О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА СТАЦИОНАРНОЙ ФАЗЫ В НЕКОТОРЫХ РАБОТАХ ПО ТЕОРИИ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Э. Н. Потетюнко, Л. С. Срубщик, Л. Б. Царюк

(Ростов-на-Дону)

Цель заметки — построение асимптотики некоторых интегралов, встречающихся при исследовании задач о волновом движении вязкой жидкости со свободной границей. Попутно обращается внимание на неправильное применение метода стационарной фазы, распространившееся за последнее время в ряде работ [2–21], посвященных задаче Коши — Пуассона о волнах на поверхности полупространства или слоя.

§ 1. В 1941 г. Л. Н. Сретенский опубликовал фундаментальную работу «О волнах на поверхности вязкой жидкости» [1]. Во второй главе этой работы была рассмотрена плоская задача Коши — Пуассона о волнах на поверхности вязкой жидкости бесконечной глубины. Здесь впервые применением метода последовательных интегральных преобразований Фурье и Лапласа было получено точное интегральное представление для вида свободной поверхности. При асимптотическом вычислении полученных интегралов был предложен метод стационарной фазы, изобретенный Кельвином и хорошо зарекомендовавший себя в задачах о волновых движениях идеальной жидкости.

Тем же методом задача решается в работах [2–21]. К сожалению, необоснованное применение метода стационарной фазы в [2–21] приводит к неверному определению асимптотического поведения возвышения свободной поверхности вязкой жидкости.

Примеры такого неправильного применения метода стационарной фазы к интегралам J_1 и G_1 из [2, 4], определяющим вид свободной поверхности, вызванной δ-видным начальным возвышением в плоском и пространственном случаях жидкости бесконечной глубины, приводятся в § 2. Там же указываются некоторые другие ошибки, встречающиеся в [2,4]. В § 3 строятся асимптотические формулы в плоскости переменных x, t для интеграла

$$\eta = \frac{S}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-2\nu t k^2}\cos xk \cos t\sqrt{gk}\,dk \tag{1.1}$$

который был получен в указанной выше работе Л. Н. Сретенского при упрощенном способе описания профиля волн η, вызванных сконцентрированным в начале координат поднятием жидкости площади S. (Здесь x — размерная координата, t — размерное время, ν — кинематический коэффициент вязкости, g — ускорение силы тяжести. Эти обозначения употребляются в формуле (46) оригинала.)

Асимптотическое представление η строится на путях $x = ct^{\alpha}$, где $c = \mathrm{const} > 0$ и α — любое вещественное число, при $t \to \infty$ или $x \to \infty$. В частности, показывается, что при $5/4 \leqslant \alpha < 2$ применим метод стационарной фазы. В § 4 найдено, что асимптотические представления интегралов J_1 и η совпадают. Это означает, что после исправления всех ошибок, допущенных при вычислении асимптотики J_1 в [2], получаются результаты, которые не перекрывают результатов на основе упрощенной трактовки задачи Коши — Пуассона, предложенной Л. Н. Сретенским еще в 1941 г.

§ 2. В работах [2–21] метод стационарной фазы применяется для вычисления серии интегралов, типичным примером которых является последний на стр. 339 интеграл из работы А. К. Никитина и Р. А. Грунтфеста [2] [1]

$$J_1 = -4\int\limits_{1,8}^{\infty} A\frac{h(a)}{3K^3}e^{\nu t h^2(a)(a^2-b^2-1)}\cos\left[\frac{h(a)}{K} - 4ab\frac{h^2(a)\,\omega}{K^4}\right]Kx\,da \tag{2.1}$$

$$A = \frac{a(a^2+b^2-1)}{(a^2-b^2-1)^2+4a^2b^2},\qquad h(a) = K\left(\frac{a^2}{4a^6+4a^4-1}\right)^{1/3} = Kh_1(a)$$

$$b = \left(a^2+1-\frac{1}{a}\right)^{1/2},\qquad K = \left(\frac{g}{\nu^2}\right)^{1/3},\qquad \omega = \frac{K\nu t}{2x}$$

[1] Здесь устраняется явная описка в оригинале.

