Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УПРУГИХ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ И СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

М. Я. Кушуль

(Москва)

Рассматривается устойчивость периодических решений квазилинейных упругих гироскопических систем, не вполне симметричных, с распределенными и сосредоточенными параметрами; их движение описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных; краевые условия и условия сопряжений в местах расположения сосредоточенных параметров выражаются также квазилинейными уравнениями. Нелинейные функции в уравнениях движения и в граничных условиях предполагаются достаточно общего вида, что позволяет исследовать устойчивость периодических решений при воздействии возмущений самого различного свойства. Допускается, что некоторые из собственных частот линеаризованной системы могут быть критическими или резонансными. Гироскопический эффект распределенной массы, как обычно, считается пренебрежимо малым.

В качестве примера дается построение режимов периодических колебаний неуравновешенных гибких роторов, некоторые из опор которого имеют нелинейные характеристики; приводятся уравнения в вариациях для этих режимов и показывается, что исследование их устойчивости может быть полностью выполнено изложенным в статье способом.

1. Во многих задачах прикладной механики квазилинейные упругие гироскопические системы находятся под воздействием возмущающих периодических сил, частоты которых обычно кратны угловой скорости ω ротора гиросистемы. Их уравнения движения допускают периодические решения периода $T = 2\pi / \omega$; однако эти решения по различным причинам могут оказаться неустойчивыми, и в гиросистемах устанавливаются почти-периодические автоколебательные режимы, не всегда допустимые. Поэтому условия устойчивости периодических колебаний приобретают немаловажное значение.

Движение упругих гиросистем описывается в наиболее сложных случаях системой квазилинейных неоднородных дифференциальных уравнений в частных производных с квазилинейными неоднородными граничными условиями. Без ограничения общности рассмотрим одну из них, наиболее простую.

Пусть функции $u_j(x, t)$, $j = 1, 2$, на длине $0 < x < l$ должны удовлетворять квазилинейным дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial^4 u_j}{\partial x^4} + \rho\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} + \mu\varkappa\frac{\partial u_j}{\partial t} = f_j(x, t) + \mu F_j(\mu, t, x, u_1, u_2, u_{1x}, u_{2x}, u_{1t}, u_{2t}) \qquad (1.1)$$

$$\text{при } x = 0 \quad u_j = \partial u_j/\partial x = 0$$

при $x = l$

$$\sigma \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} = -K_1 \frac{\partial^3 u_j}{\partial x \partial t^2} + i^{2j} K_0 \omega \frac{\partial^2 u_{j\pm 1}}{\partial x \partial t} -$$

$$- c \frac{\partial u_j}{\partial x} + g_j(t) - \mu \varkappa_1 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x \partial t} + \mu G_j (\mu, t, u_1, \ldots u_{2t}, l) \qquad ($$

$$\sigma \frac{\partial^3 u_j}{\partial x^3} = m \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} + g_j^*(t) + \mu \varkappa_2 \frac{\partial u_j}{\partial t} + \mu G_j^* (\mu, t, u_1, \ldots, u_{2t}, l)$$

$$(i = \sqrt{-1},\ j = 1, 2)$$

В уравнениях (1.1) и (1.2) заданные функции f_j, g_j, g_j^*, F_j, G_j, и G_j^* непрерывны и периодичны периода T по времени t; кроме того, нелинейные функции F_j, G_j, G_j^* аналитичны относительно аргумента x, малого параметра μ, функций u_j и их частных производных u_{jx}, u_{jt} по x и t первого порядка. В гироскопических членах с двойными нижними индексами здесь и всюду дальше знак (+) берется при $j = 1$ и знак (—) при $j = 2$. Коэффициенты ρ, σ, $\varkappa$, $\varkappa_1 \varkappa_2$, c, K_1, K_0, m — постоянные положительные величины. В отдельных случаях нелинейные функции F_j, G_j и G_j^* могут зависеть от частных производных выше первого порядка, что, усложняя выкладки, не вносит каких либо дополнительных затруднений. Допускаемая небольшая асимметрия гиросистемы учитывается малыми линейными членами, отнесенными к функциям F_j, G_j и G_j^*.

Уравнениями типа (1.1) и (1.2) описываются, в частности, движения ультрацентрифуг, гибких роторов с присоединенными массами и т. д.

Предполагается, что краевая задача (1.1), (1.2) допускает периодическое решение $u_j^\circ(x, t)$, определяемое или точно, в замкнутом виде, или одним из приближенных методов. Требуется исследовать устойчивость этого решения.

Полагая $\xi_j = u_j - u_j^\circ$, получим, что функции ξ_j должны удовлетворять уравнениям в вариациях

$$\frac{\partial^4 \xi_j}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial t^2} + \mu \varkappa \frac{\partial \xi_j}{\partial t} = \mu P_\xi [F_j] \tag{1.3}$$

при $x = 0$

$$\xi_j = \partial \xi_j / \partial x = 0$$

при $x = l$

$$\sigma \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial x^2} = -K_1 \frac{\partial^3 \xi_j}{\partial x \partial t^2} + i^{2j} K_0 \omega \frac{\partial^2 \xi_{j\pm 1}}{\partial x \partial t} - c \frac{\partial \xi_j}{\partial x} - \mu \varkappa_1 \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial x \partial t} + \mu P_\xi [G_j]$$

$$\sigma \frac{\partial^3 \xi_j}{\partial x^3} = m \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial t^2} + \mu \varkappa_2 \frac{\partial \xi_j}{\partial t} + \mu P_\xi [G_j^*] \tag{1.4}$$

где линейный однородный оператор

$$P_\xi [\ ] = \sum_{\beta=1,2} \left\{ \xi_\beta \left(\frac{\partial}{\partial u_\beta} \right) + \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial u_{\beta x}} \right) + \frac{\partial \xi_\beta}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial u_{\beta t}} \right) \right\} [\ ] \tag{1.5}$$

Круглые скобки в (1.5) означают, что производные вычисляются для невозмущенного движения.

