Прикладная математика и механика. Том 34. 1970

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

А. П. Проскуряков

(Москва)

Получены достаточные условия асимптотической устойчивости квазилинейных автономных систем, составленных из уравнений второго порядка. При этом порождающие системы могут иметь простые и кратные, соизмеримые между собой и частично несоизмеримые, а также нулевые частоты. Исследование проведено при помощи уравнений в вариациях для достаточно малых значений параметра μ.

1. Рассмотрим квазилинейную автономную систему с n степенями свободы

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}x_k^{\cdot\cdot} + c_{ik}x_k) = \mu F_i(x_1, \ldots, x_n, x_1^{\cdot}, \ldots, x_n^{\cdot}, \mu)$$
$$a_{ik} = a_{ki}, \qquad c_{ik} = c_{ki} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

Функции F_i предполагаются аналитическими от x_k и $x_k^{\cdot}$ в области их изменения, а также от малого параметра μ при $0 \leqslant \mu < \mu_0$.

Пусть порождающая система (при $\mu = 0$) представляет собой линейную консервативную систему с постоянными коэффициентами, кинетическая энергия которой выражается однородной определенно положительной квадратичной формой от скоростей, а потенциальная энергия — знакопостоянной формой того же знака от координат системы.

Частоты колебаний определяются из уравнения

$$\Delta(\omega^2) = |c_{ik} - \omega^2 a_{ik}| = 0 \tag{1.2}$$

При сформулированных условиях все корни этого уравнения — вещественные и неотрицательные. Среди этих корней могут быть кратные.

Выделим из всех частот порождающей системы какую-либо группу частот, соизмеримых между собой. Пусть в этой группе содержатся частоты с индексами от 1 до l, причем

$$\omega_r = k_r\omega_0 \qquad (r = 1, \ldots, l) \tag{1.3}$$

где k_r — целое положительное число. К этой же группе отнесем все нулевые частоты с индексами от $l + 1$ до m

$$\omega_r = 0 \qquad (r = l + 1, \ldots, m) \tag{1.4}$$

Во вторую группу будут входить все остальные частоты с индексами от $m + 1$ до n, несоизмеримые с частотами, имеющими индексы $r = 1, \ldots, l$. Эти частоты будем в дальнейшем кратко называть несоизмеримыми частотами.

Частота ω_0 является частотой выбранного одночастотного периодического решения порождающей системы, а $T_0 = 2\pi/\omega_0$ — периодом этого решения. Период решения квазилинейной системы (1.1) будет функцией малого параметра μ.

Порождающую систему всегда можно преобразовать к нормальным координатам. При этом квазилинейная система приводится к соответствующим квазинормальным координатам. При помощи преобразования времени период решения квазилинейной системы может быть сделан независящим от параметра μ и равным T_0. В результате этих преобразований система (1.1) будет иметь вид

$$z_r'' + \omega_r^2 z_r = \mu\Phi_r(z_1, \ldots, z_n, z_1', \ldots, z_n', \mu) \quad (r = 1, \ldots, n) \tag{1.5}$$

Одно из начальных условий примем: $z_1'(0) = 0$. Формулы для функций $z_r(\tau)$ будут [1,2]

$$z_r(\tau) = (A_{r0} + \beta_r)\cos\omega_r\tau + \frac{B_{r0} + \gamma_r}{\omega_r}\sin\omega_r\tau + \sum_{k=1}^{\infty}\left[C_{rk}(\tau) + \cdots\right]\mu^k$$
$$B_{10} = 0, \quad \gamma_1 = 0 \quad (r = 1, \ldots, l) \tag{1.6}$$

Величины β_r и γ_r равны нулю при $\mu = 0$. При $r = l + 1, \ldots, m$ функции $z_r(\tau)$ могут быть получены из формулы (1.6) предельным переходом $\omega_r \to 0$. При $r = m + 1, \ldots, n$, величины A_{r0} и B_{r0} равны нулю.

Функции $C_{rk}(\tau)$ определяются по формулам

$$C_{rk}(\tau) = \frac{1}{\omega_r}\int_0^{\tau} H_{rk}(\tau_1)\sin\omega_r(\tau - \tau_1)\,d\tau_1 \quad (r = 1, \ldots, l, m + 1, \ldots, n)$$
$$C_{rk}(\tau) = \int_0^{\tau} H_{rk}(\tau_1)(\tau - \tau_1)\,d\tau_1 \quad (r = l + 1, \ldots, m) \tag{1.7}$$

В дальнейшем потребуются только функции $C_{r1}(\tau)$ и их первые производные по τ при $\tau = T_0$. При этом $H_{r1}(\tau) = \Phi_r(z_{s0}\, z_{s0}', 0)$.

