О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПЛОСКИХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЛ

В. П. Сдобырев

(Москва)

Если представлять геометрические тела в виде плоских или пространственных систем, состоящих из шарнирно-стержневой или жесткой бесшарнирной решетки, и рассматривать при этом просветы и пересечения, образующиеся в плоском поле, можно установить закономерности между элементами их структуры.

Пространственные тела можно рассматривать в виде их проекций на плоскость. Для дальнейшего условимся рассматривать такие проекции, чтобы полное совпадение проекций отдельных элементов было исключено.

Между элементами плоских и пространственных тел существует некоторая зависимость, которую можно установить, например, методом математической индукции.

1. Исходные предпосылки. Для дальнейшего условимся в следующих понятиях:

под стержнями будем понимать прямолинейные или криволинейные тела, одно измерение которых велико по сравнению с другими, обладающие тремя степенями свободы в плоскости и пятью в пространстве;

под дисками — тела или геометрически неизменяемые звенья, обладающие тремя степенями свободы в плоскости и шестью в пространстве;

под бесшарнирными (свободными) пересечениями — области или точки соприкосновения элементов (дисков, стержней или тех и других);

под шарнирными пересечениями — бесшарнирные с введением в них шарниров;

под просветами — отдельные замкнутые области внутри общего контура системы, которые берутся непосредственно подсчетом в свету.

Полагаем, что просветы могут быть любой формы, например в виде одноугольника (область, ограниченная замкнутой кривой с одним острым или тупым углом), двуугольника (область, ограниченная замкнутой кривой с двумя острыми или тупыми углами или тем и другим), треугольника, многоугольника и безугольника (область, ограниченная замкнутой кривой с плавными переходными участками от одной кривизны к другой).

2. Плоские и пространственные тела. Зависимость между элементами геометрической структуры моделей плоских и пространственных свободных тел в общем виде может быть представлена следующим образом:

$$M - n_p^\times - \gamma = {}^1/_3\ (n_p^\circ + S_0 + \rho - 2n_0 - 3\ d) \tag{2.1}$$

$$n_p^\times = 1n_2^\times + 2n_3^\times + \ldots + (k - 1)\ n_k^\times \tag{2.2}$$

Здесь M — число просветов, $n_p^\times$ — приведенное число бесшарнирных (свободных) пересечений, причем $n_k^\times$ — число k — кратных свободных пересечений, k — число концов элементов, образующих свободное пересечение, γ — число свободных тел, систем или элементов. (Под свободными элементами подразумеваются незакрепленные с неподвижным основанием сочетания дисков, шарниров (точек) и стержней (линий прямолинейных или криволинейных, образованных бесшарнирными, шарнирными пересечениями или теми и другими вместе.)

$$n_p^\circ = (0-1)\ n_0^\circ + (1 - 1)\ n_1^\circ + 1n_2^\circ + \ldots + (k - 1)\ n_k^\circ \tag{2.3}$$

n_p° — приведенное число узловых или шарнирных пересечений, где n_k° — число k-кратных узловых или шарнирных пересечений, k — число концов элементов, образующих узловое или шарнирное пересечение, S_0 — число стержней модели геометрического тела, число составных линий геометрической фигуры или ребер многогранников, входящих в остов модели, $\rho = \rho_n + \rho' = 2\rho_0' + 3\rho_0$; ρ — общее число внутренних связей, ρ_n — число внутренних связей по шарнирным сечениям, ρ' — число внутренних связей по дисковым сечениям, ρ_0 — число необходимых разрезов по дисковым сечениям для полного исключения отдельных замкнутых контуров (просветов)

ρ_0' — число необходимых разрезов по шарнирно-дисковым сечениям, n_0 — число простых шарниров (относится исключительно к узлам стержневой решетки), геометрических точек, узлов или вершин многогранников, d — число дисков.

Преобразуем зависимость (2.1) следующим образом:

$$\gamma^{-1}\,[M - n_p^{\times} - {}^1/_3(n_p^0 + S_0 + \rho - 2n_0 - 3d)] = \text{const} = 1 \qquad (2.4)$$

После введения обозначений

$$M_{p\gamma} = M - n_p^{\times},\ M_p = {}^1/_3\ (n_p^{\circ} + S_0 + \rho - 2n_0 - 3d)$$

где $M_{p\gamma}$ — приведенное число плоских графов, M_p — приведенное число просветов, зависимость (2.1) представится в виде

$$\gamma^{-1}\,(M_{p\gamma} - M_p) = \text{const} = 1 \qquad (2.5)$$

Сформулируем эту зависимость в виде теоремы.

Теорема. Для моделей плоских и пространственных геометрических тел отношение разности приведенного числа плоских графов $M_{p\gamma}$ и приведенного числа просветов M_p к числу этих тел γ является величиной постоянной и равной единице.