При $\mu = 0$ собственные частоты и формы изгибных колебаний линейной гироскопической системы находим подстановкой

$$\xi_1 = Y_1(x, \lambda)\, e^{i\lambda t}, \quad \xi_2 = iY_2(x, \lambda)\, e^{i\lambda t} \tag{1.6}$$

Решения уравнений (1.3) при $\mu = 0$ и $Y_j(0, \lambda) = Y_j'(0, \lambda) = 0$ будут

$$Y_j(x, \lambda) = C_j U(kx) + D_j V(kx), \quad k^4 = \rho\lambda^2 \quad (j = 1, 2) \tag{1.7}$$

где C_j и D_j — произвольные постоянные, $U(kx)$, $V(kx)$ — функции Крылова. Из (1.4) при $\mu = 0$ получим систему линейных однородных уравнений относительно произвольных постоянных C_j и D_j:

$$\begin{gathered} a_{11}C_1 + a_{12}D_1 - a_{13}C_2 - a_{14}D_2 = 0, \qquad a_{21}C_1 + a_{22}D_1 = 0 \\ -a_{13}C_1 - a_{14}D_1 + a_{11}C_2 + a_{12}D_2 = 0, \qquad a_{21}C_2 + a_{22}D_2 = 0 \end{gathered} \tag{1.8}$$

$$\begin{gathered} a_{11} = \sigma k^2 S - kT(K_1\lambda^2 - c), \; a_{21} = \sigma k^3 V + m\lambda^2 U, \qquad a_{13} = K_0\omega\lambda kT \\ a_{12} = \sigma k^2 T - kU(K_1\lambda^2 - c), \qquad a_{22} = \sigma k^3 S + m\lambda^2 V, \qquad a_{14} = K_0\omega\lambda kU \end{gathered} \tag{1.9}$$

Здесь и далее функции Крылова S, T, U, V вычисляются для аргумента kl, который для упрощения записи опущен [1]. Собственные частоты находятся из условия равенства нулю детерминанта системы (1.8)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{13} & -a_{14} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \tag{1.10}$$

что приводит к двум трансцендентным частотным уравнениям

$$\Delta_1 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + a_{22}a_{13} - a_{21}a_{14} = 0 \tag{1.11}$$

$$\Delta_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} - a_{22}a_{13} + a_{21}a_{14} = 0 \tag{1.12}$$

или в развернутом виде

$$\begin{gathered} (K_1\lambda^2 - c)\,[\sigma k^3 (UV - ST) + m\lambda^2 (U^2 - VT)] + \sigma\lambda^2 [\rho (S^2 - TV) + \\ + mk (SV - UT) \pm K_0\omega\lambda k\, [\sigma k^3 (ST - UV) + m\lambda^2 (TV - U^2)] = 0 \end{gathered}$$

Очевидно, что все корни уравнения (1.10) — вещественные числа и положительные корни уравнения (1.11) равны отрицательным корням уравнения (1.12), и наоборот. Из (1.8) получим, что

$$\frac{D_1}{C_1} = \frac{D_2}{C_2} = -\frac{a_{21}}{a_{22}}, \qquad C_2 = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{13}a_{22} - a_{14}a_{21}}\, C_1$$

и, следовательно, по (1.7) для каждого корня уравнения (1.11) $Y_1 = -Y_2 = Y^*$, а для каждого корня уравнения (1.12) $Y_1 = Y_2 = Y^*$, где с точностью до постоянного множителя

$$Y^*(x, \lambda) = U(kx) - a_{21}a_{22}^{-1} V(kx) \tag{1.13}$$

---

[1] Напомним, что функции Крылова поперечных колебаний равны

$$S(\alpha) = 0.5\,(\mathrm{ch}\,\alpha + \cos\alpha), \qquad T(\alpha) = 0.5\,(\mathrm{sh}\,\alpha + \sin\alpha)$$
$$U(\alpha) = 0.5(\mathrm{ch}\,\alpha - \cos\alpha), \qquad V(\alpha) = 0.5(\mathrm{sh}\,\alpha - \sin\alpha)$$

Подставляя значения $Y_j(x, \lambda)$ в (1.6) и отделяя вещественные части от мнимых, легко убедиться, что положительным корням уравнения (1.11) или отрицательным корням уравнения (1.12) соответствует прямая прецессии оси гиросистемы, а отрицательным корням уравнения (1.11) или положительным корням уравнения (1.12) — обратная.

Обозначим одну из собственных частот линеаризованной гиросистемы, не кратную $2\pi / T$, через λ_s и для определенности предположим, что λ_s — простой корень уравнения (1.11). Чтобы найти характеристический показатель α уравнений в вариациях (1.3) и (1.4), близкий к $i\lambda_s$, положим

$$\xi_1 = y_1(\mu, x, t)\, e^{\alpha t}, \qquad \xi_2 = iy_2(\mu, x, t)\, e^{\alpha t} \tag{1.14}$$

где $y_j(\mu, x, t)$ $j = 1, 2$ должны быть периодическими функциями периода T, и будем искать α и $y_j(\mu, x, t)$ в виде рядов

$$\alpha = i\lambda_s + \mu a + \mu^2 a_2 + \ldots, \quad y_j(\mu, x, t) = y_j^\circ(x, t) + \mu y_j^{(1)} + \ldots \tag{1.15}$$

Из (1.3) и (1.4) следует, что функции $y_j^\circ(x, t)$ должны удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial^4 y_j^\circ}{\partial x^4} + \rho A[y_j^\circ] = 0 \tag{1.16}$$

при $x = 0$

$$y_j^\circ = \partial y_j^\circ / \partial x = 0$$

при $x = l$

$$B_1[y_j^\circ] - K_0\omega\left(\lambda_s \frac{\partial \overset{\circ}{y}_{j\pm1}}{\partial x} - i\,\frac{\partial^2 \overset{\circ}{y}_{j\pm1}}{\partial x \partial t}\right) = 0, \qquad B_2[y_j^\circ] = 0 \tag{1.17}$$

а функции $y_j^{(1)}(x, t)$ — дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial^4 y_j^{(1)}}{\partial x^4} + \rho A[y_j^{(1)}] = -(2a\rho + \varkappa)\left(i\lambda_s y_j^\circ + \frac{\partial y_j^\circ}{\partial t}\right) + i^{1-j}R[F_j] \tag{1.18}$$

и краевым условиям

$$B_1[y_j^{(1)}] - K_0\omega\left(\lambda_s \frac{\partial y_{j\pm1}^{(1)}}{\partial x} - i\,\frac{\partial^2 y_{j\pm1}^{(1)}}{\partial x \partial t}\right) =$$

$$= -(2aK_1 + \varkappa_1)\left(i\lambda_s \frac{\partial y_j^\circ}{\partial x} + \frac{\partial^2 y_j^\circ}{\partial x \partial t}\right) - iK_0\omega a\,\frac{\partial \overset{\circ}{y}_{j\pm1}}{\partial x} + i^{1-j}R[G_j]$$

$$B_2[y_j^{(1)}] = i^{1-j}R[G_j^*] + (2am + \varkappa_2)\left(i\lambda_s y_j^\circ + \frac{\partial y_j^\circ}{\partial t}\right) \tag{1.19}$$