Здесь x — размерная координата, t — размерное время, ν — кинематический коэффициент вязкости, g — ускорение силы тяжести. Для вычисления J_1 по методу стационарной фазы авторы применяют формулу вида (см. (5.4) из [2])

$$\int_\alpha^\beta \psi(a)\cos z\,\varphi(a)\,da \sim \left[\frac{2\pi}{z\varphi''(\tau_0)}\right]^{1/2}\psi(\tau_0)\cos\left(\frac{\pi}{4}+z\varphi\;(\tau_0)\right) \tag{2.2}$$

Здесь τ_0 — единственная на (α, β) стационарная точка и $z\to\infty$. Далее в предположениях, что Kx — большой параметр и

$$h_1(a)\approx 4^{-1/3}a^{-4/3},\quad h_1^2(a)(a^2-b^2-1)\approx -2^{-1/3}a^{-8/3},\quad A\approx 1/2a \tag{2.3}$$
$$\varphi(a)=h_1(a)-4abh_1^2(a)\,\omega\approx 4^{-1/3}a^{-4/3}-4^{1/3}a^{-2/3}\omega$$

получают $\tau_0=\omega^{-3/2}/\sqrt{2}$ и выписывают результат

$$J_1\sim-\left(\frac{\pi\omega^3}{K^5|x|}\right)^{1/2}e^{-2K^2\nu\omega^4t}\cos\left(\frac{\pi}{4}-K|x|\,\omega^2\right) \tag{2.4}$$

Остаточный член для (2.4) не выписан, но утверждается, что формула справедлива для $\omega<{}^1/_2$ (см. стр. 339, 340 в [2]).

В связи с приведенным примером применения метода стационарной фазы в [2] сделаем следующие замечания:

1) применение формулы (2.2) к вычислению J_1 незаконно [1], так как формула (2.2) предполагает, что амплитуда $\psi(a)$ и фаза $\varphi(a)$ не зависят от большого параметра z при $z\to\infty$. В J_1 фаза не будет зависеть от большого параметра $z=Kx$, если $\omega=$ $=\text{const}$ при $z\to\infty$, т. е. если $t=2\omega z/K^2\nu$. Подставив это значение t в амплитуду J_1, получим, что тогда $\psi(a)$ существенно зависит от z

$$\psi(a)=A\frac{h(a)}{3K^3}\exp\left[2z\omega\frac{h^2(a)}{K^2}(a^2-b^2-1)\right] \tag{2.5}$$

и, следовательно, предположения формулы (2.2) не выполняются.

2) результат (2.4) приводит к неправильным представлениям об асимптотическом поведении интеграла J_1. Например, если зафиксировать K, ν, ω, то согласно (2.4) при $t\to\infty$ получаем

$$J_1=-\left(\frac{2\pi\omega^3}{K^6\nu t}\right)^{1/2}e^{-2K^2\nu\omega^4t}\cos\left(\frac{\pi}{4}-K^2\nu t\frac{\omega}{2}\right) \tag{2.6}$$

В действительности же, как будет показано ниже (см. § 4), имеет место

$$J_1=\frac{\nu^2}{g^2t}[1+o(1)]\qquad(t\to\infty) \tag{2.7}$$

[1] На эту ошибку обратили внимание И. Б. Симоненко и В. И. Юдович. В связи с этим приведем пример И. Б. Симоненко: формальное применение метода стационарной фазы к интегралу

$$I(k)=\int_0^\infty e^{-k\xi}\cos k\xi^2\,d\xi\qquad(k\to\infty)$$

дает

$$I(k)\sim\left[\frac{\pi}{4k}\right]^{1/2}\cos\frac{\pi}{4}\qquad(k\to\infty)$$

Однако простая оценка показывает, что

$$|I(k)|\leqslant\int_0^\infty e^{-k\xi}\,d\xi=\frac{1}{k}\qquad(k\to\infty)$$

3) вычисление асимптотики J_1 является основным этапом в [2], так как там с точностью до множителя интеграл J_1 определяет волны, вызванные δ — видным начальным возвышением свободной поверхности вязкой жидкости бесконечной глубины в плоском случае (см. (5.11), (5.12), (6.1) в [2].) Все окончательные результаты этой работы опираются на формулу (2.4), что приводит к неверным представлениям об асимптотическом поведении волн.

Аналогичное применение метода стационарной фазы в случае, когда амплитуда существенно зависит от большого параметра, применяется к вычислению интегралов (4.12), (5.11) в [4]; (1.5) в [7]; (2.5) в [8]; (3.12), (5.2) в [10]; (1.5) в [11]; (3) в [13]; (2.14), (3.8) в [14]; (3.1), (6.1) в [17]; (26′) в [18]; (6) в [21].

Во всех этих работах дано неверное применение метода стационарной фазы, что привело к неверным формулам и ошибочным физическим интерпретациям.