Для доказательства соотношения (2.1) — (2.5) был использован метод математической индукции. (Доказательство в данной работе не приводится.)

Следствие. Легко убедиться в том, что для шарнирно-стержневых моделей, когда [1]

$$\rho = d = 0,\quad 2M_p = n_p^{\circ} - n_0,\qquad 2S_0 = n_p^{\circ} + n_0$$

зависимость (2.1) представится следующим образом:

$$M_p' = M - n_p^{\times} - \gamma = S_0 - n_0 = n_p^{\circ} - S_0 = {}^1/_2\ (n_p^{\circ} - n_0) \qquad (2.6)$$

Для моделей геометрических тел, представленных в виде систем с жесткой решеткой (костяк систем без шарниров, при этом $S_0 = n_0 = n_p^{\circ} = 0$), зависимость (2.1) будет иметь вид

$$M_p'' = M - n_p^{\times} - \gamma = \rho_0 - d \qquad (2.7)$$

Ясно, что в обоих случаях для одной и той же модели (или группы) имеет место равенство приведенных просветов

$$M_p = M_p' = M_p'' \qquad (2.8)$$

Если ограничиться рассмотрением выпуклых многогранников при $\gamma = 1$, то, исходя из равенства (2.8) и формулы Декарта — Эйлера [2,3] для числа граней Г

$$\Gamma = S_0 - n_0 + 2 \qquad (2.9)$$

нетрудно убедиться в том, что разность $M - n_p^{\times}$ представляет собой приведенное число плоских графов или число граней выпуклого многогранника без одной

$$M - n_p^{\times} = \Gamma - 1,\qquad \Gamma = M - n_p^{\times} + 1 \qquad (2.10)$$

Отсюда следует, что, когда $\gamma > 1$

$$\Gamma = M - n_p^{\times} + \gamma = M_p + 2\gamma \qquad (2.11)$$

Из сравнения формул (2.8) и (2.11) следуют и другие зависимости для числа граней выпуклых многогранников

$$\Gamma = M_p + 2\gamma = S_0 - n_0 + 2\gamma = n_p^{\circ} - S_0 + 2\gamma = \\ = {}^1/_2\ (n_p^0 - n_0) + 2\gamma = \rho_0 - d + 2\gamma \qquad (2.12)$$

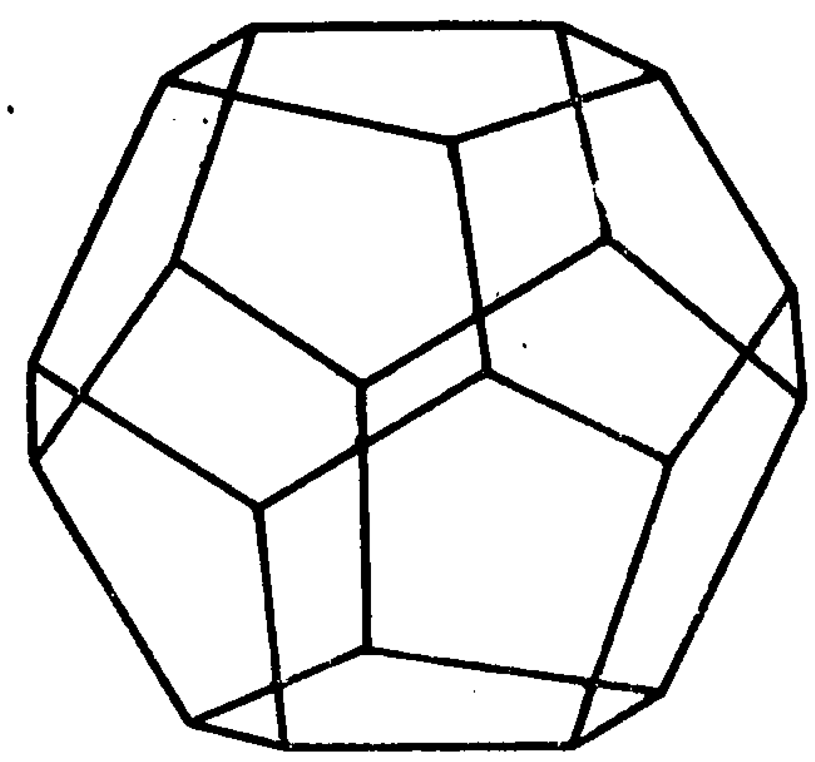
(Первые три из этих соотношений (2.12) были установлены в 1953 г. [1]).