В уравнениях (1.16) — (1.19) линейные операторы определяются формулами

$$A[\ ] = \left(-\lambda_s^2 + 2i\lambda_s \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)[\ ]$$

$$B_1[\ ] = \sigma\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\ ] + K_1\frac{\partial}{\partial x}A[\ ] + c\frac{\partial}{\partial x}[\ ]$$

$$B_2[\ ] = \sigma\frac{\partial^3}{\partial x^3}[\ ] - mA[\ ] \tag{1.20}$$

$$R[\ ] = \sum_{\beta=1,2} i^{\beta-1}\left\{y_\beta^\circ\left(\frac{\partial}{\partial u_\beta}\right) + \frac{\partial y_\beta^\circ}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial u_{\beta x}}\right) + \left(i\lambda_s y_\beta^\circ + \frac{\partial y_\beta^\circ}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial u_{\beta t}}\right)\right\}[\ ]$$

Допустим, что уравнение (1.10) кроме корня λ_s имеет также простые корни вида $\lambda_{sr} = \lambda_s + n_r\,\omega$, $r = 0, 1, \ldots, \gamma$, где n_r — целые положительные или отрицательные числа, и первые r' корней $\lambda_{s1}, \ldots, \lambda_{sr'}$ принадлежат уравнению (1.11), а остальные $\gamma - r'$ корней $\lambda_{s,r'+1}, \ldots, \eta_{s\gamma}$ — уравнению (1.12). Тогда краевая задача для функций $y_j^\circ(x, t)$, $j = 1, 2$ будет иметь периодические решения периода T, содержащие $\gamma + 1$ произвольных постоянных M_r

$$\begin{aligned} y_1^\circ &= \sum_{r=0}^{r'} M_r e^{in_r\omega t} Y_{sr}(x) + \sum_{r=r'+1}^{\gamma} M_r e^{in_r\omega t} Y_{sr}(x) \\ y_2^\circ &= -\sum_{r=0}^{r'} M_r e^{in_r\omega t} Y_{sr}(x) + \sum_{r=r'+1}^{\gamma} M_r e^{in_r\omega t} Y_{sr}(x) \end{aligned} \tag{1.21}$$

Здесь $Y_{sr}(x)$ — собственные функции, соответствующие корням λ_{sr} и определяемые по формуле (1.13), причем $n_0 = 0$ и $\lambda_{s0} = \lambda_s$. Каждую из функций $y_j^{(1)}(x, t)$ отыскиваем в виде суммы периодических функций периода T

$$y_j^{(1)}(x, t) = \sum_{r=0}^{\gamma} z_{jr}(x)\, e^{in_r\omega t} + z_j(x, t) \tag{1.22}$$

В силу (1.18), (1.19) и (1.21) функции $z_{jr}(x)$ должны удовлетворять обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$z_{jr}^{IV} - \rho\lambda_{sr}^2 z_{jr} = i^{1-j} p_{jn_r} \begin{cases} + i^{2j+1}(2a\rho + \varkappa)\, Y_{sr}\lambda_{sr} M_r & (r < r') \\ - i\,(2a\rho + \varkappa)\, Y_{sr}\lambda_{sr} M_r & (r > r') \end{cases} \tag{1.23}$$

при $x = 0$

$$z_{jr} = z_{jr}' = 0$$

при $x = l$

$$\begin{aligned} &\sigma z_{jr}'' - (K_1\lambda_{sr}^2 - c)\, z_{jr}' - K_0\omega\lambda_{sr} z_{j\pm1} = \\ &= i^{1-j} q_{jn_r}(l) \begin{cases} + i^{2j+1} M_r Y_{sr}' \,[a(2K_1\lambda_{sr} - K_0\omega) + \varkappa_1\lambda_{sr}] & (r < r') \\ - i M_r Y_{sr}' \,[a(2K_1\lambda_{sr} + K_0\omega) + \varkappa_1\lambda_{sr}] & (r > r') \end{cases} \\ &\sigma z_{jr}''' + m\lambda_{sr}^2 z_{jr} = i^{1-j} q_{jn_r}(l) \begin{cases} - i^{2j+1}(2am + \varkappa_2)\,\lambda_{sr} Y_{sr} M_r & (r < r') \\ + i\,(2am + \varkappa_2)\,\lambda_{sr} Y_{sr} M_r & (r > r') \end{cases} \qquad (j = 1, 2) \end{aligned} \tag{1.24}$$

а функции $z_j(x, t)$ — уравнениям

$$\frac{\partial^4 z_j}{\partial x^4} + \rho A[z_j] = i^{1-j} \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' p_{jn}(x)\, e^{in\omega t} \tag{1.25}$$

при $x = 0$

$$z_j = \partial z_j / \partial x = 0$$

при $x = l$

$$\begin{aligned} B_1[z_j] - K_0\omega\left(\lambda_s \frac{\partial z_{j\pm1}}{\partial x} - i\,\frac{\partial^2 z_{j\pm1}}{\partial x\,\partial t}\right) &= i^{1-j} \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' q_{jn}(l)\, e^{in\omega t} \\ B_2[z_j] &= i^{1-j} \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' q_{jn}^*(l)\, e^{in\omega t} \end{aligned} \tag{1.26}$$

Штрих у знака сумм означает, что $n \neq n_r$.

В уравнениях (1.23) — (1.26) $p_{jn}(x)$, $q_{jn}(x)$, $q_{jn}^*(x)$ — коэффициенты рядов Фурье соответственно функций $R[F_j]$, $R[G_j]$ и $R[G_j^*]$, где оператор $R[\ ]$, согласно (1.20) и (1.21), определяется формулой

$$R[\ ] = \sum_{r=0}^{r'} M_r e^{in_r\omega t}\left\{Y_{sr}\left(\frac{\partial}{\partial u_1} - i\frac{\partial}{\partial u_2}\right) + Y_{sr}'\left(\frac{\partial}{\partial u_{1x}} - i\frac{\partial}{\partial u_{2x}}\right) + \right. \tag{1.27}$$

$$\left. + i\lambda_{sr}Y_{sr}\left(\frac{\partial}{\partial u_{1t}} - i\frac{\partial}{\partial u_{2t}}\right)\right\}[\ ] + \sum_{r=r'+1}^{\gamma} M_r e^{in_r\omega t}\left\{Y_{sr}\left(\frac{\partial}{\partial u_1} + i\frac{\partial}{\partial u_2}\right) + \right.$$

$$\left. + Y_{sr}'\left(\frac{\partial}{\partial u_{1x}} + i\frac{\partial}{\partial u_{2x}}\right) + i\lambda_{sr}Y_{sr}\left(\frac{\partial}{\partial u_{1t}} + i\frac{\partial}{\partial u_{2t}}\right)\right\}[\ ]$$