В работах А. К. Никитина, С. А. Подрезова, Б. С. Белозёрова и Э. Н. Потетюнко [4,7–10] не только ошибочно применяется метод стационарной фазы, но и неправильно понимается его формула. Ссылаясь на известную формулу вида (см. (5.8) в [4] и (3.13) в [10])

$$\int_\alpha^\beta \psi(a)\, e^{iz\varphi(a)}\, da = \tag{2.8}$$

$$= \left\{\left[\frac{2\pi}{z\,|\varphi''(\tau)|}\right]^{1/2} \psi(\tau) \exp\left[iz\varphi(\tau) + \frac{i\pi}{4}\operatorname{sign}\varphi''(\tau)\right]\right\}\left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)\right], \quad z \to \infty$$

(τ — стационарная точка $\varphi(a)$, $\alpha < \tau < \beta$), авторы этих работ фактически пользуются неправильной формулой

$$\int_\alpha^\beta \psi(a) \cos z\varphi(a)\, da = \tag{2.9}$$

$$= \left\{\left[\frac{2\pi}{z\,|\varphi''(\tau)|}\right]^{1/2} \psi(\tau) \cos\left[z\varphi(\tau) + \frac{\pi}{4}\operatorname{sign}\varphi''(\tau)\right]\right\}\left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)\right], \quad z \to \infty$$

Ошибочность формулы (2.9) очевидна, потому что согласно ей нули первого члена асимптотики (в точности!) совпадают с нулями приближаемой функции, если z достаточно велико. (Например, нули функции Бесселя $J_0(z)$ при $z \to \infty$ совпадают с нулями $\cos(z - \pi/4)$!).

Рассмотрим такую подмену на работе А. К. Никитина и С. А. Подрезова [4], где после применения метода стационарной фазы к интегралу G_1 (см. (5.9) в [4])

$$G_1 = -\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{g}\,\nu^2\tau^3}{8R^3\cos^3\theta\sqrt{\pi R\cos\theta}} \exp\frac{-\nu g^2\tau^5}{8R^4\cos^4\theta} \times \tag{2.10}$$

$$\times \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{g\tau^2}{4R\cos\theta}\right)\left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda R\cos\theta}}\right)\right], \quad \lambda = (g/\nu^2)^{1/3}, \quad \lambda R \to \infty$$

выписывается (см. (5.10) в [4])

$$G_1 = -\frac{\nu^2\tau^2}{8\sqrt{2}R^3} \exp\frac{-\nu g^2\tau^5}{8R^4} \cos\frac{g\tau^2}{4R} \times \tag{2.11}$$

$$\times \left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda R}}\right) + O\left(\sqrt{\frac{4R}{gt^2}}\right)\right], \quad \lambda R \to \infty, \quad \frac{gt^2}{4R} \to \infty$$

Ясно, что если даже интеграл (2.10) имеет смысл и допускает применение метода стационарной фазы с заменой $O[(\lambda R\cos\theta)^{-1}]$ на $O[(\lambda R)^{-1}]$ на том основании, что $\theta = 0$ — стационарная точка, то формула (2.11) может быть получена из (2.10) только при использовании формулы (2.9).

Формула (2.11) является основной в работе [4], так как с точностью до множителя интеграл G_1 определяет волны, вызванные δ — видным начальным возвышением свободной поверхности вязкой жидкости, занимающей полупространство (см. (6.1) из [4])[1]

$$\zeta(R,t)=\frac{Agt^2}{16\sqrt{2}\,R^3}\exp\frac{-\nu g^2t^5}{8R^4}\cos\frac{gt^2}{4R}\left[1+O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda R}}\right)+O\left(\sqrt{\frac{4R}{gt^2}}\right)\right] \qquad (2.12)$$

Из формулы (2.12) следует явно неправильный вывод о том, что нули функции ζ, описывающей вид свободной поверхности вязкой жидкости при достаточно больших λR и $gt^2 / 4R$, в точности совпадают с нулями соответствующей функции для идеальной жидкости при больших $gt^2 / 4R$.

Следует отметить, что работа А. К. Никитина и С. А. Подрезова [4] содержит и ряд других неточностей. Так, формула (5.10) получена в предположении, что $\omega = \lambda\nu\tau / 2R\cos\theta < 1/_2$ (см. текст перед формулой (5.8) в [4]). Однако ответы (5.10), (5.11) этого обстоятельства не отражают. Более того, при механической интерпретации формулы (6.1) проводится анализ движения свободной поверхности жидкости в фиксированной точке пространства (R = const) при $t\to\infty$, хотя в этом случае $\omega\to\infty$.

В этой же работе к вычислению интегралов (5.1), зависящих от двух параметров, неправильно применяется формула метода Лапласа, дающая асимптотику по одному параметру. Полученные значения интегралов неверны при $a_1 > 0$, $b_1 > 0$, что легко следует из рассмотрения формул 3.897, 8.253, 8.254 из справочника И. С. Градштейна и И. М. Рыжика «Таблицы интегралов, сумм, рядов, произведений» (1958). Это замечание относится и к [2].

