О ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ФАЗОВЫЕ КООРДИНАТЫ

А. С. Семенов, В. А. Троицкий

(Ленинград)

Рассматриваются задачи оптимизации процессов управления с ограничениями на фазовые координаты первого и более высоких порядков [1-3]. Устанавливается условие, облегчающее определение точки схода фазовой траектории с границы области допустимых изменений координат.

1. Постановка задачи. В работах [2,4] изучалась задача: среди непрерывных функций $x_s(t)$, $(s = 1,\dots, n)$, имеющих кусочно-непрерывные производные $x_s^{\cdot}(t)$, и среди кусочно-непрерывных управлений $u_k(t)$, $(k = 1,\dots, m)$, удовлетворяющих: на отрезке $[t_0, T]$ дифференциальным уравнениям

$$g_s = x_s^{\cdot} - f_s(x, u, t) = 0 \qquad (s = 1,\dots n) \tag{1.1}$$

соотношениям

$$\psi_k = \psi_k(x, u, t) = 0 \quad (k = 1,\dots, r < m) \tag{1.2}$$

неравенству

$$\vartheta(x) \leqslant 0 \tag{1.3}$$

на концах отрезка $[t_0, T]$ — условиям

$$\varphi_l = \varphi_l[x(t_0), t_0, x(T), T] = 0 \quad (l = 1,\dots, p \leqslant 2n + 1) \tag{1.4}$$

найти такие, которые минимизируют функционал

$$I = g[x(t_0), t_0, x(T), T] + \int_{t_0}^{T} f_0(x, u, t)\, dt \tag{1.5}$$

Здесь через x и u обозначены совокупности фазовых координат $x_1,\dots x_n$ и управлений $u_1,\dots u_m$.

Оптимальная траектория в таких задачах может иметь участки, принадлежащие границе области, задаваемой неравенством (1.3). В дальнейшем изучаются в основном эти участки.

Если участок траектории на отрезке $[t_1, t_2]$ принадлежит границе области (1.3), то этот факт можно описать двумя способами. Во-первых, можно считать, что $\vartheta = 0$ при $t \in [t_1, t_2]$. Подчеркнем, что здесь $\vartheta = 0$ при $t = t_1$. Во-вторых, можно полагать, что $\vartheta = 0$ при $t = t_1$, а при $t \in [t_1, t_2]$ выполняется равенство

$$\vartheta_1 = \frac{d\vartheta}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial\vartheta}{\partial x_s} f_s = 0 \tag{1.6}$$

Это может иметь место лишь тогда, когда ϑ_1 явно зависит от параметров управления, так что $\vartheta_1 = \vartheta_1(x, u, t)$. Ограничения, обладающие этим свойством, принято называть ограничениями на координаты первого порядка [3].

Если функции

$$\vartheta_1,\ \vartheta_2 = \frac{d\vartheta_1}{dt} = \frac{\partial\vartheta_1}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial\vartheta_1}{\partial x_s} f_s,\ \dots,\ \vartheta_{q-1} = \frac{d\vartheta_{q-2}}{dt} = \frac{\partial\vartheta_{q-2}}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial\vartheta_{q-2}}{\partial x_s} f_s$$

не зависят явно от управлений, а функция

$$\vartheta_q = \frac{\partial\vartheta_{q-1}}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial\vartheta_{q-1}}{\partial x_s} f_s$$

явно от них зависит. то ограничение называется ограничением на координаты q-го порядка [3].

2. Ограничения первого порядка. Если граница области (1.3) описывается первым способом и считается, что $\vartheta = 0$ при $t \in [t_1, t_2]$ и при $t = t_1$, то введенный в статье [2] функционал I будет иметь вид

$$I = \varphi + \int\limits_{t_0}^{T} \Big[\sum_{s=1}^{n} \lambda_s^{(1)} x_s^{\cdot} - H^{(1)} - \alpha_0 (\vartheta + u_{m+1}^2)\Big] dt + \nu_0 \vartheta [x(t_1)] \tag{2.1}$$

$$H^{(1)} = -f_0 + \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^{(1)} f_s + \sum_{k=1}^{r} \mu_k^{(1)} \psi_k, \qquad \varphi = g + \sum_{l=1}^{p} \rho_l \varphi_l \tag{2.2}$$

Здесь введено дополнительное управление u_{m+1} и построено вспомогательное соотношение $\vartheta + u_{m+1}^2 = 0$, позволяющее учесть ограниченность области допустимых изменений фазовых координат.

