О СПЕКТРЕ КОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ВЕРТИКАЛЬНОМ КАНАЛЕ С ПРОНИЦАЕМЫМИ ГРАНИЦАМИ

Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, Д. Л. Шварцблат

(Пермь)

Ранее [1] было получено решение задачи о возникновении стационарной плоско-параллельной конвекции в подогреваемой снизу жидкости, заполняющей плоский вертикальный канал с проницаемыми границами. Было показано, что характеристические значения числа Рэлея, определяющие границы устойчивости относительно стационарных возмущений, зависят от скорости поперечного движения жидкости, причем при увеличении числа Пекле наступает «замыкание» соседних уровней спектра неустойчивости. Таким образом, стационарная конвекция возможна лишь до некоторого предельного значения скорости поперечного движения. При обсуждении этого результата в [1] было высказано предположение, что слияние уровней стационарных движений сопровождается появлением колебательных конвективных движений. Ниже приводятся результаты численного исследования спектров нестационарных возмущений. Из этих результатов следует, что при увеличении числа Пекле действительно возникает конвективное движение типа стационарных колебаний. Таким образом, в зависимости от параметра (числа Пекле) основное состояние (поперечное движение жидкости) оказывается неустойчивым по отношению либо к монотонным, либо к колебательным возмущениям. Анализ спектров позволяет определить границы областей монотонной и колебательной неустойчивости.

1. Пусть в вертикальном плоском канале с проницаемыми границами $x = \pm h$ происходит поперечное движение с однородной постоянной скоростью v_0; подогрев снизу приводит к линейному распределению температуры по высоте с градиентом A. Рассмотрим возмущенное движение вида

$$v_x = v_0, \quad v_y = 0, \quad v_z = v(x, t); \quad T = -Az + \theta(x, t); \quad p = p(z, t) \tag{1.1}$$

Полагая возмущения зависящими от времени по закону $\exp(-\lambda t)$, из общих уравнений конвекции получим амплитудные уравнения

$$-\lambda v + \frac{a}{P} v' - v'' - R\theta - C = 0 \tag{1.2}$$

$$-\lambda P\theta - v + a\theta' - a\theta'' = 0 \tag{1.3}$$

Здесь теперь $v(x)$ и $\theta(x)$ — амплитудные части возмущений, а C — постоянная разделения переменных. Уравнения записаны в безразмерных переменных; за единицы расстояния, времени, скорости и температуры приняты соответственно h, h^2 / ν, χ / h, Ah. Числа Рэлея R, Пекле a и Прандтля P определены следующим образом:

$$R = \frac{g\beta Ah^4}{\nu\chi}, \quad a = \frac{v_0 h}{\chi}, \quad P = \frac{\nu}{\chi}$$

Амплитуды удовлетворяют однородным условиям

$$v(\pm 1) = 0, \qquad \theta(\pm 1) = 0, \qquad \int_{-1}^{1} v\,dx = 0 \tag{1.4}$$

Краевая задача (1.2)— (1.4) определяет характеристические возмущения и их декременты λ. Вещественным λ соответствуют возмущения, монотонно затухающие или нарастающие со временем; граница устойчивости относительно таких возмущений находится из условия $\lambda = 0$. Комплексные декременты $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ соответствуют осциллирующим возмущениям; граница устойчивости определяется из условия обращения в нуль вещественной части $\lambda_r = 0$, а мнимая часть λ_i дает безразмерную частоту осцилляций.

2. Для решения задачи применим метод Бубнова — Галеркина. Представим амплитудные функции в виде разложений

$$v = a_0 v_0 + a_1 v_1 + \ldots + a_N v_N, \qquad \theta = b_0\theta_0 + b_1\theta_1 + \ldots + b_M\theta_M \tag{2.1}$$

где v_n и θ_m — базисные функции, удовлетворяющие условиям (1.4). В качестве базиса удобно выбрать собственные функции задачи о стационарной плоскопараллельной конвекции в вертикальном канале с непроницаемыми границами [2] (2.2)

$$v_n = \frac{\cos r_n x}{\cos r_n} - \frac{\operatorname{ch} r_n x}{\operatorname{ch} r_n} \quad (n=0,2,4\ldots), \quad v_n = \sin\frac{(n+1)\pi}{2} \quad (n=1,3,5\ldots)$$

