

ЛИТЕРАТУРА

1. Hermann R. Theory of traffic flow. Elsevier Edit., N. Y., 1961.
2. Haight F. A. Mathematical theories of traffic flow. N. Y. — London, Acad. Press, 1963.
3. Lighthill M. J., Whitham G. B. On kinematic waves. 1. A theory of traffic flow on long crowded roads. 2. A theory of traffic flow on long crowded roads Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1955, vol. 229, No. 1178.
4. Bick J. H., Newell G. F. A continuum model for two-directional traffic flow. Quart. Appl. Math., 1960, vol. 18, No. 2, pp. 191—204.
5. Fortet R. La circulation des voitures sur une route ou dans les arteres d'une ville, a partir des lois de l'hydraulique. Houille Blanche, 1963, vol. 18, No. 8, pp. 909—914.
6. Prigogine I., Herman R., Anderson R. Further developments in the Boltzmannlike theory approach of traffic flow. Commun. au II Symp. Int. sur la Théorie du Traffic., Londres, 1963.
7. Jeffrey A., Taniuti T. Non — linear wave propagation. With application ohysics and magnetohydrodynamics. N. Y. Acad. Press, 1964.

ОБТЕКАНИЕ НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ ПОТОКОМ ГАЗА ПРИ МАЛЫХ УГЛАХ АТАКИ

В. Н. Михайлов

(Москва)

В исследованиях обтекания тел при малых углах атаки α широко используется теория малых возмущений, когда решение уравнений ищется в виде суммы двух членов, первый из которых дает решение при $\alpha = 0$, а второй — пропорционален α . Если линеаризация осуществляется около невозмущенного потока, то для вторых членов получаются линейные уравнения с постоянными коэффициентами. Эта теория верна для тонких тел и крыльев. В случае толстых тел или поверхностей используется линеаризация около известного возмущенного потока, например около осесимметричного течения [1-3], при этом коэффициенты линейных уравнений для вторых членов зависят от первых членов разложения в ряд по α .

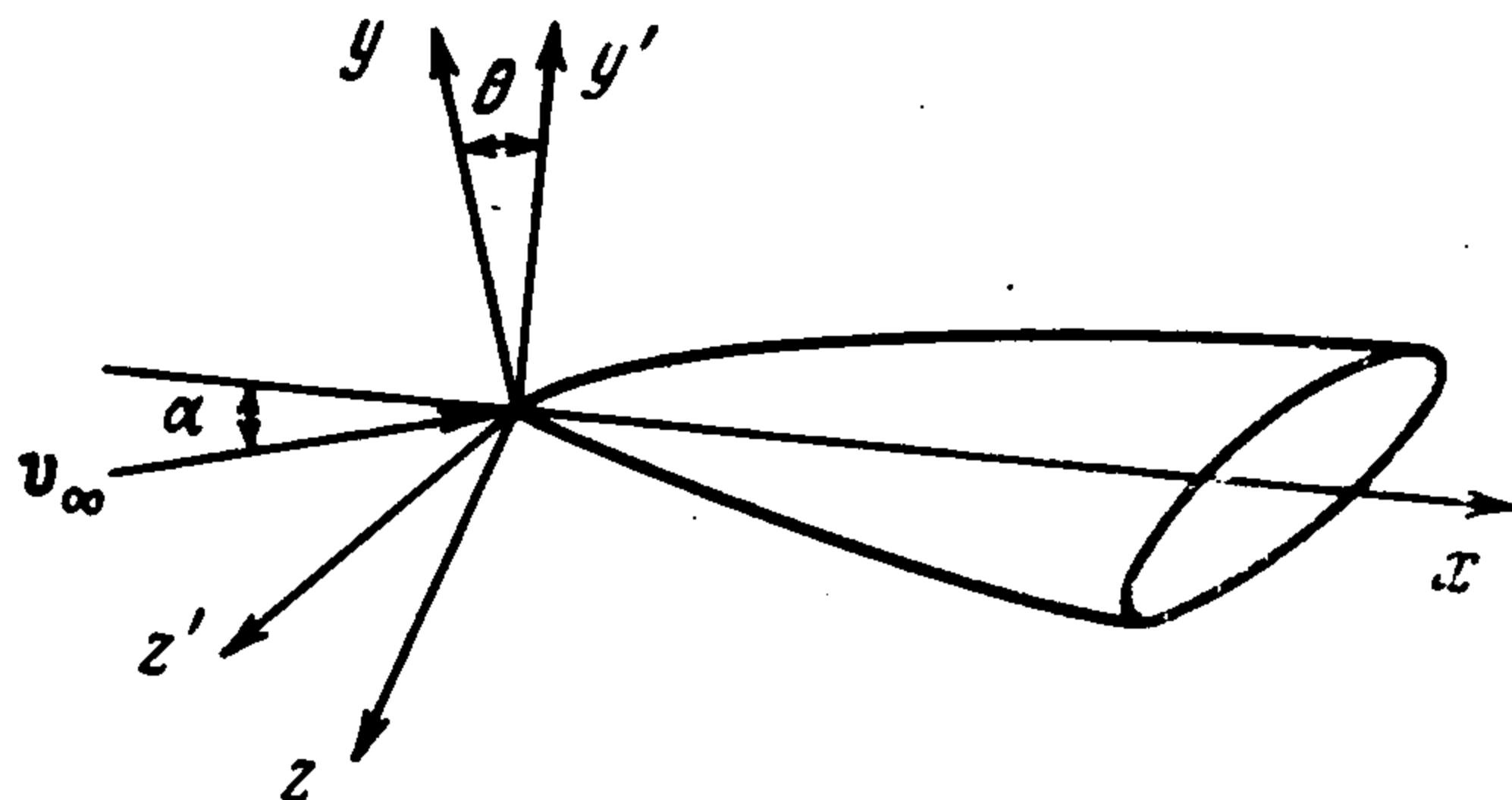
Если тело не имеет осевой симметрии, то вторые члены зависят от ориентации тела относительно вектора скорости набегающего потока. В данной работе показано в этом случае, что решение при любом положении тела можно найти, если известно решение только для двух положений тела относительно набегающего потока. Подобный результат получен для отдельных тонких тел в работах [4,5].