Второй способ описания границы приводит к следующему функционалу:

$$I = \varphi + \int\limits_{t_0}^{T} \Big[\sum_{s=1}^{n} \lambda_s^{(2)} x_s^{\cdot} - H^{(2)} - \alpha_1 \vartheta_1\Big] dt + \nu_1 \vartheta [x(t_1)] \tag{2.3}$$

Входящая в него функция $H^{(2)}$ определяется формулой, получающейся из первого соотношения (2.2) заменой верхнего индекса.

Если составить необходимое условие стационарности и выполнить обычные для вариационного исчисления выкладки, то в первом случае получатся уравнения

$$\lambda_s^{\cdot(1)} = \frac{\partial f_0}{\partial x_s} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(1)} \frac{\partial f_i}{\partial x_s} - \sum_{i=1}^{r} \mu_i^{(1)} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_s} - \alpha_0 \frac{\partial \vartheta}{\partial x_s} \quad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.4}$$

$$-\frac{\partial f_0}{\partial u_k} + \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^{(1)} \frac{\partial f_s}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^{r} \mu_i^{(1)} \frac{\partial \psi_i}{\partial u_k} = 0 \quad (k = 1, \ldots, m)$$

Во втором случае они заменятся следующими уравнениями:

$$\lambda_s^{\cdot(2)} = \frac{\partial f_0}{\partial x_s} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(2)} \frac{\partial f_i}{\partial x_s} - \sum_{i=1}^{r} \mu_i^{(2)} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_s} - \alpha_1 \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_s} \quad (s = 1, \ldots, n)$$

$$-\frac{\partial f_0}{\partial u_k} + \sum_{s=1}^{n} \left(\lambda_s^{(2)} + \alpha_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial x_s}\right) \frac{\partial f_s}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^{r} \mu_i^{(2)} \frac{\partial \psi_i}{\partial u_k} = 0 \quad (k = 1, \ldots, m) \tag{2.5}$$

Здесь использовано соотношение

$$\frac{\partial \vartheta_1}{\partial u_k} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_s} \frac{\partial f_s}{\partial u_k} \qquad (k = 1, \ldots, m) \tag{2.6}$$

и выписана лишь используемая в дальнейшем часть развернутого условия стационарности.

Решение задачи оптимизации не зависит от способа описания граничных участков интегральных кривых. Функции x_s и u_k, удовлетворяющие уравнениям (2.4) и (2.5), не должны различаться. Для выполнения этого условия нужно, чтобы были справедливы равенства

$$\lambda_s^{(1)} = \lambda_s^{(2)} + \alpha_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial x_s} \quad (s = 1, \ldots, n), \qquad \mu_k^{(1)} = \mu_k^{(2)} \quad (k = 1, \ldots, r)$$

$$\alpha_0 = -\frac{d\alpha_1}{dt} \tag{2.7}$$

Особое значение имеет последнее из них. Отметим здесь, что анализ условий сопряжения для точек $t = t_1$ и $t = t_2$, которые имеют вид

$$\lambda_s^{(1)}(t_1-0)=\lambda_s^{(1)}(t_1+0)-\nu_0(\partial\vartheta/\partial x_s)_{t_1}$$

$$\lambda_s^{(2)}(t_1-0)=\lambda_s^{(2)}(t_1+0)-\nu_1(\partial\vartheta/\partial x_s)_{t_1}$$

$$\lambda_s^{(1)}(t_2-0)=\lambda_s^{(1)}(t_2+0), \qquad \lambda_s^{(1)}(t_1-0)=\lambda_s^{(2)}(t_1-0)$$

$$\lambda_s^{(2)}(t_2-0)=\lambda_s^{(2)}(t_2+0), \qquad \lambda_s^{(1)}(t_2+0)=\lambda_s^{(2)}(t_2+0)$$