§ 3. Перейдем к выводу правильных асимптотических формул для интегралов вида (1.1), (2.1) и других, содержащихся в работах [2–21]. Как указывалось во введении, Л. Н. Сретенский при упрощенном способе описания профиля волн исследовал интеграл (1.1). Применив к нему метод «установившихся фаз» при больших $gt^2 / 4x$, Л. Н. Сретенский приближенно получает

$$\eta=\frac{1}{2}\left(\frac{g}{\pi}\right)^{1/2}\frac{St}{x^{3/2}}\exp\frac{-\nu g^2t^5}{8x^4}\cos\left(\frac{gt^2}{4x}-\frac{\pi}{4}\right) \qquad (3.1)$$

Кроме (3.1) там же выводится еще одна формула при малых $\nu t / x^2$ (см. формулу (49) оригинала)

$$\eta=\frac{Sgt^2}{2\pi x^2} \qquad (3.2)$$

Формулу (3.1) очень удобно представить в виде

$$\eta=\eta_0e^{-\varkappa},\qquad \eta_0=\frac{St}{2x^{3/2}}\left(\frac{g}{\pi}\right)^{1/2}\cos\left(\frac{gt^2}{4x}-\frac{\pi}{4}\right),\qquad \varkappa=\frac{\nu g^2t^5}{8x^4} \qquad (3.3)$$

Здесь η_0 — решение соответствующей задачи для идеальной жидкости, а множитель $e^{-\varkappa}$ отражает влияние вязкости. Формулы (3.3) играют существенную роль во всех упомянутых работах [2–21]. Формулы вида (3.2) ни в одной из работ [2–16, 18–21] не были получены.

Исследуем вопрос о том, в каких случаях формулы (3.1) и (3.2) отражают асимптотическое поведение интеграла (1.1). Переходя к безразмерным переменным по формулам

$$\xi=\lambda\eta,\quad S_1=\lambda^2S,\quad x_1=\lambda x$$

$$u=\frac{k}{\lambda},\quad \lambda=\left(\frac{g}{\nu^2}\right)^{1/3},\quad t_1=g^{2/3}\nu^{-1/3}t$$

и опуская индекс у безразмерных величин, получим

$$\xi=\frac{S}{\pi}\int_0^\infty e^{-2tu^2}\cos xu\cos t\sqrt{u}\,du \qquad (3.4)$$

[1] В оригинале вместо R использовано обозначение r.

Интеграл ξ есть функция двух переменных x и t. С другой стороны, известная формула метода стационарной фазы

$$\int_{\nu}^{\beta} \psi(a) e^{iz\varphi(a)} da = \left[\frac{2\pi}{z|\varphi''(\tau)|}\right]^{1/2} \psi(\tau) e^{i[z\varphi(\tau)+1/4\pi \operatorname{sign} \varphi''(\tau)]} + O(z^{-1}) \tag{3.5}$$

дает асимптотическое представление только по одному переменному $z \to \infty$. (Здесь τ — единственная стационарная точка $\varphi(a)$, $\alpha < \tau < \beta$.) Поэтому естественно возникает вопрос о путях на плоскости переменных x, t, на которых формула (3.1) справедлива. Рассмотрим семейство путей вида $x = ct^{\alpha}$, где α — фиксированное вещественное число, c — положительная постоянная и будем изучать на них асимптотическое поведение интеграла ξ при $t \to \infty$ или $x \to \infty$.

Теорема 1. Пусть

$$t^{\alpha} / x = c = \text{const} > 0, \qquad \alpha < 5/4, \qquad t > 0, \qquad x > 0$$

Тогда при $t \to \infty$

$$\xi = -\frac{2S}{\pi t^2}[1 + o(1)] \tag{3.6}$$

или в размерных переменных

$$\eta = -\frac{2S}{\pi g t^2}[1 + o(1)] \tag{3.7}$$

При этом оценка (3.6) равномерна для всех $\alpha \leqslant 5/4 - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Асимптотическое представление (3.6) получается при помощи повторного интегрирования по частям. Сначала, полагая $u = t^{-1/2}v^2$, из (3.4) получим

$$\xi = \frac{2S}{\pi\sqrt{t}} \int_0^{\infty} v e^{-2v^4} \cos(c^{-1}t^{\alpha-1/2} v^2) \cos t^{3/4} v \, dv$$