1. Рассмотрим обтекание некоторого конечного тела потоком идеального газа с постоянной скоростью V_∞ , давлением p_∞ , плотностью ρ_∞ . Будем пользоваться прямоугольной системой координат x, y, z , жестко связанных с телом и системой x, y', z' такой, что вектор скорости набегающего потока лежит в плоскости осей x, y' (фигура). Эти две системы связаны соотношениями

$$\begin{aligned} y' &= y \cos \theta + z \sin \theta \\ z' &= -y \sin \theta + z \cos \theta \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь θ — угол между осями y и y' (угол крена).

Угол между вектором скорости набегающего потока и осью x обозначим через α (угол атаки).



Проекции u , v , w вектора скорости соответственно на оси x , y , z давление p и плотность ρ в потоке должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{grad} (V^2) - V \times \text{rot} V &= -\rho^{-1} \text{grad} p \\ \text{div} (\rho V) &= 0, \quad V \text{grad} (p / \rho^{\kappa}) = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

На бесконечности должны выполняться условия

$$u = V_{\infty} \cos \alpha, \quad v = V_{\infty} \sin \alpha \cos \theta, \quad w = V_{\infty} \sin \alpha \sin \theta, \quad p = p_{\infty}, \quad \rho = \rho_{\infty} \quad (1.3)$$

На теле нормальная составляющая скорости равна нулю. Если $F(x, y, z) = 0$ — уравнение поверхности тела, то это условие запишется в виде

$$V \cdot \text{grad} F = 0 \quad (1.4)$$

2. Будем искать решение уравнений (1.2) при малых углах α в виде

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \alpha u', \quad v = v_0 + \alpha v', \quad w = w_0 + \alpha w' \\ p &= p_0 + \alpha p', \quad \rho = \rho_0 + \alpha \rho' \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь функции $u_0, v_0, w_0, p_0, \rho_0$ есть решение задачи при $\alpha = 0$, они удовлетворяют уравнениям (1.2) и граничным условиям (1.3) и (1.4), если в них положить $\alpha = 0$.

Подставляя соотношения (2.1) в уравнения (1.2), получим для величин u', v', w', p', ρ' уравнения

$$\begin{aligned} \text{grad} (V_0 V') - V_0 \times \text{rot} V' - V' \times \text{rot} V_0 &= \frac{\rho'}{\rho_0^2} \text{grad} p_0 - \frac{1}{\rho_0} \text{grad} p' \\ \text{div} (\rho_0 V' + \rho' V_0) &= 0, \quad V' \cdot \text{grad} \frac{p_0}{\rho_0^{\kappa}} + V_0 \cdot \text{grad} \left[\frac{p_0}{\rho_0^{\kappa}} \left(\frac{p'}{p_0} - \kappa \frac{\rho'}{\rho_0} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Из граничных условий (1.3) и (1.4) путем линеаризации получаем для параметров со штрихами условия

$$u' = 0, \quad v' = \alpha V_{\infty} \cos \theta, \quad w' = \alpha V_{\infty} \sin \theta, \quad p' = 0, \quad \rho'_z = 0 \quad (2.3)$$

$$u' \frac{\partial F}{\partial x} + v' \frac{\partial F}{\partial y} + w' \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad (2.4)$$

Заметим, что в системе координат x, y, z нулевые члены в выражениях (2.1) будут одними и теми же для различных θ , так как при $\alpha = 0$ граничные условия (1.3) не зависят от θ . В этих координатах уравнение поверхности тела также не зависит от θ .