приводит к соотношениям

$$\alpha_1(t_2)=0, \qquad \alpha_1(t_1)=\nu_0-\nu_1 \tag{2.8}$$

Рассмотрим теперь неравенство Клебша. Нетрудно установить, что при первом способе описания граничных участков оно запишется в форме

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 H^{(1)}}{\partial u_i\,\partial u_k}\delta u_i\delta u_k+2\alpha_0(\delta u_{m+1})^2\leqslant 0$$

Если положить в нем $\delta u_i = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ и $\delta u_{m+1} \neq 0$, то получится неравенство $2\alpha_0(\delta u_{m+1})^2 \leqslant 0$; отсюда найдем

$$\alpha_0\leqslant 0 \tag{2.9}$$

Если воспользоваться последним из соотношений (2.7), то на основании (2.9) будем иметь

$$d\alpha_1/dt\geqslant 0 \tag{2.10}$$

Неравенство (2.10) и условие (2.8) могут оказаться полезными при нахождении момента $t = t_2$ схода оптимальной траектории с границы области (1.3).

3. Ограничения q-го порядка. При наличии в задаче ограничений q-го порядка граничные участки оптимальной траектории можно описать $q + 1$-эквивалентными способами. Действительно, чтобы изображающая точка находилась на границе области (1.3) на отрезке $[t_1, t_2]$, достаточно потребовать выполнения j равенств $\vartheta_i = 0$ $(i = 0, 1, \ldots, j \leqslant q - 1)$ $(\vartheta_0 = \vartheta)$ при $t = t_1$ и лишь соотношения $\vartheta_{j+1} = 0$ при $t \in [t_1, t_2]$.

В каждом из этих способов функционал I будет иметь вид

$$I_i=\varphi+\int_{t_0}^{T}\left[\sum_{s=1}^{n}\lambda_s^{(i)}x_s^{\cdot}-H^{(i)}-\alpha_i\vartheta_i\right]dt+\sum_{k=0}^{i-1}\nu_k\vartheta_k[x(t_1),t_1]] \qquad (i=1,\ldots,q) \tag{3.1}$$

При $i = 0$ этот функционал запишется в форме (2.1). Формулы, определяющие $H^{(i)}$, получаются из первого соотношения (2.2) при помощи надлежащей замены верхних индексов. Развернув необходимое условие стационарности, найдем следующие уравнения:

$$\begin{gathered}\lambda_s^{(i)\cdot}=\frac{\partial f_0}{\partial x_s}-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(i)}\frac{\partial f_k}{\partial x_s}-\sum_{k=1}^{r}\mu_k^{(i)}\frac{\partial\psi_k}{\partial x_s}-\alpha_i\frac{\partial\vartheta_i}{\partial x_s} \qquad (s=1,\ldots,n)\\ -\frac{\partial f_0}{\partial u_k}+\sum_{s=1}^{n}\left(\lambda_s^{(i)}+\alpha_i\frac{\partial\vartheta_{i-1}}{\partial x_s}\right)\frac{\partial f_s}{\partial u_k}+\sum_{s=1}^{r}\mu_s^{(i)}\frac{\partial\psi_s}{\partial u_k}=0 \qquad (k=1,\ldots,m)\end{gathered} \tag{3.2}$$

Уравнения, соответствующие значению $i = 0$, имеют вид (2.4).