$$(\alpha < 5/4, \quad \alpha - 1/2 < 3/4, \quad t \to \infty) \tag{3.8}$$

Теперь заметим, что в этих условиях влияние третьего сомножителя под знаком интеграла на асимптотическое поведение ξ при $t \to \infty$ будет более сильным, чем влияние второго. Этот факт определяет выбор способа интегрирования по частям. Полагая $dy = \cos t^{3/4} v \, dv$, из (3.8), найдем

$$\xi = \frac{2S}{\pi}[-J_1 + J_2 + J_3] \tag{3.9}$$

Здесь

$$J_1 = t^{-5/4} \int_0^{\infty} e^{-2v^4} \cos(c^{-1} t^{\alpha-1/2} v^2) \sin t^{3/4} v \, dv$$

$$J_2 = t^{-5/4} \int_0^{\infty} 8v^4 e^{-2v^4} \cos(c^{-1}t^{\alpha-1/2} v^2) \sin t^{3/4} v \, dv$$

$$J_3 = t^{\alpha-7/4} \int_0^{\infty} 2c^{-1} v^2 e^{-2v^4} \sin(c^{-1}t^{\alpha-1/2} v^2) \sin t^{3/4} v \, dv$$

Интегрируя по частям J_1, ($dy = \sin t^{3/4} v dv$), имеем

$$J_1 = \frac{1}{t^2}[1 - J_{11} - J_{12}] \tag{3.10}$$

Здесь

$$J_{11} = 8\int_0^{\infty} v^3 e^{-2v^4} \cos(c^{-1}t^{\alpha-1/2} v^2) \cos t^{3/4} v \, dv$$

$$J_{12} = 2c^{-1}t^{\alpha-1/2} \int_0^{\infty} v e^{-2v^4} \sin(c^{-1}t^{\alpha-1/2} v^2) \cos t^{3/4} v \, dv$$

Нетрудно показать, что $J_{11} = o(1)$ при $t \to \infty$. Действительно, интегрируя J_{11} по частям, найдем

$$J_{11} = -J_{111} + J_{112} + J_{113}$$

Здесь

$$J_{111} = t^{-3/4} \int_0^\infty 24\, v^2 e^{-2v^4} \cos(c^{-1} t^{\alpha-1/2}\, v^2) \sin t^{3/4} v\, dv = O(t^{-3/4})$$

$$J_{112} = t^{-3/4} \int_0^\infty 64\, v^6 e^{-2v^4} \cos(c^{-1} t^{\alpha-1/2} v^2) \sin t^{3/4} v\, dv = O(t^{-3/4})$$

$$J_{113} = 16\, c^{-1} t^{\alpha-5/4} \int_0^\infty v^4 e^{-2v^4} \sin(c^{-1} t^{\alpha-1/2}\, v^2) \sin t^{3/4} v\, dv = O(t^{\alpha-5/4})$$

Отсюда при условии $\alpha < 5/4$ имеем

$$J_{11} = o(1), \qquad t \to \infty \tag{3.11}$$

Несколько сложнее показать, что $J_{12} = o(1)$ при $t \to \infty$. После интегрирования J_{12} по частям найдем

$$J_{12} = -J_{121} + J_{122} - J_{123}$$

При этом

$$J_{121} = O(t^{\alpha-5/4}), \qquad J_{122} = O(t^{\alpha-5/4}), \qquad t \to \infty$$

$$J_{123} = 4c^{-2}\, t^{2\alpha-7/4} \int_0^\infty v^8 e^{2v^4} \cos(c^{-2} t^{\alpha-1/2}\, v^2) \sin t^{3/4} v\, dv = O(t^{2\alpha-7/4}) \tag{3.12}$$

Первые две оценки дают нужный результат, так как $\alpha < 5/4$, а третья оценка — нет. Однако нетрудно видеть, что при последующем повторном интегрировании n —2 раза по частям для J_{123} будет получена более сильная оценка

$$J_{123} = O(t^{3/4 + (\alpha - 5/4)\, n}), \qquad t \to \infty \tag{3.13}$$

Таким образом, чтобы получить нужную оценку, надо J_{123} интегрировать по частям до тех пор, пока не выполнится неравенство

$$3/4 + n(\alpha - 5/4) < 0$$

Тогда из (3.12) и (3.13) следует, что $J_{12} = o(1)$. Теперь из (3.10) и (3.11) выводим

$$J_1 = \frac{1}{t^2}\,[1 + o(1)], \qquad t \to \infty \tag{3.14}$$

Совершенно аналогично устанавливается, что

$$J_2 = o(t^{-2}), \qquad J_3 = o(t^{-2}), \qquad t \to \infty \tag{3.15}$$

При этом для получения второй оценки необходимо интегрировать по частям до тех пор, пока не выполнится неравенство

$$6/4 + n(\alpha - 5/4) < 0$$

Теорема 2. Пусть

$$t^5 / x^4 = c = \text{const} \quad \text{или} \quad x = c^{-1/4}\, t^{5/4}, \qquad x > 0, \qquad t > 0$$