Для определения амплитуд A_{r0} и B_{r0} служит система уравнений

$$C_{r1}(T_0) = 0 \quad (r = 1, \ldots, l), \qquad C_{r1}'(T_0) = 0 \quad (r = 2, \ldots, m) \tag{1.8}$$

Предполагаем, что амплитудные уравнения имеют простые решения, т. е. функциональный определитель системы (1.8) отличен от нуля (аргумент T_0 опущен)

$$\Delta^* = \frac{D(C_{11}, \ldots, C_{l1}, C_{21}', \ldots, C_{m1}')}{D(A_{10}, \ldots, A_{m0}, B_{20}, \ldots, B_{l0})} \neq 0 \tag{1.9}$$

В этом случае все функции $z_r(\tau)$ разлагаются по целым степеням параметра μ.

Заметим, что из начального условия $z_1'(0) = 0$ следует $C_{11}'(T_0) = 0$. Так как это равенство удовлетворяется тождественно, то все производные от $C_{11}'(T_0)$ по A_{r0} и B_{r0} тоже равны нулю.

2. Составим уравнения в вариациях системы (1.5)

$$y_r'' + \omega_r^2 y_r = \mu \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial z_s} y_s + \frac{\partial \Phi_r}{\partial z_s'} y_s' \right) \quad (r = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

При этом в функции Φ_r подставлено исследуемое периодическое решение с периодом T_0.

Известно [3], что каждому корню характеристического уравнения системы (2.1) соответствует по крайней мере одно частное решение этой системы вида

$$y_r(\tau) = e^{\alpha_p \tau} u_r(\tau) \quad (r, p = 1, \ldots, n) \tag{2.2}$$

Здесь α_p — характеристические показатели, которые при $\mu = 0$ обращаются в корни фундаментального уравнения системы: $\alpha_{p0} = \pm i\omega_p$, а $u_r(\tau)$ — периодические функции от τ с периодом T_0. Каждому индексу p отвечают два значения α_p. Для кратного корня характеристического уравнения число независимых решений вида (2.2) равно числу групп, которыми обладает данный корень. Остальные значения α_p могут быть получены из линейно зависимых решений такого же вида.

Заменим в уравнениях (2.1) функции $y_r(\tau)$ по формуле (2.2). Получим

$$u_r'' + 2\alpha_p u_r' + (\alpha_p^2 + \omega_r^2) u_r = \mu \sum_{s=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial z_s} + \alpha_p \frac{\partial \Phi_r}{\partial z_s'} \right) u_s + \frac{\partial \Phi_r}{\partial z_s'} u_s' \right]$$
$$(r = 1, \ldots, n) \tag{2.3}$$

Решение этого уравнения при $\mu = 0$ ищем в виде

$$u_{r0}(\tau) = U_r e^{i\nu_r \tau} \tag{2.4}$$

Подставляя это выражение в уравнение, находим возможные значения величины ν_r

$$\nu_{r1} = \mp(\omega_p - \omega_r), \qquad \nu_{r2} = \mp(\omega_p + \omega_r) \tag{2.5}$$

Следовательно, если индексы r и p принадлежат к разным группам индексов: $(1, \ldots, m)$ и $(m + 1, \ldots, n)$, то при $\mu = 0$ периодическое решение уравнения (2.3) с периодом T_0 может быть только тождественно равным нулю: $u_{r0}(\tau) = 0$. Это позволяет приближенно вычислять характеристические показатели α_p для групп соизмеримых и несоизмеримых частот независимо друг от друга.

Элементарные делители матрицы (1.2) при сформулированных выше условиях всегда простые. Следовательно, число групп любого кратного корня ω^2 уравнения (1.2) всегда равно кратности этого корня. Это же относится и к самим частотам ω, если они не равны нулю. Однако нулевые частоты объединяются попарно в группы из двух частот. Поэтому для нулевых частот элементарные делители матрицы (1.2) имеют вторую степень. Матрица фундаментального уравнения системы (2.1) имеет такие же элементарные делители, как матрица (1.2) по отношению к частотам ω.

Существует ряд работ по устойчивости квазилинейных систем, составленных из уравнений первого порядка [4–8].

