

ПОГРАНСЛОЙ И ЕГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С ВНУТРЕННИМ НАПРЯЖЕННЫМ СОСТОЯНИЕМ УПРУГОЙ ТОНКОЙ ОБОЛОЧКИ

А. Л. Гольденвейзер

(Москва)

Теория внутреннего напряженного состояния, построенная в [1], в соответствии со схемой, описанной в [2], дополняется асимптотической теорией погранслоя (теорией краевых напряженных состояний) и решается вопрос о взаимодействии погранслоя с внутренним напряженным состоянием для тонкой упругой изотропной оболочки.

В конце формулируется двумерная линейная теория тонких упругих оболочек. Она основана на результатах предлагаемой работы и работы [1] и представляет собой обобщение классической теории оболочек в том смысле, что позволяет точнее строить внутреннее напряженное состояние и с некоторым приближением исследовать краевые упругие явления, не учитываемые классической теорией. По предлагаемому методу расчет внутреннего напряженного состояния выполняется при помощи несущественно модифицированных уравнений и граничных условий классической теории, а расчет краевых напряжений сводится к построению линейной комбинации из решения некоторых вспомогательных плоских и антиплоских задач со стандартными условиями, не зависящими от геометрических свойств оболочки и от характера ее загрузки.

1. Будем пользоваться триортогональной системой координат $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, задавая точку радиус-вектором P по формуле

$$P = M(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 n \quad (1.1)$$

где $M(\alpha_1, \alpha_2)$ — радиус-вектор некоторой поверхности, отнесенной к линиям кривизны, а n — единичный вектор нормали этой поверхности.

Поверхности $\alpha_3 = 0$, $\alpha_3 = \pm h$ назовем соответственно срединной поверхностью и лицевыми поверхностями оболочки. Под константой h подразумевается полутолщина оболочки.

Обозначим через σ_{ij} и v_i — напряжения и перемещения в выбранной системе координат и рассмотрим две следующие группы величин:

$$\begin{aligned} S_{11} &= (1 + \alpha_3 / R_2) \sigma_{11}, & S_{13} &= (1 + \alpha_3 / R_2) \sigma_{13}, & S_{22} &= (1 + \alpha_3 / R_1) \sigma_{22} \\ S_{33} &= (1 + \alpha_3 / R_1) (1 + \alpha_3 / R_2) \sigma_{33}, & U_1 &= h^{-1} v_1, & U_3 &= h^{-1} v_3 \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} T_{12} &= (1 + \alpha_3 / R_1) \sigma_{12}, & T_{21} &= (1 + \alpha_3 / R_2) \sigma_{21}, & T_{23} &= (1 + \alpha_3 / R_1) \sigma_{23} \\ & & V_2 &= h^{-1} v_2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Этими формулами симметричные напряжения σ_{ij} заменены несимметричными напряжениями S_{ij} , T_{pq} , а истинные перемещения v_i заменены безразмерными перемещениями U_1 , V_2 , U_3 . Кроме того, напряжения и безразмерные перемещения разбиты на две группы, которые впоследствии будут обозначаться буквами S и T соответственно

$$S = (S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{13}, U_1, U_3), \quad T = (T_{12}, T_{21}, T_{23}, V_2) \quad (1.4)$$

2. Рассмотрим дифференциальные уравнения теории упругости для изотропного тела. В произвольной триортогональной системе координат при условии отсутствия массовых сил их можно записать так:
уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} (H_j H_k \sigma_{ij}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_j} (H_i H_k \sigma_{ij}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_k} (H_i H_j \sigma_{ik}) - \\ - H_k \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_i} \sigma_{jj} - H_j \frac{\partial H_k}{\partial \alpha_i} \sigma_{kk} + H_k \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} \sigma_{ji} + H_j \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_k} \sigma_{ki} = 0 \\ (i \neq j \neq k = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

закон Гука

$$\begin{aligned} E \left(\frac{1}{H_i} \frac{\partial v_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} v_j + \frac{1}{H_i H_k} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_k} v_k \right) = \sigma_{ii} - \nu (\sigma_{jj} + \sigma_{kk}) \\ E \left[\frac{H_i}{H_j} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{v_i}{H_i} \right) + \frac{H_j}{H_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{v_j}{H_j} \right) \right] = 2(1 + \nu) \sigma_{ij} \\ (i \neq j \neq k = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

Заменив здесь σ_{ij} и v_i на S, T по формулам (1.2), (1.3) и считая, что выбраны координаты (1.1), получим систему уравнений, которую можно коротко записать так:

$$N_n(S, T) = 0 \quad (n = 1, \dots, 6), \quad M_m(S, T) = 0 \quad (m = 1, 2, 3, 4) \quad (2.1)$$

Принятые здесь обозначения расшифровываются следующими формулами:

$$\begin{aligned} N_1(S, T) &= \partial_1 S_{11} + \partial_2 T_{12} + (1 + \alpha_3 / R_1) \partial_3 S_{13} + k_2(S_{11} - S_{22}) + \\ &\quad + k_1(T_{12} + T_{21}) + 2S_{13} / R_1 \\ M_1(S, T) &= \partial_1 T_{21} + \partial_2 S_{22} + (1 + \alpha_3 / R_2) \partial_3 T_{23} + k_1(S_{22} - S_{11}) + \\ &\quad + k_2(T_{12} + T_{21}) + 2T_{23} / R_2 \\ N_2(S, T) &= \partial_1 S_{31} + \partial_2 T_{32} + \partial_3 S_{33} + k_2 S_{13} + k_1 T_{23} - S_{11} / R_1 - S_{22} / R_2 \\ N_3(S, T) &= E(1 + \alpha_3 / R_2) (\partial_1 U_1 + k_1 V_2 + U_3 / R_1) - \\ &\quad - h^{-1} [(1 + \alpha_3 / R_1) \{S_{11} - \nu(1 + \alpha_3 / R_2) S_{22} - \nu S_{33}\}] \\ N_4(S, T) &= E(1 + \alpha_3 / R_1) (\partial_2 V_2 + k_2 U_1 + U_3 / R_2) - h^{-1} [(1 + \alpha_3 / R_2) S_{22} - \\ &\quad - \nu(1 + \alpha_3 / R_1) S_{11} - \nu S_{33}] \\ N_5(S, T) &= E(1 + \alpha_3 / R_1) (1 + \alpha_3 / R_2) \partial_3 U_3 - \\ &\quad - h^{-1} [S_{33} - \nu(1 + \alpha_3 / R_1) S_{11} - \nu(1 + \alpha_3 / R_2) S_{22}] \\ M_2(S, T) &= E[(1 + \alpha_3 / R_1) \partial_2 U_1 + (1 + \alpha_3 / R_2) \partial_1 V_2 - k_1(1 + \alpha_3 / R_2) U_1 - \\ &\quad - k_2(1 + \alpha_3 / R_1) V_2] - 2h^{-1}(1 + \nu)(1 + \alpha_3 / R_1) T_{21} \quad (2.2) \\ M_3(S, T) &= E[(1 + \alpha_3 / R_2) \partial_1 V_2 + (1 + \alpha_3 / R_1) \partial_2 U_1 - k_2(1 + \alpha_3 / R_1) V_2 - \\ &\quad - k_1(1 + \alpha_3 / R_2) U_1] - 2h^{-1}(1 + \nu)(1 + \alpha_3 / R_2) T_{12} \\ N_6(S, T) &= E(1 + \alpha_3 / R_2) [(1 + \alpha_3 / R_1) \partial_3 U_1 - U_1 / R_1 + \partial_1 U_3] - \\ &\quad - 2h^{-1}(1 + \nu)(1 + \alpha_3 / R_1) S_{13} \\ M_4(S, T) &= E(1 + \alpha_3 / R_1) [(1 + \alpha_3 / R_2) \partial_3 V_2 - V_2 / R_2 + \partial_2 U_3] - \\ &\quad - 2h^{-1}(1 + \nu)(1 + \alpha_3 / R_2) T_{23} \end{aligned}$$

где

$$\partial_i = \frac{1}{A_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \quad (i = 1, 2); \quad \partial_3 = \frac{\partial}{\partial \alpha_3}, \quad k_j = \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} \quad (i \neq j = 1, 2) \quad (2.3)$$

В системе (2.1), (2.2) уравнения $M_2 = 0$ и $M_3 = 0$, повторяют одно другое, в чем можно убедиться, расшифровав величины T_{12} и T_{21} по формулам (1.3)

3. Под погранслоем подразумевается такое напряженно-деформированное состояние, которое локализуется вблизи некоторого нормального (образованного нормальными срединной поверхности) сечения оболочки, затухая при удалении от него.

Будем предполагать, что это нормальное сечение задается уравнением $\alpha_1 = 0$. (Область применимости предлагаемой теории тем самым ограничивается предположением, что погранслоем возникает вблизи линии кривизны.) Примем для определенности, что параметры (α_1, α_2) имеют размерность длины и выбраны так, что A_1, A_2 соизмеримы с единицей, т. е. что длины дуг линий на поверхности соизмеримы с соответствующими им приращениями параметров (α_1, α_2) . Последнее условие достаточно выполнить лишь вблизи $\alpha_1 = 0$, где строится погранслоем, и, следовательно, это новое ограничение общности не существенно.