Тогда при $x \to \infty$

$$\xi = \frac{S}{2\sqrt{\pi}} \frac{t e^{1/8 c}}{x^{3/2}} \cos\left(t^2/4x - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{S}{x}\right) \tag{3.16}$$

или в размерных переменных

$$\eta = \frac{1}{2}\left(\frac{g}{\pi}\right)^{1/2} \frac{t S e^{-1/8 c}}{x^{3/2}} \cos\left(gt^2/4x - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{S}{x}\right) \tag{3.17}$$

Доказательство. Полагая $ux^2 = t^2v^2$ и учитывая условие $t^5 = cx^4$ из (3.4), выводим

$$\xi = \frac{S}{\pi}\frac{t^2}{x^2}\left[\int_0^\infty ve^{-2cv^4}\cos\frac{t^2}{x}(v^2 - v)\,dv + \int_0^\infty ve^{-2cv^4}\cos\frac{t^2}{x}(v^2 + v)\,dv\right] \tag{3.18}$$

К первому интегралу в (3.18) можно применить метод стационарной фазы по формуле (3.5). Из условий теоремы имеем

$$\psi(v) = ve^{-2cv^4}, \quad \varphi(v) = v^2 - v, \quad z = \frac{t^2}{x} = c^{1/4}t^{3/4} \to \infty, \quad \tau = 1/2$$

Все условия применимости формулы (3.5) легко устанавливаются. В частности амплитуда $\psi(v)$ и фаза $\varphi(v)$ не зависят от параметра $z \to \infty$. Второй интеграл в (3.18) легко оцениваем, интегрируя по частям. В результате получаем (3.16).

Формула (3.5) может быть перенесена на тот случай, когда амплитуда $\psi(a, z)$ зависит от параметра z, но достаточно слабо. На такую возможность есть указание в книге Дж. Стокера «Волны на воде». Очевидно, что здесь требуется дополнительное исследование.

Теорема 3. Пусть $t^\alpha = cx > 0$; α и n таковы, что

$$\frac{10n+12}{8n+9} \leqslant \alpha < \frac{10n+2}{8n+1}, \quad n \geqslant 0, \quad \frac{5}{4} < \alpha < 2, \qquad x > 0, \ c = \text{const}$$

Тогда при $x \to \infty$

$$\xi = \frac{St}{2\pi^{1/2}x^{3/2}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!}\left(\frac{t^5}{8x^4}\right)^k\cos\left(\frac{t^2}{4x} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{S}{x}\right) \tag{3.19}$$

или в размерных переменных

$$\eta = \frac{1}{2}\left(\frac{g}{\pi}\right)^{1/2}\frac{St}{x^{3/2}}\cos\left(\frac{gt^2}{4x} - \frac{\pi}{4}\right)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!}\left(\frac{\nu g^2t^5}{8x^4}\right)^k + O\left(\frac{S}{x}\right) \tag{3.20}$$

Доказательство. Полагая $ut^{1/2} = v^2$, приведем (3.4) к виду

$$\xi = I^+(0, 1) + I^-(0, 1) + I^+(1, \infty) + I^-(1, \infty)$$

$$I^\pm(a, b) = \frac{S}{\pi t^{1/2}}\int_a^b ve^{-2v^4}\cos k(v^2 \pm \varepsilon v)\,dv \tag{3.21}$$

$$ck = t^{\alpha - 1/2}, \quad \varepsilon = ct^{5/4 - \alpha}$$

Полагая $du = k(2v \pm \varepsilon)\cos k(v^2 \pm \varepsilon v)\,dv$ и интегрируя по частям, получаем оценки

$$I^\pm(1, \infty) = O(St^{-\alpha}), \qquad t \to \infty \tag{3.22}$$

Для вычисления $I^\pm(0,1)$ разложим экспоненту под знаком интеграла в ряд Маклорена в окрестности нуля. Используя асимптотическое представление интегралов Френеля, выводим

$$I^+(0,1) = O(St^{-\alpha}), \qquad t \to \infty \tag{3.23}$$

$$I^-(0,1) = \frac{S\varepsilon}{2\pi\sqrt{t}}\left(\frac{\pi}{k}\right)^{1/2}\exp\frac{-\varepsilon^4}{8}\cos\left(\frac{ct^{2-\alpha}}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + O(St^{-\alpha}) \tag{3.24}$$

Объединим формулу (3.21) — (3.24) и разложим экспоненту в ряд по $1/8\,\varepsilon^4$. Оставляя только те слагаемые, порядок которых не превосходит порядка остаточного члена, приходим к (3.19).