В работе [8] показано, что характеристические показатели α_p и функции $u_r(\tau)$ могут быть разложены по целым степеням $\mu^{1/\gamma}$, где γ кратность элементарных делителей соответствующего корня фундаментального уравнения системы (2.1). При этом должны быть выполнены два дополнительные условия, о которых будет сказано ниже.

Таким образом, для ненулевых частот величины α_p и $u_r(\tau)$ нужно искать в виде рядов по целым степеням параметра μ. Если индекс характеристического показателя α_p принимает значения от 1 до l, то постоянная часть показателя $\alpha_{p0} = \pm i\omega_p$ может быть опущена. Это вытекает из того, что величина $\exp(\alpha_{p0}\tau)$ является периодической функцией τ с периодом T_0 и может быть включена в соответствующие функции $u_r(\tau)$. Итак, имеем

$$\alpha_p = \alpha_{p1}\mu + \ldots \quad (p = 1, \ldots, l), \qquad \alpha_p = \alpha_{p0} + \alpha_{p1}\mu + \ldots \quad (p = m+1, \ldots, n)$$
$$u_r(\tau) = u_{r0}(\tau) + \mu u_{r1}(\tau) + \ldots \quad (r = 1, \ldots, l, m+1, \ldots, n) \tag{2.6}$$

Для нулевых частот разложение соответствующих величин следует искать в виде рядов по целым степеням $\mu^{1/2}$. Введем вместо функций $u_r(\tau)$ функции $v_r(\tau)$. Так как в данном случае $\alpha_{p0} = 0$, то

$$\alpha_p = \alpha_{p1/2}\mu^{1/2} + \alpha_{p1}\mu + \ldots \quad (r, p = l+1, \ldots, m)$$
$$v_r(\tau) = v_{r0}(\tau) + \mu^{1/2} v_{r1/2}(\tau) + \mu v_{r1}(\tau) + \ldots \tag{2.7}$$

В дальнейшем будем вычислять коэффициенты разложений показателей α_p до коэффициента α_{p1} включительно.

3. Найдем коэффициенты α_{p1} характеристических показателей при $p = 1, \ldots, l$. Так как при этом $\alpha_{p0} = 0$, то

$$\begin{aligned} &u_{r0}(\tau) = P_r \cos\omega_r\tau + \frac{Q_r}{\omega_r}\sin\omega_r\tau \quad (r = 1, \ldots, l) \\ &u_{r0}(\tau) = P_r \quad (r = l+1, \ldots, m) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Составим уравнение для функций $u_{r1}(\tau)$ при $r = 1, \ldots, l$

$$u_{r1}'' + \omega_r^2 u_{r1} = -2\alpha_{p1}u_{r0}' + \sum_{s=1}^{m}\left(\frac{\partial\Phi_r}{\partial z_s}\right)_0 u_{s0} + \sum_{s=1}^{l}\left(\frac{\partial\Phi_r}{\partial z_s'}\right)_0 u_{s0}' \tag{3.2}$$

Значок «0» у производных от функций Φ_r означает, что в эти производные вместо z_s, z_s' и μ подставлено z_{s0}, z_{s0}' и 0.

Преобразуем правую часть уравнения (3.2). Имеем очевидные соотношения

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial A_{s0}}\right)_0 = \left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial z_s}\right)_0 \cos\omega_s\tau - \left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial z_s'}\right)_0 \omega_s \sin\omega_s\tau \qquad (s=1,\ldots,m)\\ &\left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial B_{s0}}\right)_0 = \frac{1}{\omega_s}\left[\left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial z_s}\right)_0 \sin\omega_s\tau + \left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial z_s'}\right)_0 \omega_s \cos\omega_s\tau\right] \qquad (s=2,\ldots,l)\end{aligned} \tag{3.3}$$

Исходя из этих формул, нетрудно получить еще одно соотношение

$$\frac{1}{A_{10}\omega_1^2}\left\{\sum_{s=2}^{l}\left[B_{s0}\left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial A_{s0}}\right)_0 - A_{s0}\omega_s^2\left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial B_{s0}}\right)_0\right] - \left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial \tau}\right)_0\right\} =$$

$$= \left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial z_1}\right)_0 \sin\omega_1\tau + \left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial z_1'}\right)_0 \omega_1\cos\omega_1\tau \tag{3.4}$$

