МОМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ДВУСТОРОННЕМ ТРАНСПОРТНОМ ПОТОКЕ

Г. П. Солдатов

(Саратов)

Рассматриваются два уравнения неразрывности, описывающие симметричный двусторонний поток автомашин. На основе указанных уравнений методом Римана находится момент возникновения ударной волны.

В настоящее время большое внимание уделяется теоретическому анализу транспортных потоков: строится теория транспортных потоков на основе движения дискретных объектов (часто называемых автомашинами), математической статистики [1,2], классической механики [3-5] и статистической механики [6]. В обзорной статье [5] обсуждаются работы, использующие гидродинамическую аналогию транспортного потока. Работы ведутся по двум направлениям. Первое базируется на кинематической волновой теории, второе — на соотношении Гринберга для непрерывных транспортных потоков. Кинематические волны, движущиеся в направлении, обратном движению транспортного потока, и их отличие от динамических волн рассмотрены в работе [3].

В предлагаемой работе используется гидродинамическая модель двустороннего транспортного потока. Транспортный поток в этой модели описывается двумя уравнениями неразрывности и двумя эмпирическими соотношениями между скоростями и плотностями потока автомашин, движущихся в двух противоположных направлениях. Гидродинамическая модель транспортного потока позволяет предсказать образование ударных волн и анализировать многочисленные случаи движения ударных волн в потоке. Основные свойства транспортного потока установлены в работе [4].

Ниже рассматривается распространение волны по области однородного движения. Предполагается, что начальное распределение плотности потока имеет разрыв производной по направлению, в силу чего происходит пересечение фронта волны с одноименными характеристиками. Момент t_* образования области неоднозначности подсчитывается методом [7] отображения потока на себя, при этом точки пересечения характеристик одного и того же семейства оказываются критическими точками отображения.

1. Уравнения двустороннего потока. Пусть p и q — плотности потока автомашин, а u и v — средние скорости направо — и налево — движущихся машин соответственно, так что

$$\varphi = pu \geqslant 0, \quad u \geqslant 0; \qquad \Psi = qv \leqslant 0, \quad v \leqslant 0$$

Двусторонний транспортный поток описывается уравнениями неразрывности

$$p_t + \varphi_x = 0, \qquad q_t + \Psi_x = 0 \tag{1.1}$$

соотношениями $u = f(p, q)$, $v = g(p, q)$, предполагаемыми известными из эксперимента [4,5]. Функции f и g обладают следующими свойствами:

f — монотонно убывающая функция, g — монотонно возрастающая функция; для каждого q (P) имеется значение $P(q)$, при котором $u = 0$ $(v = 0)$;
$f(p, q) = -g(p, q)$ — условие симметрии потоков.

В плоскости годографа уравнения (1.1) примут вид

$$x_q - (pu)_p t_q + pu_q t_p = 0, \qquad x_p - (qv)_q t_p + qv_p t_q = 0$$

Запишем уравнения (1.1) в матричной форме

$$U_t + AU_x + B = 0$$

$$U = \begin{Bmatrix} p \\ q \end{Bmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} (pu)_p & pu_q \\ qV_p & (qV)_q \end{pmatrix}, \qquad B \equiv 0$$

Пусть $\lambda^{1,2}$ — собственное значение, а $L^{1,2}$ — собственный вектор матрицы A, тогда

$$\lambda^{1,2} = {}^1/_2\,[(pu)_p + (qv)_q] \pm {}^1/_2\,R$$
$$R^2 = [(pu)_p - (qv)_q]^2 + 4_{pq}\,u_q v_p$$
$$L^{1,2} = ([(pu)_p - (qv)_q] \pm R \quad 2pu_q)$$

Кроме того, в плоскости годографа

$$\mu^{1,2} = \frac{dq}{dp} = \frac{[-[(pu)_p - (qv)_q] \pm R}{2_p u_q}$$

2. Выражение для критического момента t_* [7]. Пусть $\Phi\,(t,\,x)$ — волновой фронт. Введем координаты t' и Φ, полагая

$$t' = t,\ \Phi_t + \lambda^{\Phi}\,\Phi_x = 0$$

где λ^{Φ} — собственное значение, соответствующее фронту волны. Тогда, умножив матричное уравнение на вектор L^i, получим

$$L^i\left(x_{\Phi}\frac{\partial}{\partial t'} + (\lambda^i - \lambda^{\Phi})\frac{\partial}{\partial\Phi}\right)U = 0$$
$$L^{\Phi}U_{t'} = 0, \quad \text{если } \lambda^i = \lambda^{\Phi}$$

