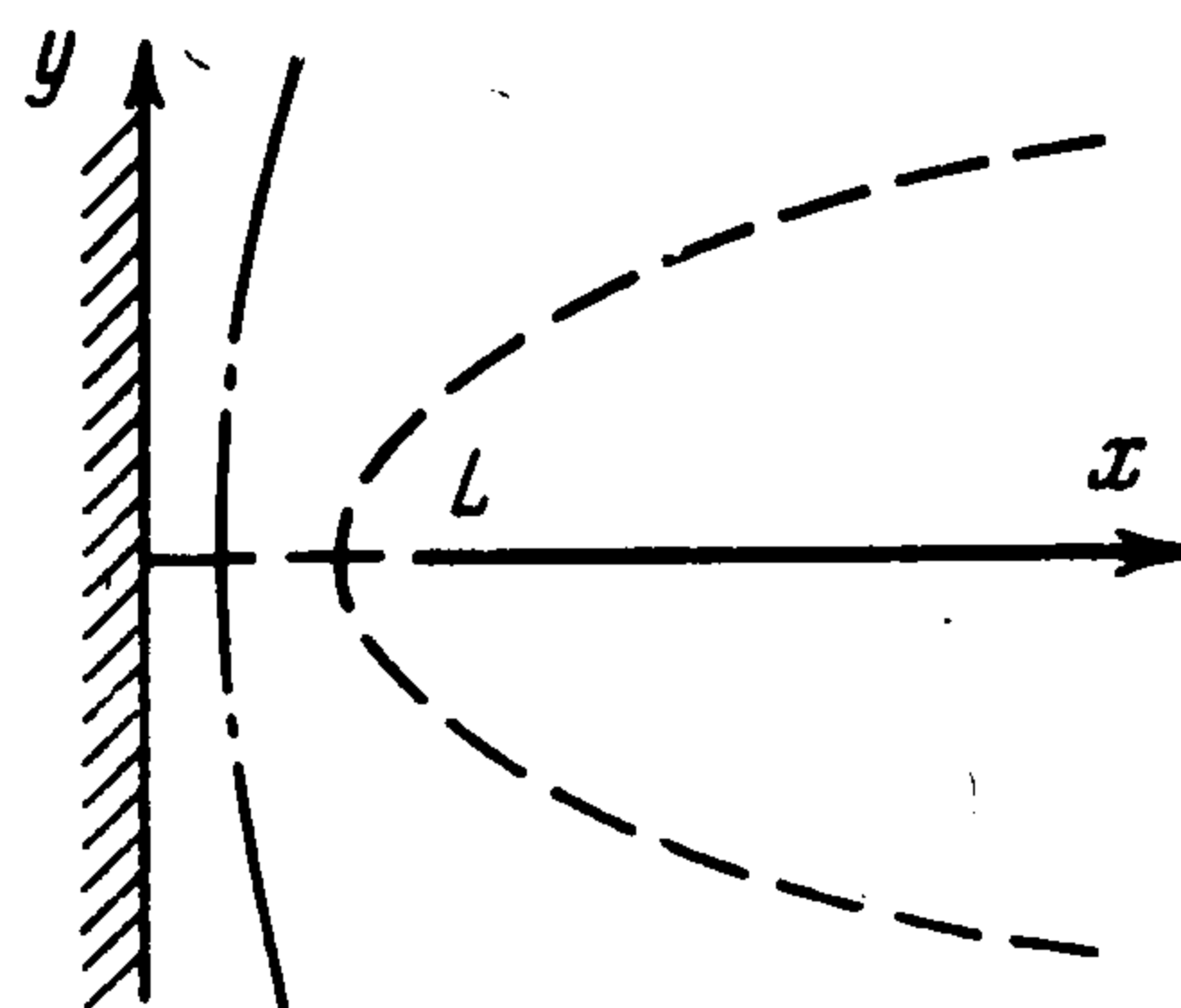
Приведенные выше рассуждения показывают, что наряду с решением, полученным Олдройдом, должно существовать решение без застойной зоны. Возможность появления двух (на самом деле, по-видимому, бесконечного множества) решений связана с тем, что в задаче для бесконечной области необходимо ставить условия на бесконечности. Характер вырождения уравнений фильтрации с предельным градиентом (и эквивалентных им уравнений продольного сдвига вязко-пластических или жестко-пластических тел) при $\omega = 0$ таков, что на линии вырождения, в том числе и бесконечно удаленной, необходимо ставить граничные условия. В этом легко убедиться на примере задач, допускающих отображение на плоскость годографа. В этом коренное отличие рассматриваемых задач от задач линейной фильтрации, в которых достаточно потребовать ограниченности рассматриваемых функций в точках вырождения.

Автор признателен Г. И. Баренблатту за ряд ценных замечаний.

Поступила 26 IX 1969]

ЛИТЕРАТУРА

1. Христанович С. А. Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси. ПММ, 1940, т. 4, вып. 1.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М., Гостехиздат, 1952.
3. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. Изд. 2-е. М., «Наука», 1969.
4. Соколовский В. В. О нелинейной фильтрации грунтовых вод. ПММ, 1949, т. 13, вып. 5.
5. Neuber H. Kerbspannungslehre. Grundle. für genaue Festigkeitsberechnung mit Berücks. von Konstruktionsform und Werkstoff. 2-e Aufl. B., Springer, 1958.
6. Neuber H. Theory of stress concentration for shear strained prismatical bodies with arbitrary nonlinear stress-strain law. Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., 1961, vol. 28, No. 4, p. 544.
7. Алишаев М. Г., Ентов В. М., Сегалов А. Е. Элементарные решения плоских задач нелинейной фильтрации. Изв. АН СССР, МЖТ, 1969, № 3.
8. Ringleb F. Exakte Lösungen der Differentialgleichungen einer adiabatischen Gasströmungen. ZAMM, 1940, Bd 20, H. 4.
9. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
10. Ентов В. М. О некоторых двумерных задачах теории фильтрации с предельным градиентом. ПММ, 1967, т. 31, вып. 5.
11. Ентов В. М. Об одной задаче фильтрации с предельным градиентом допускающей точное решение. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.
12. Ентов В. М., Салганик Р. Л. О решении плоских задач фильтрации с предельным градиентом методом малого параметра. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.
13. Prager W. On slow visco — plastic flow. Studies Math. and Appl. Mech. N.—Y., Acad. Press, Inc., 1954, p. 208—216.
14. Беккенбах Э. Ф., Беллман Р. Неравенства. М., «Мир», 1965.
15. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. М., Гостоптехиздат, 1963.
16. Положий Г. Н. Метод движения граничных точек и мажорантных областей в теории фильтрации. Укр. матем. ж., 1953, т. 5, № 4.
17. Oldroyd J. G. Rectilinear plastic flow of a Bingham solid, III. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1948, vol. 44, No. 2.



Фиг. 5