Введем замену независимых переменных по формулам

$$\alpha_1 = R\kappa^{-q}\xi_1, \quad \alpha_2 = R\kappa^{-p}\xi_2, \quad \alpha_3 = R\kappa^{-q}\zeta \quad (3.1)$$

где R — характерный радиус кривизны срединной поверхности, κ — большой безразмерный параметр, а p и q — целые числа, которые выбираются так, чтобы выполнялись равенства

$$\kappa^{-q} = h_* = h/R, \quad \kappa^{-p} = h_*^t, \quad t = p/q \quad (3.2)$$

В дальнейшем считается, что R соизмерим с единицей в выбранном масштабе длины и что дифференцирование по ξ_1, ξ_2, ζ не меняет порядка искомых величин. Последнее эквивалентно предположению, что при дифференцировании по $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ искомые величины увеличиваются соответственно в $\kappa^q, \kappa^p, \kappa^q$ раз.

Это значит, во-первых, что число t в формулах (3.1), (3.2) по смыслу совпадает с показателем изменчивости искомого напряженного состояния по α_2 (в частности, вдоль краевой линии $\alpha_1 = 0$) и, во-вторых, что показатели изменчивости по нормали к срединной поверхности и по тангенциальной нормали к $\alpha_1 = 0$ равны единице.

Число p , а вместе с тем и изменчивость погранслоя по α_2 , определяются условиями задачи: его надо выбрать так, чтобы t было равно показателю изменчивости тех самоуравновешенных краевых воздействий, которые порождают погранслоем. Равенство единице показателей изменчивости по α_1 и α_3 пока будет произвольным предположением. Оно оправдывается в дальнейшем тем, что приводит к непротиворечивому итерационному процессу.

Выполним в (2.1), (2.2) замену переменных (3.1) и разложим коэффициенты этих уравнений в ряд Тейлора вблизи $\alpha_1 = 0$, т. е. положим

$$P = \sum_{\rho=0}^{\infty} \alpha_1^\rho P_\rho = \sum_{\rho=0}^{\infty} R^\rho \kappa^{-q\rho} \xi_1^\rho P_\rho$$

где под P можно подразумевать любой коэффициент выражений (2.2), например

$$k_i = k_{i0} + R\kappa^{-q}\xi_1 k_{i1} + \dots, \quad \frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_{i0}} + R\kappa^{-q}\xi_1 \left(\frac{1}{R_i}\right)_1 + \dots$$

Символы ∂_i и ∂_3 , определенные первыми двумя равенствами (2.3), при этом преобразуются так:

$$\partial_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} = \frac{1}{A_1} \frac{\kappa^q}{R} \frac{\partial}{\partial \xi_1} = \frac{\kappa^q}{R} \sum_{\rho=0}^{\infty} \kappa^{-q\rho} \xi_1^\rho d_{1\rho} \quad (3.3)$$

$$\partial_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} = \frac{1}{A_2} \frac{\kappa^p}{R} \frac{\partial}{\partial \xi_2} = \frac{\kappa^p}{R} \sum_{\rho=0}^{\infty} \kappa^{-q\rho} \xi_1^\rho d_{2\rho}, \quad \partial_3 = \frac{\kappa^q}{R} d_3$$

Здесь

$$d_{1\rho} = R^\rho \left(\frac{1}{A_1}\right)_\rho \frac{\partial}{\partial \xi_1}, \quad d_{2\rho} = R^\rho \left(\frac{1}{A_2}\right)_\rho \frac{\partial}{\partial \xi_2}, \quad d_3 = \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (3.4)$$

$(1/A_i)_\rho$ — коэффициенты разложения $1/A_i$ в ряд Тейлора по α_i

Внесем эти результаты в (2.1), (2.2), заменим там явно входящее α_3 по формуле (3.1), а h — по формуле (3.2) и выполним разложение выражений (2.2) по степеням малого параметра κ^{-q} , рассматривая κ^{-p} как независимый параметр. Получим

$$\sum_{s=0}^{\infty} \kappa^{-qs} \left[\frac{\kappa^q}{R} N_{ns}^{13}(S, T) + \frac{\kappa^p}{R} N_{ns}^2(S, T) + N_{ns}^*(S, T) \right] = 0 \quad (n=1, \dots, 6) \quad (3.5)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \kappa^{-qs} \left[\frac{\kappa^q}{R} M_{ms}^{13}(S, T) + \frac{\kappa^p}{R} M_{ms}^2(S, T) + M_{ms}^*(S, T) \right] = 0 \quad (m=1, 2, 3, 4)$$

Верхние значки в (3.5) указывают, что в выражениях (2.2) была произведена такая группировка слагаемых:

M_m^{13}, N_n^{13} — совокупности слагаемых, содержащих либо символы дифференцирования ∂_1 или ∂_3 , либо множитель h^{-1} ;

M_m^2, N_n^2 — совокупности слагаемых, содержащих символ дифференцирования ∂_2 ;

M_m^*, N_m^* — совокупности слагаемых, не вошедших в две предыдущие группы.

В выражениях M_m^{13}, N_n^{13} вынесен за скобку общий множитель κ^q / R , который в (3.5) выписан явно, а остальная часть этих выражений разложена по степеням κ^{-q} . Аналогично построены и другие члены в равенствах (3.5). Приведем расшифровку некоторых операторов, входящих в (3.5)

$$\begin{aligned} N_{10}^{13} &= d_{10}S_{11} + d_3S_{13}, & N_{20}^{13} &= d_{10}S_{13} + d_3S_{33} \\ N_{30}^{13} &= Ed_{10}U_1 - [S_{11} - \nu(S_{22} + S_{33})], & N_{40}^{13} &= -[S_{22} - \nu(S_{11} + S_{33})] \\ N_{50}^{13} &= Ed_3U_3 - [S_{33} - \nu(S_{11} + S_{22})], & N_{60}^{13} &= E(d_3U_1 + d_{10}U_3) - \\ & & & - 2(1 + \nu)S_{13} \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} M_{10}^{13} &= d_{10}T_{21} + d_3T_{23}, & M_{20}^{13} &= Ed_{10}V_2 - 2(1 + \nu)T_{21} \\ M_{30}^{13} &= Ed_{10}V_2 - 2(1 + \nu)T_{12}, & M_{40}^{13} &= Ed_3V_2 - 2(1 + \nu)T_{23} \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$N_{10}^2 = d_{20}T_{12}, \quad N_{20}^2 = d_{20}T_{23}, \quad N_{40}^2 = Ed_{20}V_2, \quad N_{30}^2 = N_{50}^2 = N_{60}^2 = 0 \quad (3.8)$$

$$M_{10}^2 = d_{20}S_{22}, \quad M_{20}^2 = Ed_{20}U_1, \quad M_{30}^2 = Ed_{20}U_1, \quad M_{40}^2 = Ed_{20}U_3 \quad (3.9)$$

$$N_{11}^{13} = \xi_1 d_{11}S_{11} + \zeta(R/R_{10})d_3S_{13}, \quad N_{21}^{13} = \xi_1 d_{11}S_{13}$$

$$M_{11}^{13} = \xi_1 d_{11}T_{21} + \zeta(R/R_{20})d_3T_{23}$$

$$N_{10}^* = k_{20}(S_{11} - S_{22}) + k_{10}(T_{12} + T_{21}) + 2S_{13}/R_{10} \quad (3.10)$$

$$M_{10}^* = k_{10}(S_{22} - S_{11}) + k_{20}(T_{12} + T_{21}) + 2T_{23}/R_{20}$$

$$N_{20}^* = k_{20}S_{13} + k_{10}T_{23} - S_{11}/R_{10} - S_{22}/R_{20}$$

4. Зададим T и S в (3.5) в виде разложений по нисходящим степеням κ

$$T_a = \sum_{t=0}^{\infty} \kappa^{-t} T_a^{(t)}, \quad S_a = \kappa^{-q+p} \sum_{t=0}^{\infty} \kappa^{-t} S_a^{(t)} \quad (4.1)$$

(значение индекса a выяснится ниже).

Будем требовать, чтобы коэффициенты при одинаковых степенях κ , начиная с высшей, обращались в нули.