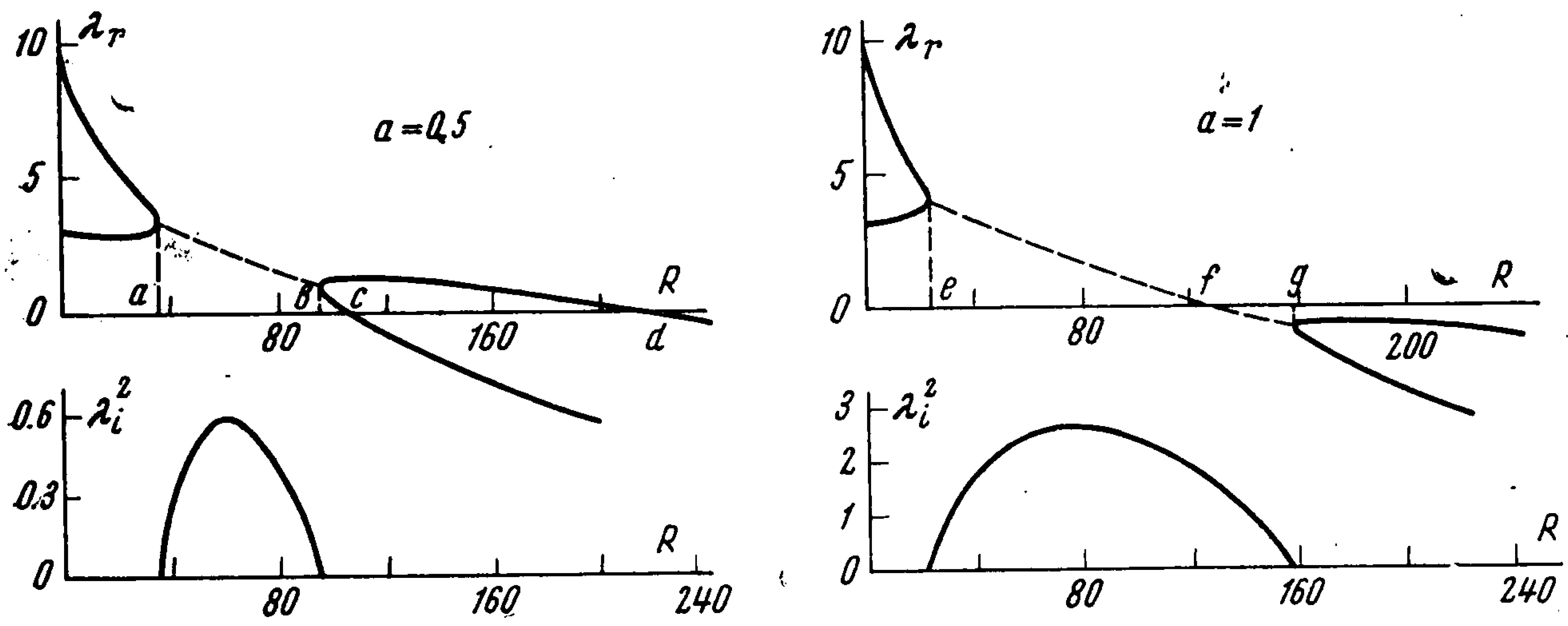
$$\theta_m = \frac{\cos r_m x}{\cos r_m} + \frac{\operatorname{ch} r_m x}{\operatorname{ch} r_m} - 2 \quad (m=0,2,4\ldots), \quad \theta_m = \sin\frac{(m+1)\pi}{2} \quad (m=1,3,5\ldots)$$

Здесь r_n — корни трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg} r = \operatorname{th} r, \qquad r_0 = 3.927, \qquad r_2 = 7.069,\ldots$$

Подставляя разложения (2.1) в левые части (1.2), (1.3), умножая соответственно на v_l и θ_k и интегрируя по x от -1 до 1, получим систему линейных однородных уравнений для коэффициентов разложений a_n и b_m. Условие существования нетривиального решения этой системы — равенство нулю ее определителя — определяет спектр собственных значений λ. Вычисления проведены с $N = M = 7$. Собственные значения матрицы 16 порядка находились на ЭВМ при помощи ортогонально-степенного метода.