Теорема 4. Пусть

$$x = ct^{\alpha}, \quad \alpha > 2, \quad t > 0, \quad x > 0 \text{ или } t = c = \text{const} > 0$$

Тогда при $x \to \infty$

$$\xi = \frac{St^2}{2\pi x^2}[1 + o(1)] \tag{3.25}$$

или в размерных переменных

$$\eta = \frac{Sgt^2}{2\pi x^2}[1 + o(1)] \tag{3.26}$$

Доказательство, как и в теореме 1, заключается в повторном интегрировании по частям (3.8). При этом полагаем

$$v \cos (ct^{\alpha - 1/2} v^2)\, dv = dy \text{ на нечетном шаге}$$
$$v \sin (ct^{\alpha - 1/2} v^2)\, dv = dy \text{ на четном шаге}$$

На первый взгляд может показаться, что оценка (3.25) охватывает более широкую область значений $\alpha > 5/4$. Однако оценка остаточного члена получается только для значений $\alpha > 2$. Для доказательства во втором случае ($t = \text{const}$, $x \to \infty$) в указанных подстановках надо заменить ct^{α} на x и t на c.

§ 4. Приступим к анализу интегралов, встречающихся в работах [2–21], на примере интеграла (2.1). Покажем, что асимптотика интеграла (2.1) определяется формулой (3.7), если $\alpha < 5/4$, и формулой (3.26), если $\alpha > 2$.

Полагая $u = (2a^2)^{-2/3}$ и переходя к безразмерным переменным x и t, из (2.1) получим

$$J_1 = -\frac{1}{2K^2}(J_2 + J_3), \qquad B = (1{,}8\sqrt{2})^{-4/3} \tag{4.1}$$

$$J_{2,3} = \int_0^B \varphi_1(u)\, e^{-2tu^2\varphi_2(u)} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} xu\, \varphi_3(u) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} t\sqrt{u}\, \varphi_4(u)\, du$$

Здесь функции φ_k представимы в виде рядов

$$\varphi_k(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn} (u^{3/4})^n \qquad (k = 1, 2, 3, 4) \tag{4.2}$$

сходящихся в некоторой окрестности точки $u = 0$, причем $\varphi_k(0) = 1$. Степенную асимптотику в интегралах J_2 и J_3 на путях $x = ct^{\alpha}$ ($\alpha < 5/4$, $\alpha > 2$) дает окрестность точки $u = 0$, так как на отрезке $[\varepsilon, B]$ соответствующие интегралы легко оценить сверху, и эта оценка имеет вид $\exp(-mt)$, $m > 0$ при $t \to \infty$. На отрезке $[0, \varepsilon]$ подынтегральная функция в J_2 совпадает практически с подынтегральной функцией интеграла Л. Н. Сретенского, если ε достаточно мало. Нетрудно показать, что теоремы 1—4 из § 3 переносятся на интеграл J_2, где $B = \varepsilon$, и ε достаточно мало. При этом необходимо вместо замены $u = t^{-1/2} v^2$ провести замену $u\varphi_2{}^2 = t^{-1/2} v^2$. Аналогично (см. § 3) показывается, что

$$J_3 = o(t^{-2}), \quad t \to \infty \text{ на путях } x = ct^{\alpha}, \quad \alpha < 5/4$$
$$J_3 = o(t^2 / x^2), \quad x \to \infty \text{ на путях } x = ct^{\alpha}, \quad \alpha > 2$$

Отсюда следует, что в размерных переменных

$$J_1 = \frac{\nu^2}{g^2 t^2}[1 + o(1)], \quad t \to \infty \text{ на путях } x = ct^{\alpha}, \quad \alpha < 5/4$$

$$J_1 = -\frac{\nu^2 t^2}{4x^2}[1 + o(1)], \text{ на путях } x = ct^{\alpha}, \ \alpha > 2, \quad x \to \infty$$

Замечание 1. Как уже указывалось в § 2, интеграл (2.1) в работе А. К. Никитина и Р. А. Грунтфеста [2] фактически вычислялся в предположениях (2.3). В этом случае функции $\varphi_k(u) \equiv 1$ ($k = 1, 2, 3, 4$) и подынтегральная функция в J_1 (в точности!) совпадает с подынтегральной функцией интеграла Л. Н. Сретенского. Отсюда следует, что после исправления всех ошибок при вычислении J_1 получаются результаты, которые не перекрывают результатов, выведенных на основе упрощенной трактовки задачи Коши — Пуассона.