Так как все операторы N и M — линейны, то

$$N(S_a, T_a) = \kappa^{-q+p} \sum_{t=0}^{\infty} \kappa^{-t} N(S_a^{(t)}, 0) + \sum_{t=0}^{\infty} \kappa^{-t} N(0, T_a^{(t)})$$

и аналогично для M . Заметив это, получим такую последовательность систем уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} N_{ns}^{13}(S_a^{(\tau-q+p-sq)}, 0) + \sum_{s=0}^{\infty} N_{ns}^2(0, T_a^{(\tau-q+p-sq)}) + \\ + R \sum_{s=0}^{\infty} N_{ns}^*(0, T_a^{(\tau-q-sq)}) + \left\{ R \sum_{s=0}^{\infty} N_{ns}^*(S_a^{(\tau-2q+p-sq)}, 0) \right\} = 0 \\ \sum_{s=0}^{\infty} M_{ms}^{13}(0, T_a^{(\tau-sq)}) + \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} M_{ms}^2(S_a^{(\tau-2q+2p-sq)}, 0) \right\} + \\ + R \sum_{s=0}^{\infty} M_{ms}^*(0, T_a^{(\tau-q-sq)}) + \left\{ R \sum_{s=0}^{\infty} M_{ms}^*(S_a^{(\tau-2q+p-sq)}, 0) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь и всюду в дальнейшем считается, что

$$T^{(r)} = S^{(r)} \equiv 0 \quad (r < 0) \quad (4.3)$$

кроме того, принято во внимание, что в силу (2.2)

$$N_{ns}^{13}(0, T) \equiv 0, \quad M_{ms}^{13}(S, 0) \equiv 0, \quad N_{ns}^2(S, 0) \equiv 0, \quad M_{ms}^2(0, T) \equiv 0$$

Если в суммах (4.1) учтены только r первых членов для T_a и $r - q + p$ членов для S_a , т. е. если отбрасываются члены, имеющие множители по меньшей мере \varkappa^{-r} , то будем говорить, что (S_a, T_a) построены с формальной асимптотической погрешностью порядка $O(\varkappa^{-r})$. Это понятие было использовано также в [1], причем для теории внутреннего напряженного состояния в этой работе допускалась формальная асимптотическая погрешность порядка

$$\varepsilon = O(\varkappa^{-2q+2p}) = O(h_*^{2-2t}) \quad (4.4)$$

Теорию погранслоя будем также строить с формальной асимптотической погрешностью (4.4). Тогда в (4.2) можно в индексах при T_a положить $\tau < 2q - 2p$, а в индексах при S_a положить $\tau < q - p$ и воспользоваться (4.3). В результате в (4.2) пропадут члены, взятые в фигурные скобки.

Заметив это и положив $\tau - q + p = t$ в первом равенстве (4.2), можно переписать (4.2) так:

$$\begin{aligned} N_{n0}^{13}(S_a^{(t)}, 0) + X_{na}^{(t)} &= 0 & (n = 1, 2, \dots, 6; 0 \leq t < q - p) \\ M_{m0}^{13}(0, T_a^{(\tau)}) + Y_{ma}^{(\tau)} &= 0 & (m = 1, 2, 3, 4; 0 \leq \tau < 2q - 2p) \end{aligned} \quad (4.5)$$

где

$$\begin{aligned} X_{na}^{(t)} &= N_{n0}^2(0, T_a^{(t)}) + RN_{n0}^*(0, T_a^{(t-p)}) \\ Y_{ma}^{(\tau)} &= M_{m1}^{13}(0, T_a^{(\tau-q)}) + RM_{m0}^*(0, T_a^{(\tau-q)}) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Равенства (4.5) представляют собой цепочку систем уравнений, из которых можно последовательно, в порядке возрастания τ и t , находить неизвестные

$$\begin{aligned} T_a^{(\tau)} &= (T_{12a}^{(\tau)}, T_{21a}^{(\tau)}, T_{23a}^{(\tau)}, V_{2a}^{(\tau)}) \\ S_a^{(t)} &= (S_{11a}^{(t)}, S_{22a}^{(t)}, S_{33a}^{(t)}, S_{13a}^{(t)}, U_{1a}^{(t)}, U_{3a}^{(t)}) \end{aligned}$$

Этот процесс имеет итерационный характер, а головной в нем будет система

$$M_{m0}^{13}(0, T_a^{(\tau)}) = 0 \quad (m = 1, 2, 3, 4; 0 \leq \tau < q) \quad (4.7)$$

состоящая из четырех уравнений с четырьмя неизвестными.

Действительно, уравнение (4.7) получается из второго равенства (4.5), так как $Y_{ma}^{(\tau)} \equiv 0$ при $\tau < q$ в силу (4.6) и (4.3). При $\tau \geq q$ для $T_a^{(\tau)}$ получается неоднородное уравнение, выраженное вторым равенством (4.5), но в нем $Y_{ma}^{(\tau)}$, согласно (4.6), выражается через $T_a^{(\tau-q)}$, и при выполнении итерационного процесса $Y_{ma}^{(\tau)}$ надо рассмат-

ривать как известную величину. Для шести неизвестных $S_a^{(t)}$ имеется система из шести уравнений, образованная первой группой равенств (4.5); величину $X_{na}^{(t)}$, при этом надо считать известной, так как, согласно (4.6), она выражается через T_a .

Кроме решений вида (4.1), можно строить и решения вида

$$S_b = \sum_{t=0}^{\infty} \kappa^{-t} S_b^{(t)}, \quad T_b = \kappa^{-q+p} \sum_{t=0}^{\infty} \kappa^{-t} T_b^{(t)} \quad (4.8)$$

В этом случае, поступая аналогично, получим для построения $S_b^{(t)}$, $T_b^{(t)}$ такую последовательность систем уравнений

$$\begin{aligned} N_{n0}^{(13)}(S_b^{(\tau)}, 0) + X_{nb}^{(\tau)} &= 0 \quad (n=1, 2, \dots, 6; 0 \leq \tau < 2q - 2p) \\ M_{m0}^{13}(0, T_b^{(t)}) + Y_{mb}^{(t)} &= 0 \quad (m=1, 2, 3, 4; 0 \leq t < q - p) \end{aligned} \quad (4.9)$$

где

$$\begin{aligned} X_{nb}^{(\tau)} &= N_{n1}^{13}(S_b^{(\tau-q)}, 0) + RN_{n0}^*(S_b^{(\tau-q)}, 0) \\ Y_{mb}^{(t)} &= M_{m0}^2(S_b^{(t)}, 0) + RM_{m0}^*(S_b^{(t-p)}, 0) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Из уравнений (4.9), (4.10) можно определить решение вида (4.8) при помощи итерационного процесса, в котором головной будет следующая система:

$$N_{n0}^{13}(S_b^{(\tau)}, 0) = 0 \quad (n=1, 2, \dots, 6; 0 \leq \tau < q) \quad (4.11)$$

состоящая из шести уравнений с шестью неизвестными.

5. Решения вида (4.1) и (4.8) имеют простой физический смысл.

Уравнения (4.5) и (4.9), учитывая (3.3), (3.6) и (3.7), можно в развернутом виде записать так:

$$\frac{1}{A_{10}} \frac{\partial S_{11}^{(r)}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial S_{13}^{(r)}}{\partial \zeta} + X_1^{(r)} = 0, \quad \frac{1}{A_{10}} \frac{\partial S_{13}^{(r)}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial S_{33}^{(r)}}{\partial \zeta} + X_2^{(r)} = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{E}{A_{10}} \frac{\partial U_1^{(r)}}{\partial \xi_1} = S_{11}^{(r)} - \nu(S_{22}^{(r)} + S_{33}^{(r)}) - X_3^{(r)}, \quad 0 = S_{22}^{(r)} - \nu(S_{11}^{(r)} + S_{33}^{(r)}) - X_4^{(r)}$$

$$E \frac{\partial U_3^{(r)}}{\partial \zeta} = S_{33}^{(r)} - \nu(S_{11}^{(r)} + S_{22}^{(r)}) - X_5^{(r)}$$

$$E \left(\frac{1}{A_{10}} \frac{\partial U_3^{(r)}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial U_1^{(r)}}{\partial \zeta} \right) = 2(1 + \nu) S_{13}^{(r)} - X_6^{(r)}$$

$$\frac{1}{A_{10}} \frac{\partial T_{21}^{(r)}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial T_{23}^{(r)}}{\partial \zeta} + Y_1^{(r)} = 0, \quad \frac{E}{A_{10}} \frac{\partial V_2^{(r)}}{\partial \xi_1} = 2(1 + \nu) T_{21}^{(r)} - Y_2^{(r)} \quad (5.2)$$

$$E \frac{\partial V_2^{(r)}}{\partial \zeta} = 2(1 + \nu) T_{23}^{(r)} - Y_4^{(r)}, \quad T_{21}^{(r)} = T_{12}^{(r)} - \frac{Y_3^{(r)} - Y_2^{(r)}}{2(1 + \nu)}$$

Эти системы имеют силу как для величин с индексами a , так и для величин с индексами b . В первом случае надо положить $r = t$ в (5.1) и $r = \tau$ в (5.2) и считать, что $X_{na}^{(t)}$, $Y_{ma}^{(\tau)}$ определяются формулами (4.6). Во втором случае надо положить $r = \tau$ в (5.1) и $r = t$ в (5.2) и считать, что $X_{nb}^{(\tau)}$, $Y_{mb}^{(t)}$ определяются формулами (4.10). Индексы τ и t в обоих случаях должны удовлетворять неравенствам $0 \leq \tau < 2q - 2p$; $0 \leq t < q - p$.