При этом все частные производные функций F_j, G_j, и C_j^* вычисляются для невозмущенного движения. Из (1.21) следует, что коэффициенты Фурье $p_{jn}(x)$, $q_{jn}(x)$ и $q_{jn}^*(x)$ — однородные линейные функции постоянных M_r, в частности

$$p_{jn_r}(x) = \frac{1}{T}\int_0^T R[F_j]\, e^{-in_r\omega t}dt = \sum_{k=0}^{\gamma} M_k p_{jrk}(x)$$

$$q_{jn_r}(x) = \sum_{k=0}^{\gamma} M_k q_{jrk}(x), \qquad q_{jn_r}^*(x) = \sum_{k=0}^{\gamma} M_k q_{jrk}^*(x)$$

Решения уравнений (1.23), удовлетворяющие краевым условиям при $x = 0$, будут

$$z_{jr}(x) = C_{jr}U(k_r x) + D_{jr}V(k_r x) + i^{2j+1}M_r\Psi_r(x)(2a\rho + \varkappa) +$$

$$+ i^{1-j}\sum_{\delta=0}^{\gamma} M_k\Psi_{jr\delta}(x) \qquad (k_r^4 = \rho\lambda_{sr}^2)$$

где C_{jr} и D_{jr} — произвольные постоянные и

$$\Psi_r(x) = \frac{k_r}{\rho\lambda_{sr}}\int_0^x V[k_r(x-\zeta)\, Y_{sr}(\zeta)\, d\zeta]$$

$$\Psi_{jr\delta}(x) = \frac{1}{k_r^3}\int_0^x V[k_r(x-\zeta)\, p_{jr\delta}(\zeta)\, d\zeta] \tag{1.28}$$

Из краевых условий (1.24) получим систему (1.29)

$$a_{11}C_{1r} + a_{12}D_{1r} - a_{13}C_{2r} - a_{14}D_{2r} = b_{1r}(a), \qquad a_{21}C_{1r} + a_{22}D_{1r} = b_{3r}(a)$$

$$-a_{13}C_{1r} - a_{14}D_{1r} + a_{11}C_{2r} + a_{12}D_{2r} = b_{2r}(a), \qquad a_{21}C_{2r} + a_{22}D_{2r} = b_{4r}(a)$$

Здесь коэффициенты a_{ij} определяются по формулам (1.9) при $\lambda = \lambda_{sr}$, а b_{ir} — линейные функции искомой величины a, равные

при $r < r'$

$$b_{jr} = i^{2j+1}M_r\{(2a\rho + \varkappa)[(K_1\lambda_{sr}^2 - K_0\omega\lambda_{sr} - c)\Psi_r'(l) - \sigma\Psi_r''(l)] + \tag{1.30}$$

$$+ Y_{sr}'(l)[a(2K_1\lambda_{sr} - K_0\omega) + \varkappa_1\lambda_{sr}]\} + i^{1-j}\sum_{h=0}^{\gamma} M_h d_{jrh}$$

$$b_{j+2.r} = -i^{2j+1}M_r\{(2a\rho + \varkappa)[\sigma\Psi_r'''(l) + m\lambda_{sr}^2\Psi_r(l)] + (2am +$$

$$+ \varkappa_2)\lambda_{sr}Y_{sr}(l)\} + i^{1-j}\sum_{h=0}^{\gamma} M_h d_{jrh}^*$$

при $r > r'$

$$b_{jr} = -iM_r\{(2a\rho + \varkappa)[(K_1\lambda_{sr}^2 + K_0\omega\lambda_{sr} - c)\Psi_r'(l) - \sigma\Psi_r''(l)] + \\ + Y_{sr}'(l)[a(2K_1\lambda_{sr} + K_0\omega) + \varkappa_1\lambda_{sr}]\} + i^{1-j}\sum_{h=0}^{\gamma} M_h d_{jrh} \tag{1.31}$$

$$b_{j+2,r} = iM_r\{(2a\rho + \varkappa)[\sigma\Psi_r'''(l) + m\lambda_{sr}^2\Psi_r(l)] + (2am + \varkappa_2)\lambda_{sr}Y_{sr}(l)\} + \\ + i^{1-j}\sum_{h=0}^{\gamma} M_h d_{jrh}^* \qquad (j = 1, 2)$$

В формулах (1.30) и (1.31)

$$d_{jrh} = \Psi_{jrh}'(l)(K_1\lambda_{sr}^2 - c) - \sigma\Psi_{jrh}''(l) + q_{jrh}(l) - i^{2j-1}K_0\omega\lambda_{sr}\Psi_{j\pm1,rh}'(l)$$

$$d_{jrh}^* = q_{jrh}^*(l) - \sigma\Psi_{jrh}'''(l) - m\lambda_{sr}^2\Psi_{jrh}(l)$$

Так как λ_{sr} является корнем уравнения (1.10), детерминант системы (1.29) равен нулю, и уравнения (1.29) окажутся совместными, если

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & -a_{13} & b_{1r} \\ -a_{13} & -a_{14} & a_{11} & b_{2r} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & b_{3r} \\ 0 & 0 & a_{21} & b_{4r} \end{vmatrix} = 0 \tag{1.32}$$

или

$$P_r = B_{r0}M_0 + B_{r1}M_1 + \ldots + (B_{rr} - aA_r)M_r + \ldots + B_{r\gamma}M_\gamma = 0 \tag{1.33}$$

где B_{ri} и A_r $(r, i = 0, 1, \ldots, \gamma)$ — известные комплексные числа. Следовательно, величина a должна быть корнем алгебраического уравнения

$$\begin{vmatrix} B_{00} - aA_0 & B_{01} & \ldots & B_{0\gamma} \\ B_{10} & B_{11} - aA_1 & \ldots & B_{1\gamma} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{\gamma 0} & B_{\gamma 1} & \ldots & B_{\gamma\gamma} - aA_\gamma \end{vmatrix} = 0 \tag{1.34}$$

Предположим, что уравнение (1.34) имеет только простые корни. Тогда, как известно, можно получить сколь угодно точно все $\gamma + 1$ характеристических показателей, отвечающих собственным значениям λ_{sr} порождающей системы (1.3), (1.4). Однако для суждения об устойчивости невозмущенного периодического решения обычно достаточно ограничиться первым приближением. Из (1.33) для каждого простого корня a уравнения (1.34) можно будет найти величины M_r, из которых одна, пусть M_γ, может быть выбрана произвольно, при этом

$$\frac{\partial(P_0, \ldots, P_\gamma)}{\partial(M_0, \ldots, M_{\gamma-1}, a)} \neq 0$$

после чего краевая задача (1.25), (1.26) однозначно с точностью до постоянного множителя определяет периодическую функцию $z_j(x, t)$ периода T, так как частоты $n\omega$ при $n \neq n_r$ не являются собственными.