Подставим в правую часть уравнения (3.2) значения $u_{s0}(\tau)$ и $u_{s0}'(\tau)$ по формулам (3.1) и воспользуемся предыдущими соотношениями. Имеем

$$u_{r1}'' + \omega_r^2 u_{r1} = -2\alpha_{p1}(P_r\omega_r\sin\omega_r\tau + Q_r\cos\omega_r\tau) + \sum_{s=1}^{m} P_s\left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial A_{s0}}\right)_0 +$$

$$+\sum_{s=2}^{l} Q_s\left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial B_{s0}}\right)_0 + \frac{Q_1}{A_{10}\omega_1^2}\left\{\sum_{s=2}^{l}\left[B_{s0}\left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial A_{s0}}\right)_0 - A_{s0}\omega_s^2\left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial B_{s0}}\right)_0\right] - \left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial \tau}\right)_0\right\}$$

$$(r=1,\ldots,l) \tag{3.5}$$

Составим условия периодичности функций $u_{r1}(\tau)$. Для этого умножим правые части уравнения (3.5) последовательно на $\sin\omega_r\tau/\omega_r$ и $\cos\omega_r\tau$, проинтегрируем эти выражения от нуля до T_0 и приравняем их нулю. При этом используем формулы (1.8).

Так как все производные от $C_{11}'(T_0)$ по A_{s0} и B_{s0} равны нулю, то одно из условий периодичности при $r = 1$ будет иметь вид: $Q_1\alpha_{p1}T_0 = 0$. Следовательно, если $Q_1 \neq 0$, то

$$\alpha_{p1} = 0 \tag{3.6}$$

Этот коэффициент отвечает нулевому характеристическому показателю, который всегда имеется у автономных систем.

При $Q_1 = 0$ остальные условия периодичности будут

$$\begin{aligned}&\sum_{s=1}^{m} P_s\left[\frac{\partial C_{r1}(T_0)}{\partial A_{s0}} - \delta_{sr}\alpha_{p1}T_0\right] + \sum_{s=2}^{l} Q_s\frac{\partial C_{r1}(T_0)}{\partial B_{s0}} = 0 \qquad (r=1,\ldots,l)\\ &\sum_{s=1}^{m} P_s\frac{\partial C_{r1}'(T_0)}{\partial A_{s0}} + \sum_{s=2}^{l} Q_s\left[\frac{\partial C_{r1}'(T_0)}{\partial B_{s0}} - \delta_{sr}\alpha_{p1}T_0\right] = 0 \qquad (r=2,\ldots,m)\end{aligned} \tag{3.7}$$

Здесь δ_{sr} — символ Кронекера: $\delta_{sr} = 0$ при $s \neq r$, а $\delta_{rr} = 1$.

Система (3.7) является линейной однородной системой $l + m - 1$ уравнений относительно P_s $(s = 1, \ldots, m)$ и Q_s $(s = 2, \ldots, l)$. Условием нетривиальности решения этих уравнений является равенство нулю определителя системы (3.7).

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial M_{11}}{\partial A_{10}} & \cdots & \frac{\partial C_{11}}{\partial A_{l0}} & \frac{\partial C_{11}}{\partial B_{20}} & \cdots & \frac{\partial C_{11}}{\partial B_{l0}} & \frac{\partial C_{11}}{\partial A_{l+1,0}} & \cdots & \frac{\partial C_{11}}{\partial A_{m0}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial C_{l1}}{\partial A_{10}} & \cdots & \frac{\partial M_{l1}}{\partial A_{l0}} & \frac{\partial C_{l1}}{\partial B_{20}} & \cdots & \frac{\partial C_{l1}}{\partial B_{l0}} & \frac{\partial C_{l1}}{\partial A_{l+1,0}} & \cdots & \frac{\partial C_{l1}}{\partial A_{m0}} \\ \frac{\partial C_{21}'}{\partial A_{10}} & \cdots & \frac{\partial C_{21}'}{\partial A_{l0}} & \frac{\partial M_{21}'}{\partial B_{20}} & \cdots & \frac{\partial C_{21}'}{\partial B_{l0}} & \frac{\partial C_{21}'}{\partial A_{l+1,0}} & \cdots & \frac{\partial C_{21}'}{\partial A_{m0}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial C_{l1}'}{\partial A_{10}} & \cdots & \frac{\partial C_{l1}'}{\partial A_{l0}} & \frac{\partial C_{l1}'}{\partial B_{20}} & \cdots & \frac{\partial M_{l1}'}{\partial B_{l0}} & \frac{\partial C_{l1}'}{\partial A_{l+1,0}} & \cdots & \frac{\partial C_{l1}'}{\partial A_{m0}} \\ \frac{\partial C_{l+1,1}'}{\partial A_{10}} & \cdots & \frac{\partial C_{l+1,1}'}{\partial A_{l0}} & \frac{\partial C_{l+1,1}'}{\partial B_{20}} & \cdots & \frac{\partial C_{l+1,1}'}{\partial B_{l0}} & \frac{\partial C_{l+1,1}'}{\partial A_{l+1,0}} & \cdots & \frac{\partial C_{l+1,1}'}{\partial A_{m0}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial C_{m1}'}{\partial A_{10}} & \cdots & \frac{\partial C_{m1}'}{\partial A_{l0}} & \frac{\partial C_{m1}'}{\partial B_{20}} & \cdots & \frac{\partial C_{m1}'}{\partial B_{l0}} & \frac{\partial C_{m1}'}{\partial A_{l+1,0}} & \cdots & \frac{\partial C_{m1}'}{\partial A_{m0}} \end{vmatrix} = 0 \tag{3.8}$$

