МАГНИТОЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Л. Я. Косачевский

(Донецк)

Рассматривается распространение магнитозвуковых волн в идеально проводящей слоисто-неоднородной среде при наличии постоянного внешнего магнитного поля. Получено уравнение для определения коэффициента отражения быстрой магнитозвуковой волны от неоднородного слоя.

1. Пусть свойства среды непрерывно изменяются в направлении оси z, а внешнее магнитное поле H перпендикулярно этой оси. Ось x направим по вектору H. Для волн, поляризованных в плоскости xz, линеаризованные уравнения магнитной гидродинамики принимают вид [1]

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad \frac{\partial h_x}{\partial t} = -H\frac{\partial v_z}{\partial z}, \qquad \frac{\partial h_z}{\partial t} = H\frac{\partial v_z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{H}{4\pi\rho}\left(\frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho a^2\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) + a^2 v_z\frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \tag{1.1}$$

Здесь v — скорость среды, p и h — малые изменения давления и магнитного поля в волне. Плотность ρ и обычная скорость звука a, характеризующие свойства среды, являются функциями координаты z. В силу адиабатичности движения изменения давления и плотности связаны соотношением

$$\frac{\partial p}{\partial t} = a^2\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

В дальнейшем предполагается, что невозмущенные параметры среды изменяются в пространстве достаточно медленно. Поэтому последним членом в пятом уравнении (1.1) можно пренебречь как малой величиной второго порядка.

В случае монохроматических волн частоты ω из (1.1) после исключения v_x, h_x и h_z имеем

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[(1+\psi)p + \psi\frac{a^2}{\omega^2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right] = i\omega\rho\left(v_z + \psi\frac{a^2}{\omega^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}\right)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{i\omega}{\rho a^2}\left(p + \frac{a^2}{\omega^2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right), \qquad \psi = \frac{H^2}{4\pi\rho a^2} \tag{1.2}$$

Полагая

$$p = P(z)\, e^{i(bx-\omega t)}, \qquad v_z = V(z)\, e^{i(bx-\omega t)}, \qquad b = \mathrm{const} \tag{1.3}$$

приводим систему (1.2) к виду

$$\frac{\partial}{\partial z}(up) = i\omega g v_z, \qquad \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{i\omega}{\rho a^2}(1-\chi)p \tag{1.4}$$

Здесь введены обозначения

$$\chi = (ab/\omega)^2, \qquad g = \rho(1-\psi\chi), \qquad u = 1+\psi-\psi\chi \tag{1.5}$$

Из (1.4), учитывая (1.3), получаем уравнение для давления

$$\Delta p + \left(k^2 + \frac{u''}{u'} - \frac{g'}{g}\frac{u'}{u}\right)p + \left(2\frac{u'}{u} - \frac{g'}{g}\right)p' = 0 \tag{1.6}$$

Штрихом здесь обозначены производные по z, Δ — оператор Лапласа,

$$k^2 = \frac{\omega^2}{a^2 u} \tag{1.7}$$

При очень медленном изменении невозмущенных параметров среды в пространстве, когда можно пренебречь членами с производными от этих параметров, уравнение (1.6) принимает вид волнового уравнения с переменным волновым числом k

$$\Delta p + k^2 p = 0 \tag{1.8}$$

Величина u при этом играет роль квадрата безразмерной скорости магнитозвуковой волны в неоднородной среде. Согласно (1.5) и (1.7), имеем

$$u^2 - (1 + \psi) u + \psi (b/k)^2 = 0 \tag{1.9}$$

Будем предполагать, что при $z \to -\infty$ параметры среды стремятся к постоянным значениям ρ_0 и a_0. Дисперсионное уравнение плоских магнитозвуковых волн в однородной среде имеет вид [1]

$$u_0^2 - (1 + \psi_0) u_0 + \psi_0 \sin^2 \theta_0 = 0 \qquad \left(u_0 = \frac{\omega^2}{a_0^2 k_0^2}, \quad \psi_0 = \frac{H^2}{4\pi\rho_0 a_0^2}\right) \tag{1.10}$$

где θ_0 — угол между нормалью к фронту волны и осью oz.

Так как при $z \to -\infty$ величина u должна стремиться к u_0, из (1.9) и (1.10) следует

$$b = k_0 \sin \theta_0 \tag{1.11}$$

По закону Снеллиуса

$$k_0 \sin \theta_0 = k \sin \theta \tag{1.12}$$

и уравнение (1.9) принимает вид

$$u^2 - (1 + \psi) u + \psi \sin^2 \theta = 0 \tag{1.13}$$

Два корня этого уравнения определяют скорости быстрой и медленной магнитозвуковых волн в неоднородной среде.

Поскольку отбрасывание малых членов в дифференциальном уравнении может в некоторых случаях привести к ошибочным результатам, представляет интерес приведение к волновому уравнению точного уравнения (1.6).