В частном случае уравнение (1.10) может не иметь корней, отличающихся от λ_s на величины кратные ω; тогда определение коэффициента a в разложении (1.15) характеристического показателя, близкого к $i\lambda_s$, упрощается. Периодические функции y_j^0, вместо (1.21) будут равны $y_1^0 = -y_2^0 = Y_s$, а каждую из функций $y_j^{(1)}(x, t)$ следует отыскивать в виде суммы двух периодических функций $y_j^{(1)}(x, t) = Z_j(x) + z_j(x, t)$, одна из которых — $Z_j(x)$ — от времени не зависит, а среднее значение другой — $z_j(x, t)$ — равно нулю. Легко показать, что величина a должна удовлетворять линейному уравнению (1.32), в котором элементы последнего столбца равны

$$b_j = i^{2j+1}\{(2a\rho + \varkappa)[(K_1\lambda_s^2 - K_0\omega\lambda_s - c)\Psi'(l) - \sigma\Psi''(l)] + Y_s'(l)[a(2\lambda_s K_1 - K_0\omega) + \varkappa_1\lambda_s]\} + i^{1-j}\left\{(K_1\lambda_s^2 - c)\Psi_j'(l) - \sigma\Psi_j''(l) + \frac{1}{T}\int_0^T R[G_j]\right\} - i^j K_0\omega\lambda_s\Psi'_{j\pm1}(l)$$

$$b_{j+2} = -i^{2j+1}\{(2a\rho + \varkappa)[\sigma\Psi'''(l) + m\lambda_s^2\Psi(l)] + (2am + \varkappa_2)\lambda_s Y_s\} + i^{1-j}\left\{\frac{1}{T}\int_0^T R[G_j^*]\,dt - m\lambda_s^2\Psi_j(l) - \sigma\Psi_j'''(l)\right\} \qquad (1.35)$$

$$\Psi(x) = \frac{k_s}{\rho\lambda_s}\int_0^x V[k(x-\zeta)]\,Y(\zeta)\,d\zeta$$

$$\Psi_j(x) = \frac{k_s}{\rho\lambda_s^2 T}\int_0^x\int_0^T V[k(x-\zeta)R[F_j]\,dt\,d\zeta]$$

Оператор R [ ], вместо (1.27),

$$R[\;] = \left\{Y_s(x)\left(\frac{\partial}{\partial u_1} - i\frac{\partial}{\partial u_2}\right) + Y_s'(x)\left(\frac{\partial}{\partial u_{1x}} - i\frac{\partial}{\partial u_{2x}}\right) + i\lambda_s Y_s\left(\frac{\partial}{\partial u_{1t}} - i\frac{\partial}{\partial u_{2t}}\right)\right\}[\;]$$

Среди корней уравнения (1.10) могут быть резонансные, равные $\lambda_v = \pm n_v\,\omega$, $v = 1, \ldots, \beta$, где n_v — целые числа, знаки которых выберем так, чтобы $\lambda_v = n_v\,\omega$ были корнями уравнения (1.11), а $-\lambda_v$ — корнями уравнения (1.12). В резонансном случае характеристические показатели в (1.14) отыскиваются вместо (1.15) в виде ряда $\alpha = \mu a + \mu^2 a_2 + \ldots$; поэтому будут справедливы все уравнения (1.16) — (1.20), если в них положить $\lambda_s = 0$.

Краевая задача для функций y_j^0 в резонансном случае допускает периодическое решение, зависящее от 2β произвольных постоянных M

$$y_1^\circ = \sum_{v=1}^{\beta} Y_v(x, \lambda_v)\left(M_v e^{i\lambda_v t} + M_{v+\beta}e^{-i\lambda_v t}\right)$$

$$y_2^\circ = \sum_{v=1}^{\beta} Y_v(x, \lambda_v)\left(-M_v e^{i\lambda_v t} + M_{v+\beta}e^{-i\lambda_v t}\right)$$

Здесь собственные функции $Y_v(x, \lambda_v)$ определяются по формуле (1.13), если в ней положить $\lambda = \lambda_v = n_v\omega$. Каждую из функций $y_j^{(1)}(x, t)$ отыскиваем в виде суммы периодических функций периода $T = 2\pi / \omega$

$$y_j^{(1)}(x, t) = \sum_{v=1}^{\beta} [z_{jv}(x) e^{i\lambda_v t} + z_{j,v+\beta}(x) e^{-i\lambda_v t}] + z_j(x, t)$$

Дальнейшие выкладки ничем не отличаются от уже изложенных и не приводятся. Заметим только, что величина a и постоянные $M_1, \ldots, M_{2\beta}$, из которых одна может быть выбрана произвольно, должны будут удовлетворять 2β уравнениям (1.32); коэффициенты b_{ir} в этих уравнениях имеют ту же структуру, что и (1.30), (1.31), причем оператор R [ ] для резонансного случая определяется формулой

$$R[\ ] = \sum_{v=1}^{\beta} e^{i\lambda_v t} M_v \left\{ Y_v \left(\frac{\partial}{\partial u_1} - i \frac{\partial}{\partial u_2} \right) + Y_v' \left(\frac{\partial}{\partial u_{1x}} - i \frac{\partial}{\partial u_{2x}} \right) + \right.$$
$$\left. + i\lambda_v Y_v \left(\frac{\partial}{\partial u_{1t}} - i \frac{\partial}{\partial u_{2t}} \right) \right\} [\ ] + \sum_{v=1}^{\beta} e^{-i\lambda_v t} M_{v+\beta} \left\{ Y_v \left(\frac{\partial}{\partial u_1} + i \frac{\partial}{\partial u_2} \right) + \right.$$
$$\left. + Y_v' \left(\frac{\partial}{\partial u_{1x}} + i \frac{\partial}{\partial u_{2x}} \right) - i\lambda_v Y_v \left(\frac{\partial}{\partial u_{1t}} + i \frac{\partial}{\partial u_{2t}} \right) \right\} [\ ]$$

Примечание. Упругие гироскопические системы могут быть более сложного вида, чем рассмотренные, в частности содержать дискретные параметры не только на краях отрезка $0 \leqslant x \leqslant l$, но и в нескольких точках внутри него; условия сопряжения на границах между участками их расположения могут быть квазилинейными. При исследовании устойчивости периодических решений таких гиросистем должны быть введены матрицы дискретных параметров и упругих участков между ними. Умножая их, получим для величины a в разложении (1.15) характеристического показателя уравнение вида (1.34).