При анализе уравнений (3.2) следует помнить, что по определению ограничений q-го порядка для них справедливы соотношения

$$\frac{\partial \vartheta_i}{\partial u_k} = 0 \quad (i = 0, \ldots, q-1), \quad \frac{\partial \vartheta_q}{\partial u_k} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \vartheta_{q-1}}{\partial x_s} \frac{\partial f_s}{\partial u_k}$$

В соответствии с этим после повторения описанных в п. 2 выкладок получатся зависимости

$$\lambda_s^{(i)} = \lambda_s^{(i+1)} + \alpha_{i+1} \frac{\partial \vartheta_i}{\partial x_s} \quad (s = 1, \ldots, n) \qquad \mu_k^{(i)} = \mu_k^{(i+1)} \quad (k = 1, \ldots, r)$$

$$\alpha_i = -\frac{d\alpha_{i+1}}{dt} \quad (i = 0, \ldots, q-1) \tag{3.3}$$

выполнение которых приводит к совпадению решений оптимальной задачи при использовании любого из указанных выше способов описания граничных участков. При $t = t_2$ должно быть справедливо равенство

$$\alpha_i(t_2) = 0 \quad (i = 1, \ldots, q) \tag{3.4}$$

Из формул (3.3) имеем равенство

$$\alpha_i = (-1)^{q-i} \frac{d^{q-i}\alpha_q}{dt^{q-i}}$$

Если опять воспользоваться неравенством Клебша, то при условии (1.3) получится следующая совокупность неравенств:

$$(-1)^i \frac{d^i \alpha_q}{dt^i} \leqslant 0 \quad (i = 0, \ldots, q) \tag{3.5}$$

Ею следует пользоваться при изучении граничных участков для ограничений q-го порядка.

Пример. Рассмотрим задачу оптимизации для уравнений

$$x_1^{\cdot} = x_2 u_1, \qquad x_2^{\cdot} = {}^1/_2\, u_2 \tag{4.1}$$

и соотношения

$$\psi(u_1, u_2) = u_1^2 + u_2^2 - 1 = 0 \tag{4.2}$$

Требуем выполнения неравенства

$$\vartheta(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1 \operatorname{tg}\theta - \frac{2\alpha}{\pi}\left[1 - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\operatorname{tg}\theta\right] \leqslant 0 \tag{4.3}$$

и условий

$$x_1(0) = x_2(0) = 0 \tag{4.4}$$

Будем искать u_1 и u_2, минимизирующие время T достижения системой линии $x_1 = 1$. В такой форме может быть поставлена задача о брахистохроне при условии, что точка не может выйти ниже некоторой прямой линии.

В неравенстве (4.3) α и θ постоянны и имеют значения $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant {}^1/_2\pi$.

Составив функционал I, соответствующий второму способу описания границы, и использовав уравнения и соотношения этой вариационной задачи, придем к следующему решению. На отрезке $0 \leqslant t \leqslant t_1$, соответствующем внутренним точкам области (1.3), будем иметь

$$\lambda_1 = C_1, \quad x_1 = {}^1/_2\, C_1^{-2}(C_1 t - \sin C_1 t) \quad u_1 = \sin {}^1/_2\, C_1 t; \quad \mu_1 = -1$$

$$\lambda_2 = 2\cos {}^1/_2\, C_1 t, \quad x_2 = C_1^{-1} \sin {}^1/_2\, C_1 t, \quad u_2 = \cos {}^1/_2\, C_1 t \tag{4.5}$$

На граничном отрезке $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ решение имеет вид

$$\begin{gathered}\lambda_1 = C_2, \quad x_1 = \frac{1}{4}\frac{k}{1+k^2}t^2 + A_1(1+k^2)^{-1/2}t + A_2, \quad u_1 = (1+k^2)^{-1/2} \\ \lambda_2 = -C_2(1+k^2)^{-1/2}t + A_3, \quad x_2 = {}^1/_2 k(1+k^2)^{-1/2}t + A_1, \quad u_2 = k(1+k^2)^{-1/2} \\ \mu_1 = -{}^1/_2, \quad \nu_1 = \frac{C_1 - C_2}{k}, \quad \alpha_1 = [k - {}^1/_2\lambda_2(1+k^2)^{1/2}]x_2^{-1}(1+k^2)^{-1/2}\end{gathered} \tag{4.6}$$