Это оказывается возможным, если вместо давления ввести новую функцию

$$T = \frac{pu}{\sqrt{g}} \tag{1.14}$$

Для этой функции, согласно (1.6), получается волновое уравнение с некоторым «эффективным» квадратом волнового числа

$$\Delta T + k_{\text{эф}}^2 T = 0$$
$$k_{\text{эф}}^2 = k^2 + \frac{g''}{2g} - \frac{3}{4}\left(\frac{g'}{g}\right)^2 \tag{1.15}$$

При $\psi = 0$

$$T = \frac{p}{\sqrt{\rho}}, \qquad k_{\text{эф}}^2 = k^2 + \frac{\rho''}{2\rho} - \frac{3}{4}\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2, \qquad k^2 = \frac{\omega^2}{a^2} \tag{1.16}$$

что совпадает с известным результатом для звуковых волн в неоднородных средах при отсутствии магнитного поля [2,3].

2. Пусть теперь при $z \to +\infty$ параметры среды также стремятся к постоянным значениям ρ_1, a_1, т. е. имеем неоднородный слой. Предположим, что из однородной среды при $z = -\infty$ в сторону положительных z распространяется плоская быстрая магнитозвуковая волна.

Уравнения (1.4) могут быть удовлетворены, если допустить, что при $z = -\infty$ помимо падающей существует также отраженная волна.

Нашей задачей будет определение отношения амплитуд отраженной и падающей волн, т. е. амплитудного коэффициента отражения. В рассматриваемом случае магнитного поля, перпендикулярного оси z, для этого коэффициента оказывается возможным получение особого уравнения (подобно случаю звуковых волн при отсутствии магнитного поля и случаю электромагнитных волн [3]).

Полагая в (1.4)

$$p = Z(z) v_z \tag{2.1}$$

и исключая производную p', получим уравнение Риккати для определения функции $Z(z)$

$$Z' + \frac{u'}{u} Z + \frac{i\omega}{\rho a^2}(1-\chi) Z^2 = \frac{i\omega g}{u} \tag{2.2}$$

Если свойства среды изменяются мало на протяжении длины волны, первыми двумя членами в левой части (2.2) можно пренебречь и тогда находим

$$Z = \pm\left(\frac{\rho a^2 g}{u(1-\chi)}\right)^{1/2} = \pm\frac{\rho a}{\sqrt{u}}\left(\frac{u-\psi\sin^2\theta}{u-\sin^2\theta}\right)^{1/2} \tag{2.3}$$

Знак «плюс» соответствует падающей волне, а «минус» — отраженной.

Более точное значение функции $Z(z)$ отличается от (2.3) малыми членами порядка производных от невозмущенных параметров среды. Эти добавочные члены должны быть отброшены, так как при подстановке $Z(z)$ в (2.1) они дадут величины второго порядка малости.

Определим теперь падающую и отраженную волны следующим образом:
падающая волна

$$p = P(z)\, e^{i(bx-\omega t)}, \qquad v_z = Z^{-1} P(z)\, e^{i(bx-\omega t)}$$

отраженная волна

$$p = R(z)\, e^{i(bx-\omega t)}, \qquad v_z = -Z^{-1} R(z)\, e^{i(bx-\omega t)}$$

Здесь и далее под Z понимается его значение со знаком «плюс».

Согласно (1.4) с учетом (2.3) для функций P и R имеем уравнения

$$P' - \left[\frac{i\omega g}{Zu} + \frac{1}{2}\left(\frac{Z'}{Z} - \frac{u'}{u}\right)\right] P + \frac{1}{2}\,\frac{(Zu)'}{Zu} R = 0$$

$$R' + \frac{1}{2}\,\frac{(Zu)'}{Zu} P + \left[\frac{i\omega g}{Zu} - \frac{1}{2}\left(\frac{Z'}{Z} - \frac{u'}{u}\right)\right] R = 0$$

Умножив первое из этих уравнений на R, а второе на P, вычтя их друг из друга и поделив результат на P^2, получим для коэффициента отражения $W(z) = R/P$ уравнение Риккати

$$W' = -2i\beta W + \gamma(1 - W^2) \tag{2.4}$$

$$\beta = \frac{\omega g}{Zu} = k_0\sqrt{n^2 - \sin^2\theta_0}, \qquad \gamma = -\frac{1}{2}\,\frac{(Zu)'}{Zu} = \frac{1}{2}\,\frac{g}{\beta}\left(\frac{\beta}{g}\right)' \tag{2.5}$$

$$n = \frac{k}{k_0} = \frac{a_0\sqrt{u_0}}{a\sqrt{u}}$$

В качестве граничного условия имеем

$$W \to 0 \quad \text{при} \quad z \to \infty \tag{2.6}$$

так как при $z \to \infty$ (позади слоя) отраженная волна отсутствует.

Уравнение (2.4) отличается от уравнения для коэффициента отражения звуковой волны при отсутствии магнитного поля лишь тем, что вместо плотности ρ в нем фигурирует величина g, а вместо обычной скорости звука — скорость магнитозвуковой волны.