2. Изложенная теория устойчивости периодических решений упругих квазилинейных гиросистем, как уже отмечалось, может быть использована, в частности, при изучении динамики гибких роторов. Нелинейные функции F_j, G_j, G_j^* в уравнениях движения (1.1) и (1.2) настолько общие, что позволяют исследовать устойчивость периодических колебаний гибких роторов или состояния их относительного равновесия при воздействии многочисленных факторов, которые могут привести к появлению почти периодических автоколебательных режимов. К таким факторам относятся как известно, силы трения — внутреннего и внешнего, асимметрия по жесткости и по моментам инерции, гидравлические силы различного происхождения и др. Кроме того, нелинейные уравнения движения роторов могут допускать несколько периодических решений и существенно важно бывает определить, какие из них устойчивы.

В качестве примера рассмотрим одну из задач, которая, несмотря на большое прикладное значение, почти не освещена в литературе.

Гибкий ротор, не вполне уравновешенный, опирается на несколько упругих изотропных опор; некоторые из них имеют нелинейные характеристики. Иногда эти характеристики вводятся преднамеренно — например, в ультрацентрифугах, — чтобы предупредить опасные вибрации роторов в широком диапазоне угловых скоростей (нелинейные демпферы) в других случаях нелинейность опор происходит по технологическим причинам. Система предполагается достаточно сложной. Помимо распределенной массы ротора должны быть учтены массы присоединенных к нему деталей; некоторые из них, имея большую длину, могут закрепляться на роторе в двух и более местах. Требуется определить возможные периодические режимы колебания такой системы и исследовать их устойчивость. Для упрощения выкладок будем учитывать только нелинейность самих опор, пренебрегая остальными видами нелинейности; кроме того, подвижные части опор или детали в непосредственной близости от них будем рассматривать как тела вращения небольшой протяженности, условно называя их дисками.

Пусть число нелинейных опор s и $l_1 < l_2 \ldots < l_s$ — абсциссы точек их расположения по длине ротора. Введем комплексный прогиб $w(x, t) = u_1(x, t) + iu_2(x, t)$, где $u_j(x, t)$ — проекции прогиба осевой линии ротора на неподвижные координатные плоскости xy и xz. Функция $w(x, t)$ должна удовлетворять:

1) дифференциальному уравнению на каждом участке

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \varkappa\frac{\partial w}{\partial t} = \rho\omega^2\varepsilon(x)\exp i[\omega t + \theta(x)] \tag{2.1}$$

2) нелинейным условиям сопряжения при $x = l_r$ $(r = 1, \ldots, s)$

$$w(l_r + 0) = w(l_r - 0) = w_r, \qquad \frac{\partial w(l_r + 0)}{\partial x} = \frac{\partial w(l_r - 0)}{\partial x} = \frac{\partial w_r}{\partial x}$$

$$EI\left[\frac{\partial^2 w(l_r + 0)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w(l_r - 0)}{\partial x^2}\right] = K_{1r}\frac{\partial^3 w_r}{\partial x \partial t^2} - i\omega K_{0r}\frac{\partial^2 w_r}{\partial x \partial t} +$$

$$+ \varkappa_{1r}\frac{\partial^2 w_r}{\partial x \partial t} + L_r\left(\left|\frac{\partial w_r}{\partial x}\right|\right)\frac{\partial w_r}{\partial x}\left|\frac{\partial w_r}{\partial x}\right|^{-1}$$

$$EI\left[\frac{\partial^3 w_r(l_r + 0)}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 w(l_r - 0)}{\partial x^3}\right] = \tag{2.2}$$

$$= -m_r\frac{\partial^2 w_r}{\partial t^2} - \varkappa_{2r}\frac{\partial w}{\partial t} - Q_r(|w_r|)\,w_r|w_r|^{-1} + m_r\varepsilon_r\omega^2\exp i(\omega t + \theta_r)$$

3) четырем краевым условиям, зависящим от способа опирания концов ротора;

4) различным линейным условиям сопряжения в местах расположения жестких или упруго-массовых опор с линейной характеристикой, сосредоточенных масс и т. д.

В уравнениях (2.1) и (2.2) $l_r \pm 0$ — абсциссы точек оси ротора справа и слева от точки $x = l_r$ на бесконечно близком расстоянии от нее; $\varepsilon(x)$, ε_r — величины эксцентриситетов по длине ротора и диска; $\theta(x)$, θ_r — углы между векторами эксцентриситетов и некоторой плоскостью, вращающейся вместе с ротором с угловой скоростью ω; m_r — масса диска; K_{0r}, K_{1r} — его полярный и экваториальный моменты инерции; EI и ρ — постоянные: жесткость на изгиб ротора и масса его единицы длины; $\varkappa$, $\varkappa_{1r}$ и $\varkappa_{2r}$ — коэффициенты демпфирования. Реакция опоры направлена противоположно комплексному прогибу w_r и по величине равна нелинейной функции $Q_r(|w_r|)$ его модуля. Аналогично вектор момента в опоре противоположен вектору комплексного угла $\partial w_r/\partial x$ и по величине равен нелинейной функции $L_r(|\partial w_r/\partial x|)$ его модуля. При $m_r = K_{1r} = K_{0r} = 0$ получим условия сопряжения без учета массы самой нелинейной опоры.

Линейные условия сопряжения, к числу которых отнесем и краевые условия, не выписываются. Простейшие из них могут быть получены из (2.2). Так, для упругих опор с линейной характеристикой $Q = c|w|$ и $L = d|\partial w/\partial x|$, где c и d — постоянные величины; если на границе двух смежных участков расположен диск, но отсутствует опора $Q = L = 0$ и т. д.