Очевидно, что в случае взаимного самопроектирования моделей выпуклых многогранников формула для числа граней представится следующим образом

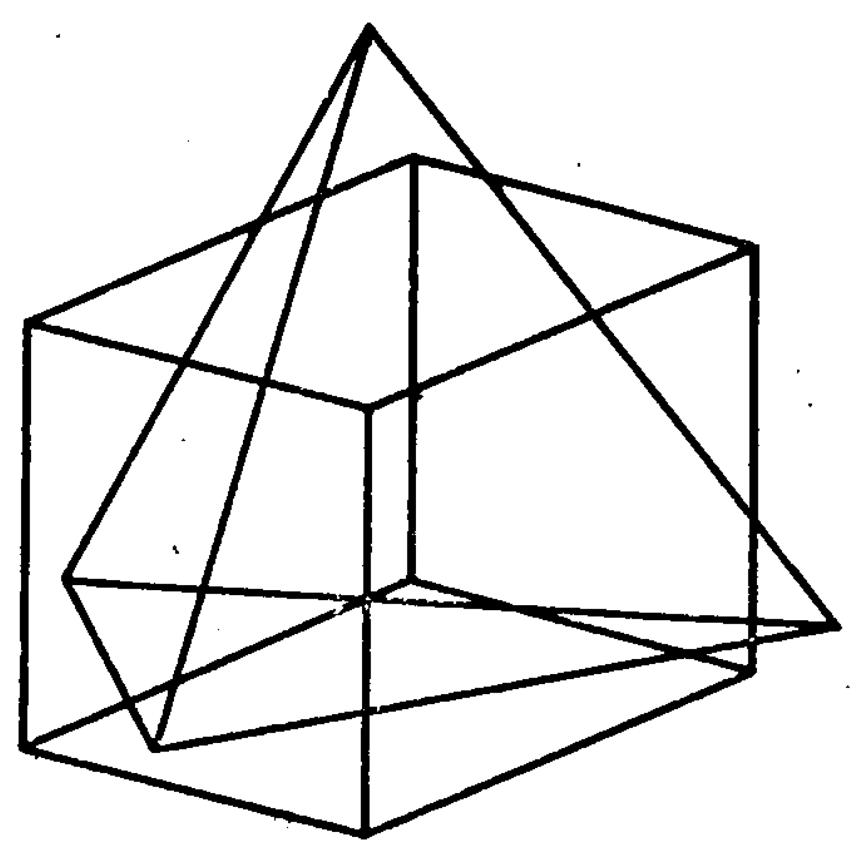
$$\Gamma = M_p + 2\gamma' \qquad M_p = M - n_p^{\times} - \gamma,\quad \gamma' \geqslant \gamma \qquad (2.13)$$

Здесь γ—число свободных элементов (число отдельных сочетаний различных геометрических элементов), γ' — число отдельных многогранников.

Если $\gamma' = \gamma$, формула (2.13) переходит в формулу (2.12). В качестве иллюстрации приводим примеры.



Фиг. 1



Фиг. 2

Пример 1. Для модели додекаэдра, представленной на фиг. 1, имеем

$$M = 19, \; n_p^{\times} = 8, \; \gamma = 1, \; n_p^{\circ} = 40, \; S_0 = 30, \; n_0 = 20$$
$$\min \rho_0 = 19, \; \min d = 9$$

Согласно соотношениям (2.11) и (2.12) для числа граней находим

$$\Gamma = 19-8 + 1 = 30-20 + 2 = 40-30 + 2 = {}^1/_2\,(40-20) + 2 = 19-9 + 2 = 12$$

Пример 2. Проведем проверку соотношения (2.13) для случая взаимного самопроектирования двух многогранников — тетраэдра и гексаэдра (фиг. 2). Здесь

$$M = 25, \qquad n_2^{\times} = 16, \qquad n_3^{\times} = 1$$

согласно зависимости (2.2)

$$n_p^{\times} = 1 \cdot n_2^{\times} + 2n_3^{\times} = 1 \cdot 16 + 2 \cdot 1 = 18$$
$$\gamma = 1, \; \gamma' = 2, \; n_p^{\circ} = 24, \; S_0 = 18, \; n_0 = 12, \; \min \rho_0 = 25, \; \min d = 19$$

Предварительно установим значение числа приведенных просветов M_p из соотношения (2.8)

$$M_p = 25-18-1 = 18-12 = 24-18 = {}^1/_2\,(24-12) = 25-19 = 6$$

Согласно соотношению (2.13) для граней находим

$$\Gamma = M_p + 2\gamma' = 6 + 4 = 10$$

Поступила 24 VI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Сдобырев В. П. Критерий неизменяемости плоских и пространственных систем. Инж. сб., 1953, т. 15, стр. 187—190.
2. Курант Р., Робинс Г. Что такое математика? М., «Просвещение», 1967, стр. 267.
3. Эйлер Л. Сборник статей в честь 250-летия со дня рождения, представленный АН СССР. М., Изд-во АН СССР, стр. 150—158.