Наконец, на отрезке $t_2 \leqslant t \leqslant T$, на котором изображающая точка опять находится внутри области (1.3), решение запишется в форме

$$\begin{gathered}\lambda_1 = C_2, \quad x_1 = {}^1/_2 C_2^{-2}[C_2 t - \sin C_2(T-t)] + C_3, \quad u_1 = \cos {}^1/_2 C_2(T-t) \\ \mu_1 = -1 \\ \lambda_2 = 2\sin {}^1/_2 C_2(T-t), \quad x_2 = C_2^{-1}\cos {}^1/_2 C_2(T-t), \quad u_2 = \sin {}^1/_2 C_2(T-t)\end{gathered} \tag{4.7}$$

Здесь

$$\begin{gathered}t_1 = 2(\alpha h)^{1/2}({}^1/_2\pi - \operatorname{arctg} k)(1 - {}^1/_2 k(\pi - 2\operatorname{arctg} k)]^{-1/2} \\ t_2 = \frac{2}{k}\left[\left(\frac{1+\alpha h/k}{k^{-1}+\operatorname{arctg} k}\right)^{1/2} - \left(\frac{\alpha h}{k}(k^{-1} - {}^1/_2\pi + \operatorname{arctg} k)\right)^{1/2}\right] \\ T = 2\{[(1+\alpha h/k)(k^{-1}+\operatorname{arctg} k)]^{1/2} - [(\alpha h/k)(k^{-1} - {}^1/_2\pi + \operatorname{arctg} k)]^{1/2}\} \\ C_1 = \left[\frac{1 - {}^1/_2 k(\pi - 2\operatorname{arctg} k}{\alpha h}\right]^{1/2}, \qquad C_2 = \left(\frac{k^{-1}+\operatorname{arctg} k}{1+\alpha h/k}\right)^{1/2} \\ C_3 = \left[(\alpha h/k)\frac{1+\alpha h/k}{k^{-1}+\operatorname{arctg} k}(k^{-1} - {}^1/_2\pi + \operatorname{arctg} k)\right]^{1/2} - \alpha h/k \\ A_1 = \left\{\frac{\alpha h[1 - {}^1/_2 k(\pi - 2\operatorname{arctg} k)]}{1+k^2}\right\}^{1/2}, \qquad A_2 = -\alpha h\frac{{}^1/_2\pi - \operatorname{arctg} k + k}{1+k^2} \\ A_3 = \frac{2}{k}\left\{(1+k^2)^{1/2} - \left[\frac{\alpha h(k^{-1}+\operatorname{arctg} k)[1 - {}^1/_2 k(\pi - 2\operatorname{arctg} k)]}{(1+\alpha h/k)(1+k^2)}\right]^{1/2}\right\} \\ k = tg\,\theta, \qquad h = 2\pi^{-1}[1 - ({}^1/_2\pi - \theta)\,tg\,\theta]\end{gathered} \tag{4.8}$$

Подставив в последнее из соотношений (4.6) λ_2 и x_2 и продифференцировав получившуюся зависимость по времени, без особого труда убедимся, что

$$d\alpha_1/dt > 0 \qquad \text{при } t \in [t_1, t_2], \qquad \alpha_1(t_2) = 0 \tag{4.9}$$

Эти соотношения совпадают с найденными в п. 2.

Поступила 1 IV 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.
2. Троицкий В. А. Вариационные задачи оптимизации процессов управления в системах с ограниченными координатами. ПММ, 1962, т. 26, вып. 3, стр. 431—443.
3. Bryson A. E., Denhem W. F. Optimal programming problems with inequality constraints I. Necessary conditions for extremal solutions, AIAA Journal, 1963, vol. 1, No. 11 pp. 2544—2550.
4. McIntyre J., Paiewonsky B. On optimal control with bounded state variables. Advances in Control Systems. Theory and Application, New York — London, Acad. Press, 1967, vol. 5.