Полагая в (2.1) и (2.2) $w(x, t) = W(x)e^{i\omega t}$, получим для функции $W(x)$ дифференциальное уравнение

$$W^{\mathrm{IV}}(x) - k^4 W(x) = \frac{\rho\omega^2}{EI}\varepsilon(x)e^{i\theta(x)}, \qquad k = \left(\frac{\rho\omega^2}{EI}\right)^{1/4}\left(1 - \frac{i\varkappa}{4\omega\rho}\right) \tag{2.3}$$

и нелинейные условия сопряжения при $x = l_r$

$$W(l_r + 0) = W(l_r - 0) = W_r, \qquad W'(l_r + 0) = W'(l_r - 0) = W_r'$$

$$EI[W''(l_r + 0) - W''(l_r - 0)] = [\omega^2 K_r + i\omega\varkappa_{1r} + L_r(|W_r'|)|W_r'|^{-1}]W_r'$$

$$EI[W'''(l_r + 0) - W'''(l_r - 0)] = [m_r\omega^2 - i\omega\varkappa_{2r} - Q_r(|W_r|)|W_r|^{-1}]W_r + m_r\varepsilon_r\omega^2 e^{i\theta_r}$$

$$(K_r = K_{0r} - K_{1r}) \tag{2.4}$$

где штрихи означают производные функции W по x.

Обозначим через $X(x)$ вектор (матрицу-столбец), компоненты которого равны $\{W(x), W'(x)\, EIW''(x), EIW'''(x)\}$. На всех интервалах $0 \leqslant x < l_1,\ldots,l_r < x < l_{r+1}$ $(r = 1,\ldots,s)$ линейны не только уравнения (2.3), но и все условия сопряжений; поэтому векторы X_{l_r+0} и $X_{l_{r+1}-0}$ связаны матричным уравнением

$$X_{l_{r+1}-0} = \| p_{ki}^{(r)}(\omega) \| X_{l_r+0} + \| p_k^{(r)}(\omega) \| \tag{2.5}$$

где вектор $\| p_k^{(r)}(\omega) \|$ (4×1) и квадратная матрица $\| p_{ki}^{(r)}(\omega) \|$ четвертого порядка находятся общеизвестными методами теории линейных колебаний; в частности, матрица $\| p_{ki}^{(r)}(\omega) \|$ будет произведением матриц упругих участков, дискретных масс, линейных опор и т. п. на интервале $l_r < x < l_{r+1}$.

За основные неизвестные принимаются комплексные прогибы W_r и углы поворота W_r' сечений ротора над нелинейными опорами $(r = 1,\ldots, s)$. Удовлетворяя уравнениям (2.3), краевым условиям на левом конце ротора и всем линейным условиям сопряжения на интервале $0 < x < l_1$, после исключения начальных параметров получим при $x = l_1 - 0$

$$EIW_1'' = \alpha_{31}W_1 + \beta_{31}W_1' + \alpha_3, \qquad EIW_1''' = \alpha_{41}W_1 + \beta_{42}W_1' + \alpha_4$$

где α_{ki}, β_{ki} и α_k — известные функции угловой скорости ω. Тогда в силу (2.4) вектор $X(x)$ при $x = l_1 + 0$ может быть представлен как сумма произведения коагулированных матриц и вектора H

$$X_{l_1+0} = \left\| \begin{matrix} E_2 \\ g_1 \end{matrix} \right\| \times \| h_1 \| + H_{l_1+0} \tag{2.6}$$

где E_2 — единичная матрица второго порядка

$$g_1 = \left\| \begin{matrix} \alpha_{31}, & \beta_{31} + \omega^2 K_1 + i\omega\varkappa_{11} + L_1(|W_1'|)\,|W_1'|^{-1} \\ \alpha_{41} + m_1\omega^2 - i\omega\varkappa_{21} - Q_1(|W_1|)\,|W_1|^{-1}, & \beta_{41} \end{matrix} \right\|, \qquad h_1 = \left\| \begin{matrix} W_1 \\ W_1' \end{matrix} \right\|$$

$$H_{l_1+0} = \{0, 0, \alpha_3, \alpha_4 + m_1\varepsilon_1\omega^2 \exp i\theta_1\}$$

Далее из (2.5) и (2.6) найдем, что

$$X_{l_2-0} = \Lambda_1^{(2)} W_1 + \Xi_1^{(2)} W_1' + H_{l_2-0}$$

Здесь векторы $\Lambda_1^{(2)}$, $\Xi_1^{(2)}$ и H_{l_2-0} равны

$$\Lambda_1^{(2)} = \| \alpha_{k1}^{(2)} + \gamma_{k1}^{(2)} Q_1(|W_1|)\,|W_1|^{-1} \|$$

$$\Xi_1^{(2)} = \| \beta_{k1}^{(2)} + \delta_{k1}^{(2)} L_1(|W_1'|)\,|W_1'|^{-1} \| \qquad H_{l_2-0} = \| \alpha_k^{(2)} \|$$

причем номер строки $k = 1,2,3,4$.

Идя слева направо и применяя те же операции, легко показать, что вектор

$$X_{l_r-0} = \sum_{\nu=1}^{r-1} (\Lambda_\nu^{(r)} W_\nu + \Xi_\nu^{(r)} W_\nu') + H_{l_r-0} \tag{2.7}$$

$$\Lambda_\nu^{(r)} = \| \alpha_{k\nu}^{(r)} + \gamma_{k\nu}^{(r)} Q_\nu(|W_\nu|)\,|W_\nu|^{-1} \|,$$

$$\Xi_\nu^{(r)} = \| \beta_{k\nu}^{(r)} + \delta_{k\nu}^{(r)} L_\nu(|W_\nu'|)\,|W_\nu'|^{-1} \|, \quad H_{l_r-0} = \| \alpha_k^{(r)} \|$$

а вектор

$$X_{l_r+0} = \left\| \begin{matrix} 0, & 0, & \ldots, & E_2 \\ g_{r1}, & g_{r2}, & \ldots, & g_{rr} \end{matrix} \right\| \times \{h_1, h_2, \ldots, h_r\} + H_{l_r+0} \tag{2.8}$$