Пусть

$$\Pi = [U_{\Phi}]_+^- = U_{\Phi}\Big|_{\Phi=0_-} - U_{\Phi}\Big|_{\Phi=0_+}, \qquad X = [x_{\Phi}]_+^-$$

и индекс 0 относится к постоянным условиям впереди фронта волны, тогда из предыдущих условий вытекает

$$L_0{}^i\Pi = 0, \quad \lambda^i \neq \lambda^{\Phi}; \quad L_0{}^{\Phi}\Pi_{t'} = 0, \quad \lambda^i = \lambda^{\Phi}, \quad i = \Phi = 1 \tag{2.1}$$

Решение уравнений (2.1) представим в виде

$$\Pi = \begin{Bmatrix}\Pi_1\\ \Pi_2\end{Bmatrix} = \Pi_1{}^*\begin{Bmatrix}1\\ \mu_1\end{Bmatrix} \qquad (\Pi_1{}^* = \lim_{t\to 0}\Pi_1)$$

Рассмотрим выражение

$$\frac{\partial}{\partial t'}\,x_{\Phi} = (\nabla_u\,\lambda^{\Phi})\,U_{\Phi}$$

где ∇_u — градиентный оператор в U-пространстве. Вдоль $\Phi = 0$ имеем

$$X_{t'} = (\nabla_u\ \lambda^{\Phi})_0\,\Pi$$

или

$$X = X^* + \int_0^t (\nabla_u\ \lambda^{\Phi})_0\Pi\,dt'$$

Следовательно, момент t_* определяется соотношением

$$0 = x_{\Phi}{}^* + \int_0^{t_*} (\nabla_u\lambda^{\Phi})_0\,\Pi\,dt' \tag{2.2}$$

Подставим

$$(\nabla_u\lambda^{\Phi})_0 = \Pi_1{}^*\left(\frac{\partial\lambda^1}{\partial p} + \mu^1\frac{\partial\lambda^1}{\partial q}\right)$$

в выражении (2.2), получим

$$\frac{1}{t_*} = -\,p_x{}^*\left(\frac{\partial\lambda^1}{\partial p} + \mu^1\frac{\partial\lambda^1}{\partial q}\right)$$

Автор благодарит С. В. Фальковича за интерес к работе и замечания.

Поступила 6 XII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. H e r m a n n R. Theory of traffic flow. Elsevier Edit., N. Y, 1961.
2. H a i g h t F. A. Mathematical theories of traffic flow. N. Y. — London, Acad. Press, 1963.
3. L i g h t h i l l M. J., W h i t h a m G. B. On kinematic waves. 1. A theory of traffic flow on long crowded roads. 2. A theory of traffic flow on long crowded roads Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1955, vol. 229, No. 1178.
4. B i c k J. H., N e w e l l G. F. A continuum model for two-directional traffic flow. Quart. Appl. Math., 1960, vol. 18, No. 2, pp. 191—204.
5. F o r t e t R. La circulation des voitures sur une route ou dans les arteres d'une ville, a partir des lois de l'hydraulique. Houille Blanche, 1963, vol. 18, No. 8, pp. 909—914.
6. P r i g o g i n e I., H e r m a n R., A n d e r s o n R. Further developments in the Boltzmannlike theory approach of traffic flow. Commun. au II Symp. Int. sur la Théorie du Traffic., Londres, 1963.
7. J e f f r e y A., T a n i u t i T. Non — linear wave propagation. With application ohysics and magnetohydrodynamics. N. Y. Acad. Press, 1964.