При $r = \tau < q$ величины $X_n^{(\tau)}$ и $Y_m^{(\tau)}$, согласно (4.6) и (4.10), тождественно исчезают и системы (5.1), (5.2) становятся однородными. В них ξ_2 входит лишь как параметр. Поэтому можно сделать подстановку

$$A_{10}\xi_1 = \xi_1' \quad (5.3)$$

В результате, в однородном случае системы (5.1) и (5.2) обратятся соответственно в уравнения плоской и антиплоской задач теории упругости. В обоих случаях ξ_1' , ζ надо рассматривать как декартовы координаты; роль перемещений и напряжений играют для плоской задачи $S_{ij}^{(\tau)}$, $U_k^{(\tau)}$, а для антиплоской — задачи $T_{ij}^{(\tau)}$, $V_k^{(\tau)}$ (ξ_1' соответствует индекс 1, а ζ — индекс 3).

Назовем решение вида (4.1), отмеченное дополнительным индексом a , антиплоским погранслоем, а решение вида (4.8), отмеченное дополнительным индексом b — плоским погранслоем. Под антиплоским погранслоем подразумевается [напряженно-деформированное состояние (S_a, T_a) , в котором S_a играет второстепенную роль

$$S_a = O(\kappa^{-q+p}) T_a$$

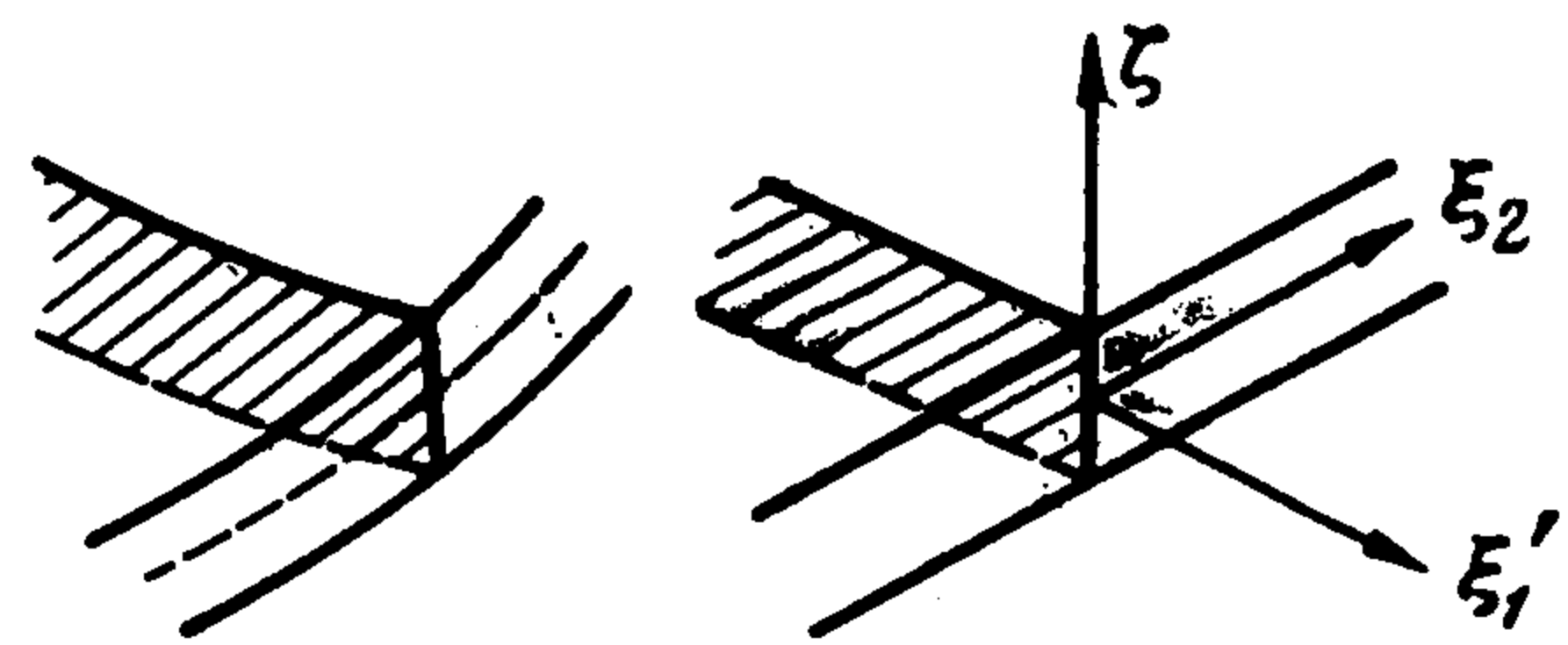
а T_a с формальной асимптотической погрешностью порядка $O(\kappa^{-q})$ можно определить из однородных (при $Y_m^{(r)} \equiv 0$) уравнений антиплоской задачи (5.2), коротко выраженных равенством (4.7). Аналогично, в плоском погранслое (S_b, T_b) второстепенную роль играет T_b

$$T_b = O(\kappa^{-q+p}) S_b$$

а головной будет однородная (при $X_n^{(r)} \equiv 0$) система уравнений плоской задачи (5.1), коротко выраженная равенством (4.11) и определяющая S_b с формальной асимптотической погрешностью порядка $O(\kappa^{-q})$.

Связь погранслоя с плоской и антиплоской задачами теории упругости указывалась в ряде работ [3-9]. Остановимся на физическом смысле этого результата.

Пусть боковая поверхность оболочки проходит через линию $\alpha_1 = 0$. Через некоторую точку этой линии проведем поперечное сечение оболочки, лежащее в плоскости нормали к поверхности и тангенциальной нормали к линии $\alpha_1 = 0$. Обсуждаемые результаты значат, что в рамках формальной асимптотической погрешности порядка $\kappa^{-q} = h_*$ погранслоем в этом сечении не зависит от того, что происходит в других нормальных сечениях и при построении погранслоя в рамках той же точности оболочку можно заменить упругим слоем (фиг. 1.)



Фиг. 1

$$0 \leq \xi_1' < -\infty, \quad -\infty < \xi_2 < +\infty, \quad -1 \leq \zeta \leq +1$$

каждое поперечное сечение $\xi_2 = \text{const}$ которого работает в тех же условиях, что и рассматриваемое поперечное сечение оболочки, заштрихованное на фиг. 1. Из формулы (5.3) видно, что вдоль поперечных сечений масштаб длин будет искажен и, вообще говоря, по разному в разных сечениях.

6. Для дальнейшего в теории погранслоя будет представлять интерес краевая задача, заключающаяся в интегрировании уравнений (5.1), (5.2) в бесконечной полуполосе

$$-1 \leq \zeta = \alpha_3 / h \leq +1, \quad \xi_1' = A_{10}\alpha_1 / h \leq 0 \quad (6.1)$$

с учетом:

- (а) граничных условий на торце $\xi_1' = 0$ или, что тоже $\alpha_1 = 0$, о которых пока ничего не будет предполагаться;
- (б) граничных условий на лицевых поверхностях $\zeta = \pm 1$, заключающихся в требовании отсутствия всех напряжений (предполагается, что нагрузка, приложенная к лицевым поверхностям, учтена при построении внутреннего напряженного состояния);
- (в) требований затухания всех напряжений и перемещений погранслоя при $\xi_1' \rightarrow -\infty$.

Учтя (1.2), (1.3), запишем граничные условия (б) и требования (в) так:

$$S_{13} = T_{23} = S_{33} = 0 \quad (\zeta = \pm 1) \quad (6.2)$$

$$S_{11} = T_{12} = S_{13} = 0, \quad U_1 = V_2 = U_3 = 0 \quad (\xi_1' \rightarrow -\infty) \quad (6.3)$$

Это значит, что в полуполосе (6.1) надо решать неоднородные уравнения (5.1), (5.2) плоской и антиплоской задач теории упругости, считая, что лицевые стороны полуполосы и ее бесконечно удаленный торец не загружены. Вместе с тем, в (5.1), (5.2) величины $X_1^{(r)}$, $X_2^{(r)}$, $Y_1^{(r)}$ представляют собой компоненты массовых сил и, следовательно, они должны находиться в равновесии с активными и реактивными силами, приложенными к торцу $\xi_1' = 0$, т. е. должны удовлетворяться четыре следующих условия уравновешенности полуполосы в целом:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} S_{11}^{(r)}|_{\alpha_1=0} d\zeta + \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 X_1^{(r)} A_{10} d\xi_1 &= 0 \\ \int_{-1}^{+1} T_{21}^{(r)}|_{\alpha_1=0} d\zeta + \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 Y_1^{(r)} A_{10} d\xi_1 &= 0 \\ \int_{-1}^{+1} S_{13}^{(r)}|_{\alpha_1=0} d\zeta + \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 X_2^{(r)} A_{10} d\xi_1 &= 0 \\ \int_{-1}^{+1} S_{11}^{(r)}|_{\alpha_1=0} \zeta d\zeta + \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 [\zeta X_1^{(r)} - A_{10}\xi_1 X_2^{(r)}] A_{10} d\xi_1 &= 0 \end{aligned} \quad (6.4)$$

Равенства (6.4) имеют силу как для плоского, так и для антиплоского погранслоев. Будем называть их статическими условиями затухания. Совершенно очевидно, что (6.4) необходимы для существования затухающего, т. е. удовлетворяющего условию (6.3), погранслоя. В дальнейшем будет приниматься, что условия (6.4) для этого и достаточны.