Обозначим решения уравнений (2.2) при $\theta = 0$ индексом 1 и при $\theta = \frac{1}{2} \pi$ — индексом 2. Эти решения удовлетворяют на бесконечности условиям

$$\begin{aligned} u_1' &= 0, \quad v_1' = V_{\infty}, \quad w_1' = 0, \quad p_1' = 0, \quad \rho_1' = 0 \\ u_2' &= 0, \quad v_2' = 0, \quad w_2' = V_{\infty}, \quad p_2' = 0, \quad \rho_2' = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

и на теле условию (2.4)

Уравнения (2.2) линейные относительно параметров u', v', w', p', ρ' , поэтому функции

$$\begin{aligned} u' &= u_1' \cos \theta + u_2' \sin \theta, \quad v' = v_1' \cos \theta + v_2' \sin \theta, \quad w' = w_1' \cos \theta + w_2' \sin \theta \\ p' &= p_1' \cos \theta + p_2' \sin \theta, \quad \rho' = \rho_1' \cos \theta + \rho_2' \sin \theta \end{aligned} \quad (2.6)$$

будут решениями этих уравнений. Они удовлетворяют также условию на теле (2.4) и граничным условиям на бесконечности (1.3) вследствие равенств (2.5). Следовательно, доказана теорема: если существует решение задачи при $\theta = 0$ и $\theta = \frac{1}{2} \pi$, то существует также решение при любых углах θ , и оно выражается через указанные два решения по формулам (2.6).

3. При обтекании тел сверхзвуковым потоком должны выполняться условия на возникающих ударных волнах. Покажем, что и в этом случае решение представляется в виде (2.6).

Соотношения на скачке в трехмерном течении имеют вид

$$\begin{aligned} -[\rho V_n \mathbf{V}] &= [p] \mathbf{n}, & [\rho V_n] &= 0 \\ -\left[\rho V_n \left(\frac{1}{2} V^2 + \frac{1}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} \right) \right] &= [p V_n] \end{aligned} \quad (3.1)$$

Квадратными скобками обозначены здесь скачки стоящих в скобках величин при переходе через ударную волну, V_n — составляющая скорости по нормали к поверхности скачка.

Пусть $G(x, y, z) = 0$ — уравнение поверхности ударной волны, тогда единичный вектор нормали \mathbf{n} к этой поверхности можно записать в виде

$$\mathbf{n} = \frac{\text{grad } G}{\sqrt{(\text{grad } G)^2}}$$

и тогда $V_n = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$. Вследствие этого соотношения (3.1) представляются в форме

$$\begin{aligned} [\rho \mathbf{V}] \text{grad } G &= 0, & -[\rho (\mathbf{V} \cdot \text{grad } G) \mathbf{V}] &= [p] \text{grad } G \\ -\left[\rho (\mathbf{V} \cdot \text{grad } G) \left(\frac{1}{2} V^2 + \frac{1}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} \right) \right] &= [p \mathbf{V}] \text{grad } G \end{aligned} \quad (3.2)$$

Запишем уравнение поверхности ударной волны при малых α в виде

$$G(x, y, z) = G_0(x, y, z) + \alpha' G'(x, y, z) \quad (3.3)$$

Здесь $G_0(x, y, z) = 0$ уравнение поверхности скачка при $\alpha = 0$, которое в системе координат x, y, z не зависит от угла θ .

Подставим соотношения (3.3) и (2.1) в выражения (3.2), в результате получим для линейных членов

$$\begin{aligned} [\rho_0 \mathbf{V}_0 \text{grad } G' + (\rho_0 \mathbf{V}' - \rho' \mathbf{V}_0) \text{grad } G_0] &= 0 \\ [- (\rho' \mathbf{V}_0 \text{grad } G_0 + \rho_0 \mathbf{V}' \text{grad } G_0 + \rho_0 \mathbf{V}_0 \text{grad } G') \mathbf{V}_0] - \\ - [\rho_0 (\mathbf{V}_0 \text{grad } G_0) \mathbf{V}'] &= [p'] \text{grad } G_0 + [p_0] \text{grad } G' \\ - \left[(\rho' \mathbf{V}_0 - \rho_0 \mathbf{V}') \text{grad} \left(\frac{1}{2} V_0^2 + \frac{1}{\kappa-1} \frac{p_0}{\rho_0} \right) \right] - \\ - \left[\rho_0 \mathbf{V}_0 \cdot \text{grad} \left(\mathbf{V}_0 \mathbf{V}' + \frac{1}{\kappa-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left(\frac{p'}{p_0} - \frac{\rho'}{\rho_0} \right) \right) \right] &= \\ = [p_0 \mathbf{V}_0] \text{grad } G' + [p_0 \mathbf{V}' + p' \mathbf{V}_0] \text{grad } G_0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