ОБТЕКАНИЕ НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ ПОТОКОМ ГАЗА ПРИ МАЛЫХ УГЛАХ АТАКИ

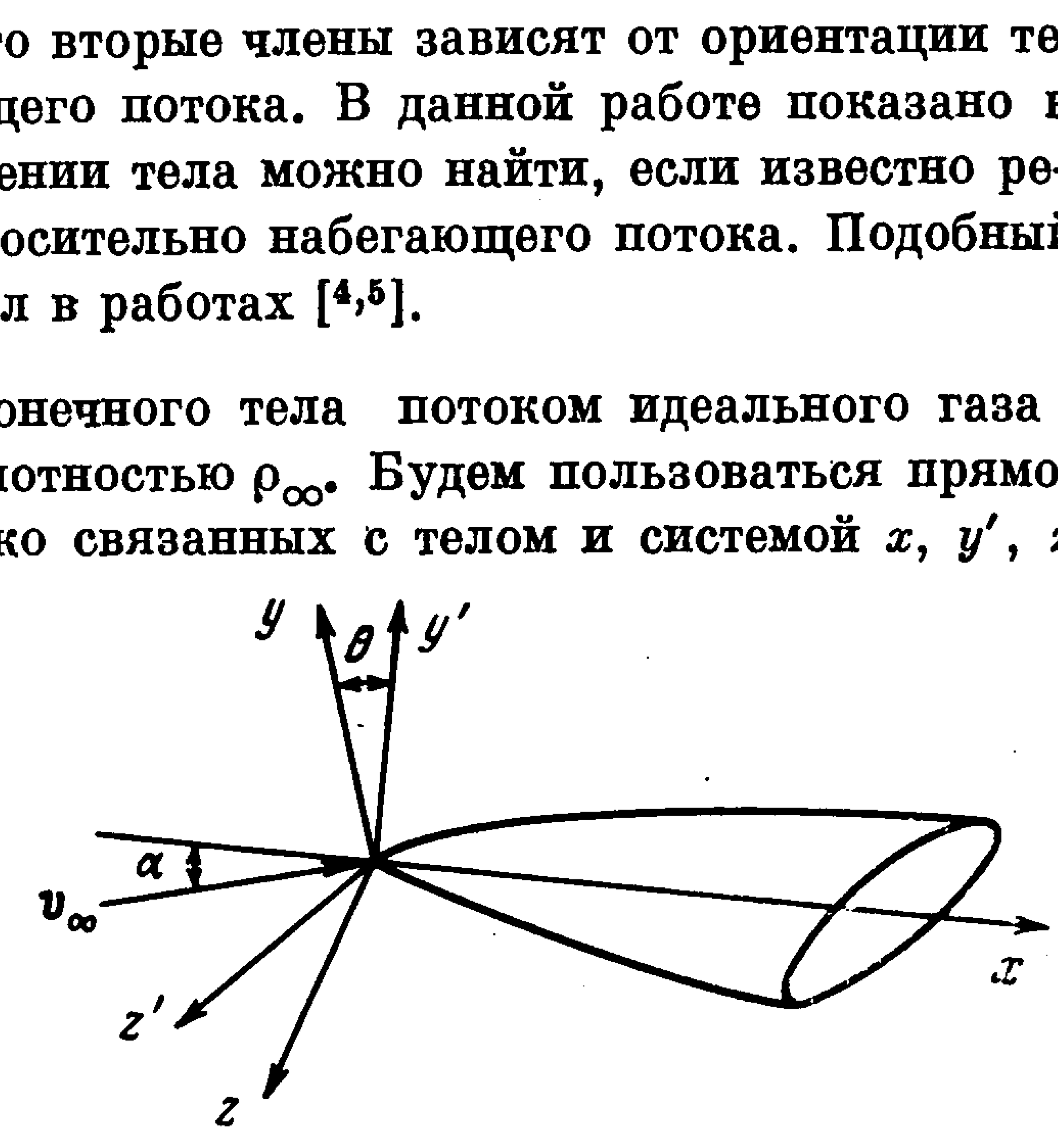
В. Н. Михайлов

(Москва)

В исследованиях обтекания тел при малых углах атаки α широко используется теория малых возмущений, когда решение уравнений ищется в виде суммы двух членов, первый из которых дает решение при $\alpha = 0$, а второй — пропорционален α. Если линеаризация осуществляется около невозмущенного потока, то для вторых членов получаются линейные уравнения с постоянными коэффициентами. Эта теория верна для тонких тел и крыльев. В случае толстых тел или поверхностей используется линеаризация около известного возмущенного потока, например около осесимметричного течения [1-3], при этом коэффициенты линейных уравнений для вторых членов зависят от первых членов разложения в ряд по α.

Если тело не имеет осевой симметрии, то вторые члены зависят от ориентации тела относительно вектора скорости набегающего потока. В данной работе показано в этом случае, что решение при любом положении тела можно найти, если известно решение только для двух положений тела относительно набегающего потока. Подобный результат получен для отдельных тонких тел в работах [4,5].

1. Рассмотрим обтекание некоторого конечного тела потоком идеального газа с постоянной скоростью V_∞, давлением p_∞, плотностью ρ_∞. Будем пользоваться прямоугольной системой координат x, y, z, жестко связанных с телом и системой x, y', z' такой, что вектор скорости набегающего потока лежит в плоскости осей x, y' (фигура). Эти две системы связаны соотношениями



$$y' = y \cos\theta + z \sin\theta$$
$$z' = -y \sin\theta + z \cos\theta \qquad (1.1)$$

Здесь θ — угол между осями y и y' (угол крена).

Угол между вектором скорости набегающего потока и осью x обозначим через α (угол атаки).