Предположение о достаточности статических условий затухания вытекает из принципа Сен-Венана. При построении погранслоя надо учитывать требования (6.2), (6.3) и три условия на торце $\xi_1' = 0$. Получается переопределенная задача, в которой лишними можно считать первые три равенства (6.3), так как очевидно, что всегда существует решение, в котором напряжения на бесконечности стремятся к конечному ненулевому пределу. Пусть такое решение удовлетворяет статическим условиям затухания при любых значениях r . Но, как показано выше, при $r < q$ уравнения (5.1), (5.2) станут однородными уравнениями плоской и антиплоской задач, и тогда равенства (6.4) обратятся в условия уравновешенности всех приложенных к полуполосе сил, кроме быть может реакций на бесконечности. В соответствии с принципом Сен-Венана напряженно-деформированное состояние $(S^{(r)}, T^{(r)})$ при таких r будет затухающим. При $r = \rho \geq q$ величины $X_1^{(\rho)}, X_2^{(\rho)}, Y_1^{(\rho)}$ отличны от нуля. Однако при помощи формул (4.6), (4.10) они выражаются через $(S^{(r)}, T^{(r)})$, где $r < \rho$ и, следовательно, сами быстро затухают. Применяя снова принцип Сен-Венана к полосе, нагруженной силами на торце $\xi_1' = 0$ и массовыми силами $X_1^{(\rho)}, X_2^{(\rho)}, Y_1^{(\rho)}$, локализованными вблизи $\xi_1' = 0$, и воспользовавшись методом индукции, можно утверждать, что при выполнении условий (6.4) $(S^{(\rho)}, T^{(\rho)})$ будет затухать и при любых ρ .

7. Статические условия затухания (6.4) можно записать и в развернутом виде. Если речь идет об антиплоском погранслое, то к величинам $T^{(r)}, S^{(r)}, X_n^{(r)}, Y_m^{(r)}$ надо приписать значки a , в формулах для $Y_{ma}^{(r)}$ положить $r = \tau$ и раскрыть смысл $X_{na}^{(t)}, Y_{ma}^{(\tau)}$ при помощи (4.6), (3.6) — (3.10). Аналогично для плоского погранслоя. В результате получатся две группы равенств, которые можно назвать статическими условиями затухания для антиплоского и плоского погранслоев, соответственно. Они справедливы при любых значениях индексов t и τ , но громоздки, и в столь общем виде в дальнейшем нужны не будут. Вместе с тем, если должным образом ограничить максимально допустимые значения t и τ , то обсуждаемые равенства значительно упростятся и примут следующий вид:

статические условия затухания для антиплоского погранслоя

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} S_{11a}^{(t)} |_{\alpha_1=0} d\zeta &= 0 \quad (\tau < q) \\ \int_{-1}^{+1} T_{12a}^{(\tau)} |_{\alpha_1=0} d\zeta + \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 \frac{R}{R_{20}} T_{23a}^{(\tau-q)} A_{10} d\xi_1 &= 0 \quad (\tau < 2q) \\ \int_{-1}^{+1} S_{13a}^{(t)} |_{\alpha_1=0} d\zeta + \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 [d_{20} T_{23a}^{(t)} + Rk_{10} T_{23a}^{(t-p)}] A_{10} d\xi_1 &= 0 \quad (\tau < q) \quad (7.1) \\ \int_{-1}^{+1} S_{11a}^{(t)} |_{\alpha_1=0} \zeta d\zeta + \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 \{ \zeta [d_{20} T_{12a}^{(t)} + 2Rk_{10} T_{12a}^{(t-p)}] - \\ - A_{10} \xi_1 [d_{20} T_{23a}^{(t)} + Rk_{10} T_{23a}^{(t-p)}] \} A_{10} d\xi_1 &= 0 \quad (\tau < q) \end{aligned}$$

статические условия затухания для плоского погранслоя

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} S_{11b}^{(\tau)} |_{\alpha_1=0} d\zeta - \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 Rk_{20} S_{22b}^{(\tau-q)} A_{10} d\xi_1 &= 0 \quad (\tau < 2q) \\ \int_{-1}^{+1} T_{12b}^{(t)} |_{\alpha_1=0} d\zeta + \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 [d_{20} S_{22b}^{(t)} + k_{10} S_{22b}^{(t-p)}] A_{10} d\xi_1 &= 0 \quad (t < q) \quad (7.2) \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^{+1} S_{13b}^{(\tau)}|_{x_1=0} d\zeta - \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 \frac{R}{R_{20}} S_{22b}^{(\tau-q)} A_{10} d\xi_1 = 0 \quad (\tau < 2q)$$

$$\int_{-1}^{+1} S_{11b}^{(\tau)}|_{x_1=0} \zeta d\zeta + \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 R \left(\frac{A_{10}\xi_1}{R_{20}} - k_{20}\zeta \right) S_{22b}^{(\tau-q)} A_{10} d\xi_1 = 0 \quad (\tau < 2q)$$

Эти упрощения основаны на следующих соображениях:

1) если $r < q$, то величины $S_b^{(r)}$ удовлетворяют однородным уравнениям (5.1), а величины $T_a^{(r)}$ — однородным уравнениям (5.2). Последнее, в частности, означает, что

$$T_{12a}^{(r)} = T_{21a}^{(r)} \quad (r < q) \quad (7.3)$$

2) при вычислении интегралов, входящих в статические условия затухания можно считать, что

$$A_{10}, k_{10}, k_{20}, R_{10}, R_{20}, d_{20} = \text{const} \quad (7.4)$$

так как все эти величины, введенные в п. 3, не зависят от ξ_1 и ζ

3) справедлива формула

$$\zeta \frac{R}{R_{20}} d_3 T_{23a}^{(r)} + \frac{2R}{R_{20}} T_{23a}^{(r)} = \frac{R}{R_{20}} \frac{1}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} (\zeta^2 T_{23a}^{(r)}) \quad (7.5)$$

которую легко проверить, учитывая, что d_3 расщипровывается при помощи (3.4), а так как $T_{23a}^{(r)}$ удовлетворяет второму условию (6.2), то из (7.5) следуют равенства

$$\int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 \left[\zeta \frac{R}{R_{20}} d_3 T_{23a}^{(r)} + \frac{2R}{R_{20}} T_{23a}^{(r)} \right] A_{10} d\xi_1 = \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 \frac{R}{R_{20}} T_{23a}^{(r)} A_{10} d\xi_1 \quad (7.6)$$

$$\int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 \left[\zeta \frac{R}{R_{20}} d_3 T_{23a}^{(r)} + \frac{2R}{R_{20}} T_{23a}^{(r)} \right] \zeta A_{10} d\xi_1 = 0$$

Кроме того имеет место формула

$$\int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 \xi_1^n DT_{12a}^{(r)} A_{10} d\xi_1 = 0 \quad (r < q) \quad (7.7)$$

в которой D — выражение, не зависящее от ξ_1, ζ , а n — неотрицательное число. Действительно, интегрируя по частям относительно ξ_1 и считая, что на бесконечности $\xi_1^{n+1} T_{12a}^{(r)}$ обращается в нуль, получаем

$$\int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 \xi_1^n DT_{12a}^{(r)} A_{10} d\xi_1 = - \frac{1}{n+1} \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 \xi_1^{n+1} D \frac{\partial T_{12a}^{(r)}}{\partial \xi_1} A_{10} d\xi_1 \quad (7.8)$$

Но для принятых значений r первое уравнение (5.2) — однородное, поэтому, выразив с его помощью $T_{12a}^{(r)}$ через $T_{23a}^{(r)}$, будем иметь

$$\int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 \xi_1^n DT_{12a}^{(r)} A_{10} d\xi_1 = \frac{A_{10}}{n+1} \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 \xi_1^{n+1} D \frac{\partial T_{23a}^{(r)}}{\partial \zeta} A_{10} d\xi_1$$

Интеграл в правой части этого равенства обращается в нуль в силу второго условия (6.2).

В формуле (7.7) можно считать, что

$$D = Ed_{11} = ER \left(\frac{1}{A_1} \right)_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \quad (E \text{ не зависит от } \xi_1, \zeta) \quad (7.9)$$

Тогда доказательство равенства (7.7) упростится, так как рассмотрению будет подлежать интеграл, стоящий в правой части равенства (7.8).