Порядок строк и столбцов в определителе Δ_1 несколько изменен. Аргумент T_0 у величин $C_{r1}(T_0)$ и $C_{r1}'(T_0)$ опущен. Кроме того, для сокращения введены обозначения

$$\frac{\partial M_{r1}}{\partial A_{r0}} = \frac{\partial C_{r1}}{\partial A_{r0}} - \alpha_{p1}T_0, \qquad \frac{\partial M_{r1}'}{\partial B_{r0}} = \frac{\partial C_{r1}'}{\partial B_{r0}} - \alpha_{p1}T_0 \tag{3.9}$$

Развернув этот определитель, получим уравнение $2l - 1$ степени относительно α_{p1} $(p = 1, \ldots, l)$, из которого находятся остальные $2l - 1$ значений (помимо нулевого) этого коэффициента характеристических показателей. Свободный член уравнения (3.8) совпадает с функциональным определителем (1.9) амплитудных уравнений, который по предположению не равен нулю. Таким образом, среди коэффициентов α_{p1} $(p = 1, \ldots, l)$ имеется только один равный нулю.

Одно из двух дополнительных условий [8] возможности разложения характеристических показателей в данном случае по целым степеням параметра μ при $p = 1, \ldots, l$ заключается в линейной независимости между собой последних строк (или столбцов) определителя (3.8), не содержащих коэффициента α_{p1}. Это условие выполняется в силу (1.9).

Второе условие требует, чтобы все корни детерминантного уравнения $\Delta_1 = 0$ для первого коэффициента α_{p1} были простые. Предположим, что это условие выполнено.

4. Переходим к определению характеристических показателей при $p = l + 1, \ldots, m$. При этом воспользуемся разложениями (2.7) для α_p и $v_r(\tau)$.

Функции $v_{r0}(\tau)$ будут

$$v_{r0}(\tau) = R_{r0}\cos\omega_r\tau + \frac{S_{r0}}{\omega_r}\sin\omega_r\tau \qquad (r = 1, \ldots, l)$$

$$v_{r0}(\tau) = R_{r0} \qquad (r = l + 1, \ldots, m) \tag{4.1}$$

Имеем уравнения для функций $v_{r^{1/2}}(\tau)$

$$v_{r^{1/2}}'' + \omega_r^2 v_{r^{1/2}} = -2\alpha_{p^{1/2}} v_{r0}' \quad (r = 1, \ldots, l), \quad v_{r^{1/2}}'' = 0 \quad (r = l+1, \ldots, m)$$

Предполагаем, что $\alpha_{p^{1/2}} \neq 0$. Тогда из условий периодичности функций $v_{r^{1/2}}(\tau)$ при $r = 1, \ldots, l$ следует, что

$$v_{r0}(\tau) = 0 \qquad (r = 1, \ldots, l) \tag{4.2}$$

Таким образом

$$v_{r^{1/2}}(\tau) = R_{r^{1/2}} \cos \omega_r \tau + \frac{S_{r^{1/2}}}{\omega_r} \sin \omega_r \tau \qquad (r = 1, \ldots, l)$$

$$v_{r^{1/2}}(\tau) = R_{r^{1/2}} \qquad (r = l+1, \ldots, m) \tag{4.3}$$

Составим уравнения для функций $v_{r1}(\tau)$. Имеем

$$v_{r1}'' + \omega_r^2 v_{r1} = -2\alpha_{p^{1/2}} v_{r^{1/2}}' + \sum_{s=l+1}^{m} \left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial z_s}\right)_0 v_{s0} \qquad (r = 1, \ldots, l) \tag{4.4}$$

$$v_{r1}'' = -\alpha_{p^{1/2}}^2 v_{r0} + \sum_{s=l+1}^{m} \left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial z_s}\right)_0 v_{s0} \qquad (r = l+1, \ldots, m) \tag{4.5}$$