где

$$g_{r\nu} = \left\| \begin{matrix} \alpha_{3\nu}^{(r)} + \gamma_{3\nu}^{(r)} Q_\nu(|W_\nu|)\,|W_\nu|^{-1}, & \beta_{3\nu}^{(r)} + \delta_{3\nu}^{(r)} L_\nu(|W_\nu'|)\,|W_\nu'|^{-1} \\ \alpha_{4\nu}^{(r)} + \gamma_{4\nu}^{(r)} Q_\nu(|W_\nu|)\,|W_\nu|^{-1}, & \beta_{4\nu}^{(r)} + \delta_{4\nu}^{(r)} L_\nu(|W_\nu'|)\,|W_\nu'|^{-1} \end{matrix} \right\| \quad (\nu = 1,\ldots, r-1)$$

$$g_{rr} = \left\| \begin{matrix} 0, & \omega^2 K_r + i\omega\varkappa_{1r} + L_r(|W_r'|)\,|W_r'|^{-1} \\ m_r\omega^2 - i\omega\varkappa_{2r} - Q_r(|W_r|)\,|W_r|^{-1}, & 0 \end{matrix} \right\|, \qquad h_\nu = \left\| \begin{matrix} W_\nu \\ W_\nu' \end{matrix} \right\|$$

$$H_{l_r+0} = \{0, 0, \alpha_3^{(r)}, \alpha_4^{(r)} + m_r\varepsilon\omega^2 \exp i\theta_r\}$$

В приведенных формулах функции $\alpha_{k\nu}^{(r)}$, $\beta_{k\nu}^{(r)}$, $\alpha_k^{(r)}$ угловой скорости ω определяются известными методами линейной теории изгибных колебаний роторов.

Обозначим через e_1 и e_2 соответственно первую и вторую строки единичной матрицы E_4 четвертого порядка. Из условий равенства комплексных прогибов и углов поворота в сечениях $x = l_r - 0$ и $x = l_r + 0$ получим систему $2\,(s-1)$ уравнений

$$e_1 (X_{l_r+0} - X_{l_r-0}) = e_2 (X_{l_r+0} - X_{l_r-0}) = 0 \qquad (r = 2, \ldots, s) \tag{2.9}$$

Положим в них $W_r = A_r \exp i\varphi_r$, $W_r' = B_r \exp i\psi_r$, где амлитуды A_r, B_r и фазы φ_r, ψ_r — искомые вещественные числа; тогда уравнения (2.9) примут вид

$$\sum_{\nu=1}^{r-1} \{[A_\nu \alpha_{1\nu}^{(r)} + \gamma_{1\nu}^{(r)} Q_\nu (A_\nu)]\, e^{i\varphi_\nu} + [B_\nu \beta_{1\nu}^{(r)} + \delta_{1\nu}^{(r)} L_\nu (B_\nu)]\, e^{i\psi_\nu}\} = A_r e^{i\varphi_r}$$

$$\sum_{\nu=1}^{r-1} \{[A_\nu \alpha_{2\nu}^{(r)} + \gamma_{2\nu}^{(r)} Q_\nu (A_\nu)]\, e^{i\varphi_\nu} + [B_\nu \beta_{2\nu}^{(r)} + \delta_{2\nu}^{(r)} L_\nu (B_\nu)]\, e^{i\psi_\nu}\} = B_r e^{i\psi_r}$$

Присоединим к ним два краевых условия на правом конце ротора. Отделяя вещественные части от мнимых, получим $4s$ уравнений, из которых определятся амплитуды A_r, B_r и фазы φ_r, ψ_r $(r = 1,\ldots,s)$. Чисел решений может быть несколько; каждому из них соответствует своя форма упругой оси ротора $W(x) = A(x) \exp i\varphi(x)$ и периодическое колебание

$$u_1^\circ = A(x) \cos [\omega t + \varphi(x)], \qquad u_2^\circ = A(x) \sin [\omega t + \varphi(x)] \tag{2.10}$$

Точные, полученные в замкнутой форме, решения (2.10) следует проверить на устойчивость. Малые возмущения $\xi_j = u_j - u_j^\circ$ $(j = 1,2)$ должны удовлетворять:

1) дифференциальным уравнениям на каждом участке

$$EI \frac{\partial^4 \xi_j}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial t^2} + \varkappa \frac{\partial \xi_j}{\partial t} = 0 \tag{2.11}$$

2) условиям сопряжения на нелинейных опорах при $x = l_r$ $(r = 1,\ldots,s)$

$$\xi_j (l_r + 0) = \xi_j (l_r - 0), \qquad \frac{\partial \xi_j (l_r + 0)}{\partial x} = \frac{\partial \xi_j (l_r - 0)}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} EI \left[\frac{\partial^2 \xi_j (l_r + 0)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \xi_j (l_r - 0)}{\partial x^2}\right] &= K_{1r} \frac{\partial^3 \xi_j}{\partial x \partial t^2} - i^{2j} \omega K_{0r} \frac{\partial^2 \xi_{j\pm1}}{\partial x \partial t} + \varkappa_{1r} \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial x \partial t} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial \xi_j}{\partial x} \left[\frac{1}{B_r} L_r (B_r) + \frac{\partial L_r (B_r)}{\partial B_r}\right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \xi_j}{\partial x}\, i^{2j} \cos 2 (\omega t + \psi_r) - \right. \\ &\left. - \frac{\partial \xi_{j\pm1}}{\partial x} \sin 2 (\omega t + \psi_r)\right] \left[\frac{1}{B_r} L_r (B_r) - \frac{\partial L_r (B_r)}{\partial B_r}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EI \left[\frac{\partial^3 \xi_j (l_r + 0)}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 \xi_j (l_r - 0)}{\partial x^3}\right] &= - m_r \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial t^2} - \varkappa_{2r} \frac{\partial \xi_j}{\partial t} - \frac{1}{2} \xi_j \left[\frac{1}{A_r} Q_r (A_r) + \frac{\partial Q_r}{\partial A_r}\right] - \\ - \frac{1}{2} [\xi_j i^{2j} \cos 2 (\omega t + \varphi_r) - \xi_{j\pm1} \sin 2 (\omega t + \varphi_r)] &\left[\frac{1}{A_r} Q_r (A_r) - \frac{\partial Q_r (A_r)}{\partial A_r}\right] \quad (j=1,2) \end{aligned} \tag{2.12}$$

где в нижних индексах знак (+) и берется при $j = 1$ и знак (—) при $j = 2$;

3) тем же краевым условиям, что и функции $u_j (x, t)$;

4) тем же, но однородным, линейным условиям сопряжения, что и функции $u_j (x, t)$ в местах расположения сосредоточенных масс, жестких или упруго-массовых опор с линейными характеристиками и т. д.

Зависимости (2.12), как нетрудно показать, являются уравнениями в вариациях для нелинейных условий сопряжений (2.2) при $x = l_r$. В отличие от остальных граничных условий для возмущений ξ_j в (2.12) входят члены с коэффициентами периода π / ω. Если модуляция этих коэффициентов невелика, характеристические показатели (1.15) определяются способом п. 1 с учетом сделанного там примечания