Так же можно вывести и формулы

$$\int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 \xi_1^n DS_{11b}^{(r)} A_{10} d\xi_1 = \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 \xi_1^n DS_{13b}^{(r)} A_{10} d\xi_1 = 0 \quad (7.10)$$

в которых D либо не зависит от ξ_1, ζ , либо имеет вид (7.9). Равенства (7.10), (7.9) доказываются так же, как (7.7), (7.9), только вместо первого уравнения (5.2) надо воспользоваться соответственно первым или вторым из уравнений (5.1).

Наконец, справедливы формулы

$$\int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 \zeta S_{11b}^{(r)} A_{10} d\xi_1 = 0, \quad \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 \xi_1 \zeta d_{11} S_{11b}^{(r)} A_{10} d\xi_1 = 0 \quad (7.11)$$

Обе они доказываются сходным образом. Если для конкретности говорить о первом равенстве, то оно вытекает из приводимых ниже выкладок, в которых последовательно выполнится интегрирование по частям относительно ξ_1 и ζ , а также используются первые два равенства (5.1) и условия (6.2), (6.3)

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 \zeta S_{11b} A_{10} d\xi_1 = - \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 A_{10} \xi_1 \zeta \frac{\partial S_{11b}}{\partial \xi_1} d\xi_1 = \\ & = \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 A_{10} \xi_1 \zeta \frac{\partial S_{13b}}{\partial \zeta} A_{10} d\xi_1 = - \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 A_{10} \xi_1 S_{13b} A_{10} d\xi_1 = \\ & = \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 \frac{A_{10}}{2} \xi_1^2 \frac{\partial S_{13b}}{\partial \xi_1} A_{10} d\xi_1 = - \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 A_{10}^2 \xi_1^2 \frac{\partial S_{33b}}{\partial \zeta} A_{10} d\xi_1 = 0 \end{aligned}$$

Из равенств (7.3) — (7.11) и вытекают упрощения, которые сделаны в статических условиях затухания (7.1), (7.2).

8. Выведем теперь для некоторых случаев кинематические условия затухания. Пусть требуется проинтегрировать уравнения (5.1) в прямоугольнике

$$0 \geq \xi_1' = A_{10} \alpha_1 / h \geq -l, \quad -1 \leq \zeta \leq +1 \quad (8.1)$$

выполнив граничные условия

$$S_{13} = S_{33} = 0 \quad (\zeta = \pm 1) \quad EU_1 = EU_3 = 0 \quad (\xi_1' = -l) \quad (8.2)$$

соответствующие требованиям отсутствия внешних сил на лицевых поверхностях и жесткой заделке на торце $\xi_1' = -l$; пусть, кроме того, на торце $\xi_1' = 0$ ставятся такие условия:

$$EU_1 = \sum_{i=0}^n a_i \zeta^i, \quad EU_3 = \sum_{k=0}^m b_k \zeta^k \quad (8.3)$$

Предполагается, что индекс r в уравнениях (5.1) может быть произвольным (для упрощения обозначений он не выписывается).

Пользуясь линейностью задачи, представим ее решение в виде

$$S = S^* + \sum_{i=0}^n a_i S^{[ui]} + \sum_{k=0}^m b_k S^{[wk]}$$

Здесь S^* , $S^{[ui]}$, $S^{[wk]}$ — решения уравнений (5.1), удовлетворяющие условиям (8.2). Первое из [этих решений соответствует неоднородным (при $X_n^{(r)}$ не обращающихся одновременно в нули) уравнениям (5.1) и однородным условиям на торце $\xi_1' = 0$

$$EU_1^* |_{\xi_1'=0} = 0, \quad EU_3^* |_{\xi_1'=0} = 0$$

а второе и третье решения отвечают однородным уравнениям (5.1) и соответственно следующим неоднородным условиям на торце $\xi_1' = 0$:

$$EU_1^{[ui]} = \zeta^i, \quad EU_3^{[ui]} = 0 \quad \text{и} \quad EU_1^{[wk]} = 0, \quad EU_3^{[wk]} = \zeta^k$$

Каждому из перечисленных напряженных состояний соответствуют горизонтальная и вертикальная реактивные силы P_1 , P_2 и реактивный момент P_3 , возникающие на торце $\xi_1' = -l$. Будем отмечать их теми же значками, как порождающие их напряженные состояния. Тогда потребовав, чтобы искомое напряженное состояние давало в заделке $\xi_1' = -l$ нулевые реакции P_1 , P_2 , P_3 , получим

$$P_\rho^* + \sum_{i=0}^n a_i P_\rho^{[u,i]} + \sum_{k=0}^m b_k P_\rho^{[w,k]} = 0 \quad (\rho = 1, 2, 3) \quad (8.4)$$

эти равенства для рассматриваемой задачи и представляют собой кинематические условия затухания.

Действительно, пусть в (5.1) индекс r настолько мал, что эти уравнения однородны. Тогда из отсутствия реакций на торце $\xi_1' = -l$ будет вытекать самоуравновешенность напряжений на торце $\xi_1' = 0$ и, как следствие принципа Сен-Венана, будет иметь место затухание решения обсуждаемой задачи. Рассуждая далее, как в п. 6, легко убедиться, что выполнение равенств (8.4) обеспечивает затухание и при любых r .

Конечно, в условия затухания входит параметр l — длина прямоугольника (8.1). Однако из физических соображений ясно, что при достаточно больших l (по сравнению с шириной прямоугольника, т. е. с двумя) равенства (8.4) слабо зависят от l , и прямоугольник (8.1) можно рассматривать как полуполосу.

9. Пусть теперь уравнения (5.1) надо проинтегрировать в прямоугольнике (8.1), выполнив снова условия (8.2), но на торце $\xi_1' = 0$ вместо (8.3) ставятся следующие смешанные условия:

$$S_{11} |_{\xi_1'=0} = f(\zeta), \quad EU_3 |_{\xi_1'=0} = \sum_{k=0}^m c_k \zeta^k \quad (9.1)$$

где $f(\zeta)$ — произвольная функция.

Первым из этих равенств задаются граничные значения напряжения S_{11} . Их необходимо подчинить первому и четвертому равенствам (6.4). Следовательно, в рассматриваемой смешанной задаче два условия затухания будут совпадать со статическими условиями затухания.

Обозначим через S^* , $S^{[s]}$, $S^{(wk)}$ решения уравнений (5.1), удовлетворяющие условиям (8.2). Первое из них получается в результате решения неоднородных уравнений, а два остальных — в результате решения однородных уравнений. На торце $\xi_1' = 0$ они должны удовлетворять соответственно условиям

$$[S_{11}|_{\xi_1'=0} = 0, f(\zeta), 0; \quad EU_3|_{\xi_1'=0} = 0, 0, \zeta^k]$$

(величина $S^{(wk)}$ по смыслу отличается от величины $S^{[wk]}$, введенной выше).

Пусть каждое из этих напряженных состояний дает на торце $\xi_1' = -l$ вертикальные реакции P_2 с соответствующими дополнительными индексами. Тогда, потребовав, чтобы в суммарном решении реакция P_2 отсутствовала, получим равенство

$$P_2^* + P_2^{(s)} + \sum_{k=0}^n c_k P_2^{(wk)} = 0 \quad (9.2)$$

Но вблизи торца $\xi_1' = 0$ продольная сила и момент, обусловленные краевыми напряжениями S_{11} и затухающими массовыми силами, взаимно уравновешены в силу статических условий затухания, и для того чтобы вблизи $\xi_1' = 0$ все силы были самоуравновешены, достаточно потребовать выполнения равенства (9.2), которое и представляет собой единственное кинематическое условие затухания для смешанной задачи (9.1). Также как это делалось в пп. 6 и 8, легко показать, что первое и четвертое статические условия затухания (6.4) вместе с кинематическим условием затухания (9.2), обеспечивает убывание решений уравнений (5.1) в рассматриваемой смешанной задаче.

10. В работе [1] построена теория внутреннего напряженного состояния, сущность которой заключается в следующем.

Будем предполагать, что упругая среда отнесена к триортогональной системе координат (1.1) и обозначим через σ_{st} и v_s напряжения и перемещения внутреннего напряженного состояния.