Из условий периодичности функций $v_{r1}'(\tau)$ при $r = l+1, \ldots, m$ получим

$$\sum_{s=l+1}^{m} R_{s0} \frac{\partial C_{r1}'}{\partial A_{s0}} - \alpha_{p^{1/2}}^2 T_0 R_{r0} = 0 \qquad (r = l+1, \ldots, m) \tag{4.6}$$

Эта система линейных однородных уравнений относительно R_{s0} имеет нетривиальное решение при условии

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial C_{l+1,1}'}{\partial A_{l+1,0}} - \alpha_{p^{1/2}}^2 T_0 & \ldots & \dfrac{\partial C_{l+1,1}'}{\partial A_{m0}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial C_{m1}'}{\partial A_{l+1,0}} & \ldots & \dfrac{\partial C_{m1}'}{\partial A_{m0}} - \alpha_{p^{1/2}}^2 T_0 \end{vmatrix} = 0 \tag{4.7}$$

Развертывая определитель, получим уравнение $m - l$ степени относительно $\alpha_{p^{1/2}}^2$ при $p = l+1, \ldots, m$. Предположим, что все корни этого уравнения отрицательные. Тогда все коэффициенты $\alpha_{p^{1/2}}$ будут чисто мнимыми.

В данном случае первое условие разложимости показателя α_p по целым степеням $\mu^{1/2}$ выполняется автоматически. Второе условие относительно некратности корней детерминантного уравнения $\Delta_2 = 0$ будем предполагать выполненным.

Любому значению индекса «r» следует поставить в соответствие определенное значение индекса «p», например, можно положить $p = r$. Тогда из системы (4.6) для каждого значения $\alpha_{p^{1/2}}^2$ можно определить отношения величин R_{s0} к одной из них, взятой произвольно, например, $R_{s0}^* = R_{s0}/R_{m0}$. Если все корни уравнения (4.7) простые, то каждому корню будет соответствовать своя система значений R_{s0}^* $(s = l+1, \ldots, m)$.

Условия периодичности для функций $v_{r1}(\tau)$ при $r = 1, \ldots, l$ будут

$$\alpha_{p^{1/2}} T_0 R_{r^{1/2}} = \sum_{s=l+1}^{m} R_{s0} \frac{\partial C_{r1}}{\partial A_{s0}}, \qquad \alpha_{p^{1/2}} T_0 S_{r^{1/2}} = \sum_{s=l+1}^{m} R_{s0} \frac{\partial C_{r1}'}{\partial A_{s0}} \qquad (r = 1, \ldots, l) \tag{4.8}$$

Из второй формулы (4.8) следует, что $S_{1^{1/2}} = 0$. Наконец, составим уравнения для функций $v_{r^{3/2}}(\tau)$ при $r = l + 1, \ldots, m$. Имеем

$$v_{r^{3/2}}'' = -2\alpha_{p^{1/2}} v_{r1}' - \alpha_{p^{1/2}}^2 v_{r^{1/2}} - 2\alpha_{p^{1/2}} \alpha_{p1} v_{r0} + \sum_{s=1}^{m} \left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial z_s}\right)_0 v_{s^{1/2}} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{l} \left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial z_s'}\right)_0 v_{s^{1/2}}' + \alpha_{p^{1/2}} \sum_{s=l+1}^{m} \left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial z_s'}\right)_0 v_{s0} \qquad (r = l+1, \ldots, m) \tag{4.9}$$

Сделаем одно замечание. Если в уравнениях (4.6) заменим величины R_{r0} на $R_{r^{1/2}}$, то все заключения, которые относились к уравнениям (4.6) сохранятся в силе для новых уравнений. Поэтому каждую сумму членов вида

$$\sum_{s=l+1}^{m} R_{s^{1/2}} \frac{\partial C_{r1}'}{\partial A_{s0}} - \alpha_{p^{1/2}}^2 T_0 R_{r^{1/2}} \qquad (r = l+1, \ldots, m)$$

можно обратить в нуль соответствующим выбором отношений $R_{s^{1/2}}/R_{m^{1/2}}$ если $\alpha_{p^{1/2}}^2$ является одним из корней уравнения (4.7).