3. Перейдем к обсуждению полученных результатов. Характеристические декременты λ зависят от трех параметров — чисел Рэлея R, Пекле a и Прандтля P. Основной интерес представляло изучение качественных особенностей структуры спектра декрементов в связи с обнаруженным ранее замыканием уровней неустойчивости. Поэ-



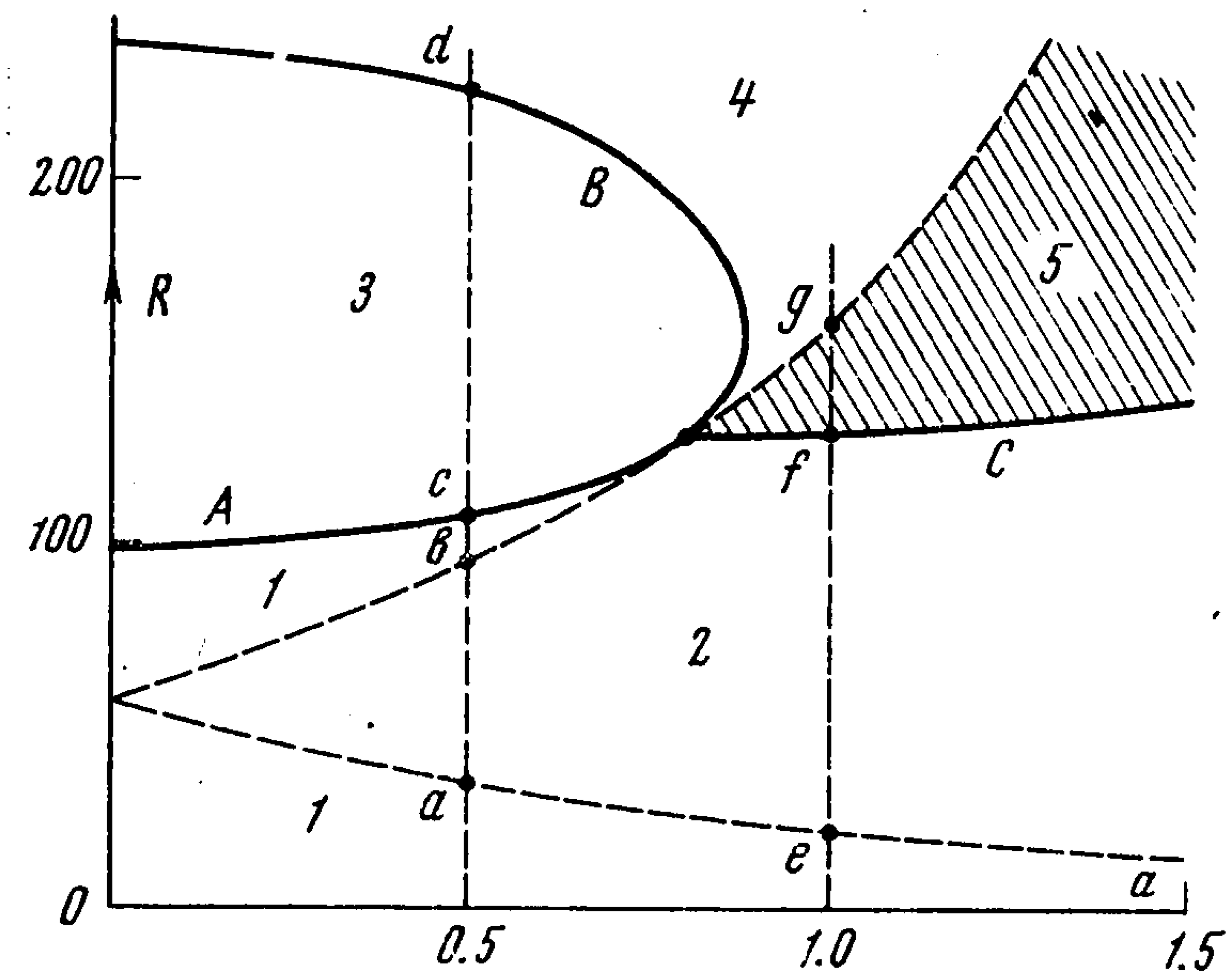
Фиг. 1 Фиг. 2

тому все расчеты проводились для фиксированного значения числа Прандтля $P = 1$.

На фиг. 1 и 2 представлены зависимости вещественной и мнимой частей декрементов двух «нижних» мод возмущений от числа Рэлея при значениях $a = 0.5$ и $a = 1$. Согласно результатам [1], первое из этих значений числа Пекле лежит в области существования стационарных движений; при $a = 1$ стационарных движений нет. Сравнение спектров на фиг. 1 и 2 позволяет понять природу замыкания нейтральных линий стационарных возмущений.