В [1] предполагается, что несимметричные напряжения, вводимые при помощи формул

$$\begin{aligned} s_{ij} &= (1 + \alpha_3 / R_k) \sigma_{ij} & (i = 1, 2; j \neq k = 1, 2) \\ s_{3i} &= s_{i3} = (1 + \alpha_3 / R_j) \sigma_{i3} & (i \neq j = 1, 2) \\ s_{33} &= (1 + \alpha_3 / R_1) (1 + \alpha_3 / R_2) \sigma_{33} \end{aligned} \quad (10.1)$$

и перемещения v_s обладают асимптотическими свойствами, выражаемыми равенствами

$$s_{ij} = \kappa^{q+d} s_{ij}^*, \quad s_{i3} = \kappa^{p+d} s_{i3}^*, \quad s_{33} = \kappa^{c+d} s_{33}^*, \quad v_i = \kappa^{q-p+d} v_i^*, \quad v_3 = \kappa^{q-c+d} v_3^* \quad (10.2)$$

Здесь число d характеризует интенсивность внешних воздействий и выбирается в зависимости от условий задачи; величины, отмеченные точ-

кой, представляют собой ряды, расположенные по нисходящим степеням κ , начиная с κ^0 , т. е. например

$$s_{ij} = \sum_{l=0}^L \kappa^{-l} s_{ij}^{(l)} \quad (10.3)$$

Числа p, q имеют тот же смысл, что и в п. 3, т. е. p/q равно показателю изменчивости t , а число c определяется формулами

$$c = 0 \quad \text{при } 2p \leq q, \quad c = 2p - q \quad \text{при } 2p \geq q \quad (10.4)$$

в которых отражен тот хорошо известный факт, что свойства напряженного состояния существенно меняются, когда t проходит через значение $t = 1/2$.

Теория внутреннего напряженного состояния построена с формальной асимптотической погрешностью порядка (4.4) т. е. в суммах (10.3) верхний предел суммирования L принимался равным $2q - 2p - 1$.

В рамках такой точности теория внутреннего напряженного состояния эквивалентна некоторому варианту классической теории оболочек. Здесь под внутренним напряженным состоянием всегда, когда не оговорено противоположное, подразумевается напряженное состояние, обладающее свойством (10.2) и построенное с формальной асимптотической погрешностью (4.4). Кроме того, всегда считается, что

$$t < 1, \quad \text{т. е. } p < q \quad \text{[(10.5)]}$$

Закон изменения напряжений и перемещений по толщине оболочки для внутреннего напряженного состояния определяется формулами

$$\begin{aligned} s_{ij} &= s_{ij0} + \zeta s_{ij1}, & s_{i3} &= s_{i30} + \zeta s_{i31} + \zeta^2 s_{i32} \quad (i, j = 1, 2) \\ s_{33} &= s_{330} + \zeta s_{331} + \zeta^2 s_{332} + \zeta^3 s_{333} \quad (i, j = 1, 2, 3) \\ v_k &= v_{k0} + \zeta v_{k1} \quad (\zeta = \alpha_3/h) \quad (k = 1, 2) \end{aligned} \quad (10.6)$$

в которых величины с дополнительными нижними индексами представляют собой функции двух переменных α_1, α_2 . Для них, вообще говоря, сохраняют силу формулы (10.2) и (10.3); например

$$s_{ij0} = \kappa^{q+d} s_{ij0}^*, \quad s_{ij0}^* = \sum_{l=0}^L \kappa^{-l} S_{ij0}^{(l)}$$

Однако некоторые из величин, входящих в (10.6), при не слишком больших значениях l обращаются в нуль. А именно

$$v_{i0}^{(l)} = s_{ij1}^{(l)} = s_{i32}^{(l)} \equiv 0 \quad (i, j = 1, 2; \quad 0 \leq l < q - 2p + c) \quad (10.7)$$

Кроме того, справедливы формулы

$$\begin{aligned} v_{i1}^{(l)} &= -\varphi_{i0}^{(l-q+2p-c)} \quad (i = 1, 2; \quad q - 2p + c \leq l < 2q - 2p) \\ \varphi_{i0}^{(l)} &= -R \left(\frac{\kappa^{-p}}{A_i} \frac{\partial v_{30}^{(l)}}{\partial \alpha_1} + \frac{v_{i0}^{(l-2p+c)}}{R_i} \right) \quad (i = 1, 2; \quad 0 \leq l < 2q - 2p) \end{aligned} \quad (10.8)$$

В заключение раздела внесем некоторое уточнение в результаты изложенной здесь работы [1]

В принятых обозначениях закон Гука для деформации поперечного удлинения выражается таким равенством

$$E \left(1 + \zeta \frac{h}{R_1}\right) \left(1 + \zeta \frac{h}{R_2}\right) h^{-1} \frac{\partial v_3}{\partial \zeta} = s_{33} - \nu \left(1 + \zeta \frac{h}{R_1}\right) s_{11} - \nu \left(1 + \zeta \frac{h}{R_2}\right) s_{22} \quad (10.9)$$

Будем считать, что для несимметричных компонентов напряжений и для перемещений v_1, v_2 остаются в силе формулы (10.2) — (10.4) и (10.6), причем в (10.3) $L = 2q - 2p - 1$, но для смещения v_3 примем более точное выражение

$$v_3 = \kappa^{q-c+d} \sum_{l=0}^{3q-2p-1} \kappa^{-l} (v_{30}^{(l)} + \zeta v_{31}^{(l)} + \zeta^2 v_{32}^{(l)}) \quad (10.10)$$

Внеся в (10.9) разложения (10.2), (10.3), (10.6) и (10.10), приняв во внимание (3.2) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях κ , получим уравнение

$$\begin{aligned} & \left[\frac{E}{R} v_{31}^{(l)} - s_{330}^{(l-2q+2c)} + \nu (s_{110}^{(l-q+c)} + s_{220}^{(l-q+c)}) \right] + \\ & + \left\{ \frac{2E}{R} \left[v_{32}^{(l)} + \frac{R}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) v_{31}^{(l-q)} \right] - s_{331}^{(l-2q+2c)} + \nu (s_{111}^{(l-q+c)} + s_{221}^{(l-q+c)}) + \right. \\ & \left. + \nu R \left(\frac{s_{110}^{(l-2q+c)}}{R_1} + \frac{s_{220}^{(l-2q+c)}}{R_2} \right) \right\} \zeta + \dots = 0 \quad (0 \leq l < 3q - 2p) \end{aligned} \quad (10.11)$$

в котором точками обозначены члены, содержащие ζ в степени, выше первой.

Здесь и всюду в дальнейшем принимается, что для величин, относящихся к внутреннему напряженному состоянию, остается справедливой формула (4.3), т. е. они также отличны от нуля только при неотрицательных значениях верхнего индекса.

Потребовав, чтобы в (10.11) обращался в нуль коэффициент при ζ^0 , получим

$$v_{31}^{(l)} = -\nu \frac{R}{E} (s_{110}^{(l-q+c)} + s_{220}^{(l-q+c)}) \quad (0 \leq l < 2q - 2c) \quad (10.12)$$

В этом равенстве изменена верхняя граница допустимых значений l , что закономерно, так как $2q - 2c \leq 3q - 2p$.

Аналогично, приравняв в (10.11) коэффициент при ζ^1 и используя (10.12), получим

$$\begin{aligned} v_{32}^{(l)} = \frac{R}{2E} & \left[-\nu (s_{111}^{(l-q+c)} + s_{221}^{(l-q+c)}) + \right. \\ & \left. + \nu R \left(\frac{s_{110}^{(l-2q+c)}}{R_2} + \frac{s_{220}^{(l-2q+c)}}{R_1} \right) + s_{331}^{(l-2q+2c)} \right] \quad (0 \leq l < 3q - 2p) \end{aligned} \quad (10.13)$$

11. В последующих разделах будет рассматриваться вопрос о взаимодействии внутреннего напряженного состояния с погранслоями. Изложим метод этого исследования.

Примем, что полное напряженное состояние оболочки представляет собой линейную комбинацию внутреннего напряженного состояния, антиплоского и плоского погранслоев, а именно имеют место формулы

$$s_{ij}^* = s_{ij} + S_{ija} + S_{ijb}, \quad v_k^* = v_k + hU_{ka} + hU_{kb} \quad (11.1)$$

или формулы

$$s_{ij}^* = s_{ij} + T_{ija} + T_{ijb}, \quad v_k^* = v_k + hV_{ka} + hV_{kb} \quad (11.2)$$

где v_k^* , s_{ij}^* — суммарные перемещения и суммарные несимметричные напряжения (п. 10).

Для величин, составляющих плоский и антиплоский погранслой, примем такие разложения

$$\begin{aligned} S_a &= \kappa^{\lambda-q+p} \sum_{t=0}^{\infty} \kappa^{-t} S_a^{(t)}, & T_a &= \kappa^{\lambda} \sum_{t=0}^{\infty} \kappa^{-t} T_a^{(t)} \\ S_b &= \kappa^{\mu} \sum_{t=0}^{\infty} \kappa^{-t} S_b^{(t)}, & T_b &= \kappa^{\mu-q+p} \sum_{t=0}^{\infty} \kappa^{-t} T_b^{(t)} \end{aligned} \quad (11.3)$$

Они отличаются от разложений (4.1) и (4.8) тем, что величины, отмеченные индексами a и b , подобно увеличены соответственно в κ^{λ} и κ^{μ} раз. Это законно, так как $(S_a^{(t)}, T_a^{(t)})$ и $(S_b^{(t)}, T_b^{(t)})$ определены в отдельности как решения некоторых однородных уравнений, на которые пока наложены только однородные условия (6.2), (6.3).