Учитывая это замечание, а также формулы (3.3) и (4.8), из условия периодичности функции $v_{r^{3/2}}'(\tau)$ при $r = l + 1, \ldots, m$ получим

$$2\alpha_{p1} T_0 R_{r0}^* = \qquad (r, p = l+1, \ldots, m) \tag{4.10}$$

$$= \sum_{s=l+1}^{m} R_{s0}^* \left[\int_0^{T_0} \left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial z_s'}\right)_0 d\tau + \frac{1}{\alpha_{p^{1/2}}^2 T_0} \left(\sum_{k=1}^{l} \frac{\partial C_{k1}}{\partial A_{s0}} \frac{\partial C_{r1}'}{\partial A_{k0}} + \sum_{k=2}^{l} \frac{\partial C_{k1}'}{\partial A_{s0}} \frac{\partial C_{r1}'}{\partial B_{k0}}\right)\right]$$

Формула (4.10) определяет $2(m - l)$ попарно равных друг другу значений вещественного коэффициента α_{p1} при $p = l + 1, \ldots, m$.

5. Наконец рассмотрим характеристические показатели при $p = m+1, \ldots, n$, отвечающие несоизмеримым частотам. При этом коэффициенты $\alpha_{p0} = \pm i\omega_p$. Для вычисления коэффициентов α_{p1} разобьем группу несоизмеримых частот на отдельные подгруппы. В каждую подгруппу включим какую-либо частоту ω_r и все равные ей частоты, а также частоты, удовлетворяющие одному из соотношений

$$|\omega_r - \omega_s| = c_s \omega_0, \quad \omega_r + \omega_s = c_s \omega_0 \tag{5.1}$$

где c_s — целое положительное число. Таким образом, каждая из несоизмеримых частот будет входить только в одну из подгрупп. Число подгрупп может равняться от одной до $n - m$. Для каждой подгруппы возможны три случая.

а) В подгруппе имеется только одна частота ω_r. Тогда все $u_{r0}(\tau) = 0$ при $r \neq p$ и только при $r = p$ имеем $u_{r0}(\tau) = U_r$. В этом случае из условия периодичности функции $u_{r1}(\tau)$ при $r = p$ получим два комплексно сопряженных значения коэффициента α_{r1} [9].

$$2\alpha_{r1}T_0 = \int_0^{T_0} \left[\left(\frac{\partial\Phi_r}{\partial z_r'}\right)_0 \mp \frac{i}{\omega_r}\left(\frac{\partial\Phi_r}{\partial z_r}\right)_0\right] d\tau \tag{5.2}$$

б) В подгруппу входит только кратная частота ω_r кратности j. Имеем следующее детерминантное уравнение для определения коэффициентов α_{p1}.

$$\left| \int_0^{T_0} \left[\left(\frac{\partial\Phi_q}{\partial z_s'}\right)_0 \mp \frac{i}{\omega_r}\left(\frac{\partial\Phi_q}{\partial z_s}\right)_0\right] d\tau - 2\delta_{qs}\alpha_{p1}T_0 \right| = 0$$
$$(p, q, s = r, \ldots, r + j - 1) \tag{5.3}$$

Из уравнения (5.3) находятся $2j$ комплексно сопряженных значений коэффициента α_{p1}.

в) Рассмотрим общий случай, когда помимо простой или кратной частоты ω_r в подгруппу входят частоты, удовлетворяющие соотношениям (5.1). Функции $u_{r0}(\tau)$ для данных частот определяются по формулам (2.4) и (2.5). Составим уравнение для функций $u_{r1}(\tau)$

$$u_{r1}'' + 2\alpha_{p0}u_{r1}' + (\alpha_{p0}^2 + \omega_r^2)u_{r1} = -2\alpha_{p1}(\alpha_{p0} + i\nu_r)U_r e^{i\nu_r\tau} +$$
$$+ \sum_{s=m+k_i}^{m+k_j} \left\{\left[\left(\frac{\partial\Phi_r}{\partial z_s}\right)_0 + (\alpha_{p0} + i\nu_s)\left(\frac{\partial\Phi_r}{\partial z_s'}\right)_0\right] U_s e^{i\nu_s\tau}\right\} \tag{5.4}$$