Как видно из фиг. 1, при малых значениях числа Рэлея оба декремента вещественны и положительны, а соответствующие возмущения монотонно затухают. В точке a происходит слияние двух вещественных уровней спектра с порождением пары комплексно-сопряженных декрементов, соответствующих колебательным возмущениям. В интервале (a, b) существуют затухающие колебания (общая вещественная часть λ_r изображена пунктиром; $\lambda_r > 0$ в интервале (a, b)), а в точке b пара комплексно-сопряженных декрементов вновь распадается на два вещественных. Правее точки b возможны лишь монотонные возмущения; их вещественные декременты в точках c и d последовательно меняют знак, порождая два уровня монотонной неустойчивости. Соответствующие числа Рэлея определяют нейтральные точки для монотонных возмущений, или, что то же самое, точки существования стационарной конвекции (значения критических чисел Рэлея практически совпадают с точными [1]). Таким образом, при $a = 0.5$ возможна лишь неустойчивость относительно монотонных возмущений.

При $a = 1$ (фиг. 2) по мере увеличения числа R также происходит сначала слияние вещественных уровней в комплексно-сопряженную пару (зарождение колебательных возмущений, точка e), и затем расщепление этой пары на два вещественных декремента (точка g). Однако в этом случае колебательные возмущения затухают лишь на участке (e, f). В точке f вещественная часть декрементов обращается в нуль, и эта точка является нейтральной точкой для колебательных возмущений. При соответствующем значении числа Рэлея на основное поперечное движение накладывается конвекция в виде стационарных колебаний (частота нейтральных колебаний может быть найдена из приводимого на фиг. 2 графика мнимой части декремента λ_i). В интервале (f, g) колебательные возмущения нарастают, и в точке g появляются два монотонно растущих возмущения т. е. при увеличении числа Рэлея сначала возникают растущие колебательные возмущения (колебательная неустойчивость).



Фиг. 3

Обработка спектров декрементов, подобных приведенным на фиг. 1 и 2, позволяет построить карту устойчивости на плоскости (R, a). Эта карта представлена на фиг. 3.

Вертикальные пунктирные прямые соответствуют разрезам, для которых построены спектры на фиг. 1 и 2. Характерные линии отмечены так: A и B — нейтральные линии монотонных возмущений; C — нейтральная линия колебательных возмущений. Пунктирная кривая ограничивает область существования колебательных возмущений. На карте обозначены области: *1* и *2* — области устойчивости (*1* — оба возмущения монотонно затухают, *2* — оба возмущения затухают, осциллируя); *3* и *4* — области монотонной неустойчивости (*3* — монотонно нарастает одно из возмущений, *4* — монотонно нарастают оба возмущения); *5* — область колебательной неустойчивости (оба возмущения нарастают, осциллируя).

Итак, исследование спектра нестационарных возмущений в вертикальном канале с проницаемыми границами приводит к выводу о существовании колебательной конвективной неустойчивости. При малых значениях числа Пекле ($a < 0.8$; см. фиг. 3) с увеличением числа Рэлея поперечное движение становится неустойчивым относительно монотонных возмущений, т. е. при критическом значении числа Рэлея (кривая A возникает стационарная конвекция. При $a > 0.8$ неустойчивость связана с колебательными возмущениями; при переходе (с увеличением R) нейтральной линии C возникает колебательная конвекция.

В заключение заметим, что замыкание стационарных уровней уже было обнаружено ранее [3] в задаче об устойчивости конвективного движения в наклонном слое. В разбираемой теперь задаче замыкание сопровождается не стабилизацией, как в [3], а сменой формы неустойчивости — переходом к колебательной конвекции.

Поступила 1 VII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Шварцблат Д. Л. Стационарная конвекция в вертикальном канале с проницаемыми границами. ПММ, 1969, т. 33, вып. 3.
2. Ostrach S. On the flow, heat transfer, and stability of viscous fluids subject to body forces and heated from below in vertical channels. 50 Jahre Grenzschichtforsch., Berlin, Akad-Verl., 1956.
3. Бирих Р. В., Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Рудаков Р. Н. Гидродинамическая и тепловая неустойчивость стационарного конвективного движения. ПММ, 1968, т. 32, вып. 2.