В первое уравнение системы (3.4) подставим решение (2.6)

$$[\rho_0 \mathbf{V}_0 \text{grad } G' + (\rho_0 \mathbf{V}'_1 - \rho' \mathbf{V}_0) \text{grad } G_0 \cos \theta + \sin \theta (\rho_0 \mathbf{V}'_2 - \rho_2' \mathbf{V}_0) \times \text{grad } G_0] = 0 \quad (3.5)$$

Если взять функцию G' в виде

$$G' = G'_1 \cos \theta + G'_2 \sin \theta \quad (3.6)$$

где G'_1 и G'_2 — функции, дающие решение при $\theta = 0$ и $\theta = 1/2 \pi$, то уравнение (3.5) тождественно удовлетворяется, так как величины с индексами 1 и 2 удовлетворяют соотношениям (3.4). Точно также можно показать, что и остальные уравнения (3.4) удовлетворяются, если решение при любом угле θ взять в виде (2.6) с формой ударной волны (3.3), (3.6).

4. Обозначим через Y и Z силы, действующие соответственно по осям y и z . Вследствие (2.6) они будут иметь вид

$$Y = Y_0 + \alpha (Y_1' \cos \theta + Y_2' \sin \theta), \quad Z = Z_0 + \alpha (Z_1' \cos \theta + Z_2' \sin \theta) \quad (4.1)$$

Здесь индексы имеют те же значения, что и выше.

Составляющие N и R аэродинамической силы, действующие соответственно по осям y' и z' выражаются через Y и Z по формулам

$$N = Y \cos \theta + Z \sin \theta, \quad R = Z \cos \theta - Y \sin \theta \quad (4.2)$$

Подставив (4.1) в (4.2), получим (4.3)

$$N = Y_0 \cos \theta + Z_0 \sin \theta + \alpha [N_1' \cos^2 \theta + N_2' \sin^2 \theta + (R_1' - R_2') \sin \theta \cos \theta]$$

$$R = Z_0 \cos \theta - Y_0 \sin \theta + \alpha [R_1' \cos^2 \theta + R_2' \sin^2 \theta + (N_2' - N_1') \sin \theta \cos \theta]$$

Здесь

$$N_1' = Y_1', \quad N_2' = Z_2', \quad R_1' = Z_1', \quad R_2' = -Y_2'$$

Формулы (4.3) дают выражение нормальной и боковой сил при любом угле крена через их значения при $\theta = 0$ и $\theta = 1/2 \pi$.

Рассмотрим тела, имеющие симметрию поворота на угол $\Delta\theta = 2\pi/n$ (n — целое число). Тогда при повороте тела на угол крена, равный $\theta_i = i2\pi/n$, должны выполняться равенства: $N(\theta_i) = N(0)$, $R(\theta_i) = R(0)$. Вследствие этого из соотношений (4.3) получаются уравнения

$$(N_2' - N_1') \sin^2 \theta_i + (R_2' - R_1') \sin \theta_i \cos \theta_i = 0$$

$$(N_2' - N_1') \cos \theta_i \sin \theta_i + (R_2' - R_1') \sin^2 \theta_i = 0$$

При $n > 2$ эти уравнения имеют только нулевое решение и формулы (4.3) принимают тогда вид

$$N = \alpha N_1', \quad R = \alpha R_1' \quad (4.4)$$

Следовательно, в этом случае нормальная и боковая силы не зависят от угла крена.

Если тело имеет еще зеркальную симметрию, например при $\theta = 0$, то $R_1' = 0$ и вследствие (4.4) имеем: $R = 0$ при любом угле крена.

Полученные результаты можно обобщить на случай гармонических колебаний тел.

Поступила 4 VIII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. С т о у н А. Движение конуса со сверхзвуковой скоростью под малым углом атаки. В сб.: «Газовая динамика». М., Изд-во иностр. лит., 1950, стр. 239—259.
2. К о л о д о ч к и н В. П. Расчет сверхзвукового обтекания заостренных тел вращения на углах атаки. Изв. АН СССР, отд. техн. н., 1962, № 1.
3. Т е л е н и н Г. Ф., Л и п н и ц к и й Ю. М. Нестационарное сверхзвуковое обтекание затупленных тел с отошедшей ударной волной. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 4.
4. S p r e i t e r I. R. The aerodynamic forces on slender plane and cruciform — wing and body combinations, NASA Rep., 1950, No. 962.
5. Ш у р ы г и н В. М. V-образные крылья в сверхзвуковом потоке. В Сб. теоретических работ по аэродинамике. М., Оборонгиз, 1957, стр. 371—425.