В последней сумме индекс «s» принимает все значения, относящиеся к рассматриваемой подгруппе. Левая часть уравнения (5.4) имеет такой же вид, как левая часть уравнения для $u_{r0}(\tau)$. Поэтому условие периодичности функции $u_{r1}(\tau)$, получим, если правую часть уравнения (5.4) умножим на $\exp(-i\nu_r\tau)$, проинтегрируем от 0 до T_0 и приравняем нулю. Имеем

$$\sum_{s=m+k_i}^{m+k_j} \left\{\int_0^{T_0} \left[\left(\frac{\partial\Phi_r}{\partial z_s}\right)_0 + (\alpha_{p0} + i\nu_s)\left(\frac{\partial\Phi_r}{\partial z_s'}\right)_0\right] e^{i(\nu_s-\nu_r)\tau} d\tau \cdot U_s\right\} -$$
$$- 2\alpha_{p1}(\alpha_{p0} + i\nu_r)T_0U_r = 0 \tag{5.5}$$

Для основной частоты ω_r и частот, связанных с ней первым соотношением (5.1), подставим значение $\nu_r = \nu_{r1}$ из формулы (2.5), а для частот, связанных с основной частотой вторым соотношением (5.1) — значение $\nu_r = \nu_{r2}$. Тогда для определения коэффициента α_{p1} получим уравнение

$$\left| \int_0^{T_0} \left[\left(\frac{\partial\Phi_r}{\partial z_s}\right)_0 \pm \alpha_{s0}\left(\frac{\partial\Phi_r}{\partial z_s'}\right)_0\right] e^{(\pm\alpha_{s0}\mp\alpha_{r0})\tau} d\tau \mp 2\delta_{sr}\alpha_{p1}\alpha_{r0}T_0 \right| = 0$$
$$(p, r, s = m + k_i, \ldots, m + k_j) \tag{5.6}$$

В этом уравнении верхние знаки относятся к частотам, связанным с основной частотой первым соотношением (5.1), а нижние знаки — вторым соотношением (5.1). Из уравнения (5.6) находятся 2 $(k_j - k_i)$ комплексно сопряженных значений коэффициента α_{p1}. Так же, как и раньше допускаем, что корни уравнения (5.6) простые.

Заключение. При достаточно малых значениях параметра μ можно сделать следующие выводы. Достаточными условиями асимптотической устойчивости периодических решений квазилинейной автономной системы (1.1) или, что то же самое, системы (1.5) при сформулированных в п. 1 предположениях относительно частот порождающей системы являются: 1) Мнимость всех коэффициентов $\alpha_{p^1/_2}$ характеристических показателей при $p = l + 1, \ldots, m$; 2) Отрицательность вещественных частей всех коэффициентов α_{p1} при $p = 1, \ldots, n$ за исключением одного, равного нулю.

При этом принималось, что детерминантные уравнения для α_{p1} при $p = 1, \ldots, l, m + 1, \ldots, n$ и для $\alpha_{p^1/_2}$ при $p = l + 1, \ldots, m$ имеют простые корни. В случае кратных корней этих уравнений характеристические показатели могут разлагаться по другим, чем предполагалось, степеням параметра μ.

Поступила 14 IV 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Проскуряков А. П. К построению периодических решений квазилинейных автономных систем с несколькими степенями свободы. ПММ, 1962, т. 26, вып. 2.
2. Проскуряков А. П. Построение периодических решений квазилинейных автономных систем с несколькими степенями свободы в особых случаях. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.
3. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
4. Блехман И. И. К вопросу об устойчивости периодических решений квазилинейных систем со многими степенями свободы. Докл. АН СССР, 1955, т. 104, № 6.
5. Блехман И. И. Об устойчивости периодических решений квазилинейных автономных систем со многими степенями свободы. Докл. АН СССР, 1957, т. 112, № 2.
6. Шиманов С. Н. К вопросу об отыскании характеристических показателей систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Докл. АН СССР, 1956, т. 109, № 6.
7. Шиманов С. Н. Об отыскании характеристических показателей систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. ПММ, 1958, т. 22, вып. 3.
8. Кушуль М. Я. О квазигармонических системах, близких к системам с постоянными коэффициентами, у которых чисто мнимые корни фундаментального уравнения имеют непростые элементарные делители. ПММ, 1958, т. 22, вып. 4.
9. Проскуряков А. П. Устойчивость одночастотных периодических решений квазилинейных автономных систем с двумя степенями свободы. ПММ, 1965, т. 29, вып. 5.