Замечание 2. Рассуждения § 3 при получении асимптотики на путях $x = ct^{\alpha}$ легко переносятся на пространственную задачу о волнах, вызванных сосредоточенным в начале координат воздействием, на поверхности вязкой жидкости в полупространстве или слое.

Авторы благодарят Г. М. Бездудного, И. Б. Симоненко и В. И. Юдовича за обсуждение результатов работы.

Поступила 14 VIII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л. Н. О волнах на поверхности вязкой жидкости. Тр. ЦАГИ, 1941, № 541.
2. Никитин А. К., Грунтфест Р. А. К плоской задаче о волнах на поверхности вязкой жидкости бесконечной глубины. В сб.: «Числен. методы решения дифференц. и интегральн. уравнений и квадратурн. формулы». М., «Наука», 1964, стр. 326—344.
3. Никитин А. К., Грунтфест Р. А. Плоская задача о волнах на поверхности вязкой жидкости. Научн. сообщ. Ростовск.-на-Дону ун-та, 1964, стр. 58—61.
4. Никитин А. К., Подрезов С. А. К пространственной задаче о волнах на поверхности вязкой жидкости бесконечной глубины. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
5. Никитин А. К., Подрезов С. А. Пространственная задача о волнах на поверхности вязкой жидкости. Научн. сообщ. Ростовск.-на-Дону ун-та за 1963 г., сер. точных и естествен. н. Изд-во Ростовск.-на-Дону ун-та, 1964, стр. 55—58.
6. Никитин А. К., Белозеров Б. С. К плоской задаче о волнах на поверхности вязкой жидкости конечной глубины. Сообщ. на I-й конф. Ростовск. научн. матем. общ-ва, Ростов-на-Дону, 1967, стр. 19—24.
7. Никитин А. К., Потетюнко Э. Н. К пространственной задаче Коши — Пуассона о волнах на поверхности вязкой жидкости конечной глубины. Докл. АН СССР, 1967, т. 174, № 1, стр. 50—52.
8. Никитин А. К., Потетюнко Э. Н. О волновом сопротивлении вязкой жидкости конечной глубины. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1967, т. 7, № 6, стр. 1413—1416.
9. Никитин А. К., Потетюнко Э. Н. Волновое движение вязкой жидкости. Уч. зап. Кабардино-Балкарск. ун-та. Сер. матем., 1966, вып. 30, стр. 193—195.
10. Никитин А. К., Потетюнко Э. Н., Белозеров Б. С. Задача Коши — Пуассона о волнах на поверхности вязкой жидкости конечной глубины. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1967, т. 7, № 6, стр. 1320—1333.
11. Никитин А. К. О корабельных волнах на поверхности вязкой жидкости бесконечной глубины. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
12. Белозеров Б. С. Плоские задачи о волнах на поверхности вязкой жидкости конечной глубины. Тез. докладов I-й Ростовск. областной научно-теорет. конф. молодых ученых и специалистов, секция естественных н., т. 1, Ростов-на-Дону, 1967, стр. 49, 50.
13. Грунтфест Р. А. Корабельные волны при равноускоренном движении. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
14. Грунтфест Р. А., Никитин А. К. О волновом сопротивлении вязкой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 4, стр. 118—126.
15. Подрезов С. А. Некоторые вопросы теории волн на поверхности вязкой жидкости, занимающей безграничное полупространство. Материалы 17-й научн. студенч. конф. Сер. точных и естеств. н. Изд-во Ростовск.-на-Дону ун-та, 1965, стр. 9—15.
16. Потетюнко Э. Н. Задача о волнах на поверхности вязкой жидкости конечной глубины. Материалы VII и VIII научн. конф. аспирантов (сер. точных и естеств. н.). Изд-во Ростовск.-на-Дону ун-та, 1968, стр. 40—42.
17. Черкесов Л. В. Пространственная задача Коши — Пуассона для волн в вязкой жидкости. ПММ, 1965, т. 29, вып. 6.
18. Шмидт А. Г. Колебания вязкой жидкости конечной глубины, вызванные начальным смещением ее свободной поверхности. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 2, стр. 287—297.
19. Грунтфест Р. А. Плоская задача о волнах на поверхности движущейся вязкой жидкости бесконечной глубины. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 4, стр. 754—759.
20. Miles J. W. The Cauchy — Poisson problem for a viscous liquid. J. Fluid. Mech., 1968, vol. 34, pt 2, pp. 359—372.
21. Белозеров Б. С. К плоской задаче о волнах на поверхности вязкой жидкости конечной глубины. Материалы VII и VIII научн. конф. аспирантов (сер. точных и естеств. н.). Изд-во Ростовск.-на-Дону ун-та, 1968, стр. 171—173.