При слабом магнитном поле ($\psi_0 \ll 1$) согласно (1.5), (1.10), (1.13) и (2.5) имеем

$$u_0 = 1 + \psi_0\cos^2\theta_0, \qquad u = 1 + \psi_0(\rho_0/\rho)\,(n^2 - \sin^2\theta_0)$$

$$\beta = \beta_{(0)}(1 + \psi_0\delta), \qquad \gamma = \gamma_{(0)} + {}^1\!/_2\,\psi_0[\delta + (\rho_0/\rho)\sin^2\theta_0]' \tag{2.7}$$

$$\beta_{(0)} = \frac{\omega}{a_0}\sqrt{n^2 - \sin^2\theta_0}, \qquad \gamma_{(0)} = \frac{1}{2}\,\frac{\rho}{\beta_{(0)}}\left(\frac{\beta_{(0)}}{\rho}\right)'$$

$$\delta = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2\theta_0\cos^2\theta_0}{n^2 - \sin^2\theta_0} - n^2\,\frac{\rho_0}{\rho}\right), \qquad n = \frac{a_0}{a}$$

Полагая в (2.4)

$$W = W_{(0)} + \psi_0 \varepsilon(z) \tag{2.8}$$

где $W_{(0)}$ — коэффициент отражения при отсутствии магнитного поля, и, отбрасывая члены порядка ψ_0^2, получим линейное уравнение для функции $\varepsilon(z)$

$$\varepsilon' + N\varepsilon = Q, \qquad N = 2\,(i\beta_{(0)} + \gamma_{(0)} W_{(0)})$$

$$Q = -\,2i\beta_{(0)}\delta W_{(0)} + {}^1/_2\,[\delta + (\rho_0/\rho)\sin^2\theta_0]'\,(1 - W_{(0)}^2)$$

Отсюда с учетом (2.6) следует

$$\varepsilon(z) = e^{-s}\int\limits_{\infty}^{z} Qe^{s}dz, \qquad s = \int\limits_{z_0}^{z} Ndz \tag{2.9}$$

Здесь z_0 — произвольное фиксированное значение координаты z.

При сильном магнитном поле ($\psi_0 \gg 1$)

$$u_0 = \psi_0, \qquad u = \psi = \psi_0\frac{\rho_0 a_0^2}{\rho a^2} \qquad \beta = \frac{\omega}{a_0\sqrt{\psi_0}}\sqrt{n^2 - \sin^2\theta_0} \tag{2.10}$$

$$\gamma = -\frac{i\beta'}{2\beta} = -\frac{nn'}{2\,(n^2 - \sin^2\theta_0)}, \qquad n^2 = \frac{\rho}{\rho_0}$$

Если ψ_0 настолько велико, что в (2.4) можно пренебречь членом с множителем β, получим уравнение с разделяющимися переменными. Интегрируя его при условии (2.6), находим

$$W \equiv W_\infty = \frac{\sqrt{\rho_1}\cos\theta_1 - \sqrt{\rho}\cos\theta}{\sqrt{\rho_1}\cos\theta_1 + \sqrt{\rho}\cos\theta} \tag{2.11}$$

Выражение (2.11) представляет собой коэффициент отражения от границы раздела двух сред [4], т. е. соответствует случаю переходного слоя толщины значительно меньшей длины быстрой магнитозвуковой волны. Полагая теперь в (2.4)

$$W = W_\infty + \frac{1}{\sqrt{\psi_0}}\eta(z) \tag{2.12}$$

и отбрасывая члены порядка ψ_0^{-1}, имеем

$$\eta' + 2\gamma W_\infty \eta = -\,2i\,(\omega/a_0)\,W_\infty \sqrt{n^2 - \sin^2\theta_0}$$

Отсюда

$$\eta = -\,2i\frac{\omega}{a_0}e^{-s}\int\limits_{\infty}^{z} W_8 \sqrt{n^2 - \sin^2\theta_0}\,e^{s}dz, \qquad s = 2\int\limits_{z_0}^{z}\gamma W_\infty dz \tag{2.13}$$

В рассмотренном случае падения быстрой магнитозвуковой волны на неоднородный слой при магнитном поле, параллельном слою, медленные магнитозвуковые волны не возникают. Согласно [4,5], при таком магнитном поле медленные волны не возникают и при наличии границ, на которых свойства сред изменяются скачком.

Автор благодарит К. П. Станюковича за обсуждение полученных результатов.

Поступила 24 XII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.
2. Bergmann P. G. The wave equation in a medium with a variable index of refraction. J. Acoust. Soc. America, 1946, vol. 17, No. 4, p. 329.
3. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М., Изд-во АН СССР, 1957.
4. Косачевский Л. Я. Распространение магнитозвуковых волн в слоистых средах. ПМТФ, 1966, № 6.
5. Косачевский Л. Я. Отражение магнитозвуковых волн на границе раздела двух сред с конечной электропроводностью. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2.