Числа λ , μ характеризуют интенсивности антиплоского и плоского погранслоев. Они должны быть подобраны в зависимости от вида тех граничных условий теории упругости, которые надо выполнить на боковых поверхностях оболочки. Под этим подразумевается следующее.

Пусть λ , μ — фиксированные целые числа. Тогда напряжения и перемещения, определенные формулами (11.1), (11.2), можно представить в виде разложений по нисходящим степеням κ . Для этого надо в них выразить h через κ при помощи (3.2) и воспользоваться для величин, связанных с внутренним напряженным состоянием, разложениями (10.2), (10.3), а для величин, связанных с погранслоями, — разложениями (11.3).

Подставив эти разложения в тройку трехмерных граничных условий $\Gamma = 0$ на боковых поверхностях и приравнявая в каждом условии коэффициенты при одинаковых степенях κ , получим последовательность граничных условий $\Gamma_s = 0$. К этим соотношениям надо присоединить некоторую последовательность таких статических или кинематических условий затухания $\Omega_s = 0$, в силу которой в полное напряженное состояние попадут только затухающие решения уравнений погранслоев. Совокупность граничных соотношений $\Gamma_s = 0$ и $\Omega_s = 0$ определит некоторый итерационный процесс выполнения граничных условий, в котором должны быть последовательно использованы произволы, содержащиеся в уравнениях внутреннего напряженного состояния и уравнениях погранслоев. Вообще говоря, т. е. при произвольно выбранных λ , μ , порядок и тип этих уравнений будет противоречить структуре $\Gamma_s = 0$ и $\Omega_s = 0$, и задача заключается в подборе непротиворечивых (не приводящих к такому несоответствию) значений λ , μ .

12. Пусть оболочка имеет свободный край, который совпадает с некоторой боковой поверхностью, проходящей через линию $\alpha_1 = 0$. Тогда в силу (11.1), и (11.2) надо требовать, чтобы выполнялись следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} s_{11}^* &\equiv s_{11} + S_{11a} + S_{11b} = 0, & s_{12}^* &= s_{12} + T_{12a} + T_{12b} = 0 \\ s_{13}^* &= s_{13} + S_{13a} + S_{13b} = 0 & (\alpha_1 = 0) \end{aligned}$$

(использована однородность граничных условий и симметричные напряжения заменены несимметричными).

Примем, что в этом случае непротиворечивые значения λ , μ записываются так¹

$$\lambda = 2p - c + d, \quad \mu = p + d \quad (12.1)$$

заменяем в граничных условиях s_{ij} разложениями (10.2), (10.3) (10.6), а S_{ija} , S_{ijb} , T_{ija} , T_{ijb} — разложениями (11.3) и будем приравнять нулю коэффициенты при одинаковых степенях κ . Получим такую последовательность граничных условий

$$\begin{aligned} s_{110}^{(l)} + \zeta s_{111}^{(l)} + S_{11a}^{(l-2q+3p-c)} + S_{11b}^{(l-q+p)} &= 0 \\ s_{120}^{(l)} + \zeta s_{121}^{(l)} + T_{12a}^{(l-q+2p-c)} + T_{12b}^{(l-2q+2p)} &= 0 \\ s_{130}^{(l)} + \zeta s_{131}^{(l)} + \zeta^2 s_{132}^{(l)} + S_{13a}^{(l-q+2p-c)} + S_{13b}^{(l)} &= 0 \\ (\alpha_1 = 0, \quad 0 \leq l < 2q - 2p) \end{aligned} \quad (12.2)$$

В ней значения индекса l ограничены неравенствами, записанными в скобках, так как только при таких l имеют силу использованные здесь формулы (10.6).

Кроме (12.2) в рассматриваемом случае надо требовать выполнения четырех статических условий затухания. Их для предстоящих рассуждений удобно записать в виде

$$\begin{aligned} 2s_{110}^{(l)}|_{\alpha_1=0} = 0, \quad 2s_{120}^{(l)}|_{\alpha_1=0} = 0 \\ 2 \left(s_{130}^{(l)} + \frac{1}{3} s_{132}^{(l)} \right)_{\alpha_1=0} - \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 [d_{20} T_{23a}^{(l-q+2p-c)} + Rk_{10} T_{23a}^{(l-q+p-c)}] A_{10} d\xi_1 + \\ + \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 \frac{R}{R_{20}} S_{22b}^{(l-q)} A_{10} d\xi_1 = 0 \\ \frac{2}{3} s_{111}^{(l)}|_{\alpha_1=0} - \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 [\zeta d_{20} T_{21a}^{(l-2q+3p-c)} - A_{10} \xi_1 d_{20} T_{23a}^{(l-2q+3p-c)}] A_{10} d\xi_1 = 0 \\ (0 \leq l < 2q - 2p) \end{aligned} \quad (12.3)$$

Чтобы получить этот результат, проинтегрируем каждое из граничных условий (12.2) по ζ в интервале $(-1, +1)$, умножим первое равенство (12.2) на ζ и вновь проинтегрируем по ζ в интервале $(-1, +1)$. Тогда, помня, что $s_{ijk}^{(l)}$ не зависят от ζ , полу-

¹ Справедливость предположений (12.1), (13.1), (14.2), обсуждается в п.16.

чим следующие четыре равенства:

$$\begin{aligned}
 2s_{110}^{(l)}|_{\alpha_1=0} + \int_{-1}^{+1} [S_{11a}^{(l-2q+3p-c)} + S_{11b}^{(l-q+p)}]_{\alpha_1=0} d\zeta &= 0 \\
 2S_{120}^{(l)}|_{\alpha_1=0} + \int_{-1}^{+1} [T_{12a}^{(l-q+2p-c)} + T_{12b}^{(l-2q+2p)}]_{\alpha_1=0} d\zeta &= 0 \\
 2 \left[s_{130}^{(l)} + \frac{1}{3} s_{132}^{(l)} \right]_{\alpha_1=0} + \int_{-1}^{+1} [S_{13a}^{(l-q+2p-c)} + S_{13b}^{(l)}]_{\alpha_1=0} d\zeta &= 0 \\
 \frac{2}{3} s_{111}^{(l)}|_{\alpha_1=0} + \int_{-1}^{+1} [S_{11a}^{(l-2q+3p-c)} + S_{11b}^{(l-q+p)}]_{\alpha_1=0} \zeta d\zeta &= 0
 \end{aligned} \tag{12.4}$$

$$(0 \leq l < 2q - 2p)$$

Исключим в левых частях (12.4) интегралы при помощи (7.1) и (7.2) и отбросим величины, верхние индексы которых заведомо отрицательные в силу неравенств, ограничивающих l в формулах (12.2). Это и приведет к требуемому результату.

Итак, имеем три равенства (12.2) и четыре равенства (12.3). Все они будут выполнены, если первое и третье равенства (12.2) рассматривать как торцевые условия для плоского погранслоя, второе равенство (12.2) — как торцевые условия для антиплоского погранслоя, а четыре равенства (12.3) — как граничные условия для внутреннего напряженного состояния.

При этом, допуская при построении плоского погранслоя формальную асимптотическую погрешность порядка

$$\varepsilon_b = O(\kappa_1^{-q+2p-c}) \tag{12.5}$$

торцевые условия для плоского погранслоя можно привести к виду

$$S_{11b}^{(r)} = 0, \quad S_{13b}^{(r)} = (3\zeta^2 - 1) s_{130}^{(r)} - \zeta s_{131}^{(r)} \quad (\alpha_1 = 0, 0 \leq r < q - 2p + c) \tag{12.6}$$

и, допуская для антиплоского погранслоя формальную асимптотическую погрешность порядка

$$\varepsilon_a = O(\kappa_1^{-q+p}) = O(h_*^{1-l}) \tag{12.7}$$

можно торцевое условие для антиплоского погранслоя записать так:

$$T_{12a}^{(r)} = -\zeta s_{121}^{(r+q-2p+c)} \quad (0 \leq r \leq q - p) \tag{12.8}$$

Приступая к доказательству справедливости равенств (12.6), и (12.8), примем, что в первых двух равенствах (12.2) индекс l ограничен соответственно неравенствами

$$0 \leq l < q - p, \quad 0 \leq l < q - 2p + c$$

Тогда в силу (4.3) все величины, относящиеся к погранслою, обратятся в нуль и получатся равенства

$$s_{110}^{(l)} + \zeta s_{111}^{(l)} = 0 \quad (0 \leq l < q - p), \quad s_{120}^{(l)} + \zeta s_{121}^{(l)} = 0 \quad (0 \leq l < q - 2p + c) \tag{12.9}$$

$$(\alpha_1 = 0)$$

которые будут следствием статических условий затухания (12.3), в чем легко убедиться, учтя (4.3), (10.4) и (10.7). Поэтому можно считать, что в первых двух равенствах (12.2) индекс l ограничен соответственно неравенствами

$$q - p \leq l < 2q - 2p, \quad q - 2p + c \leq l < 2q - 2p$$

Учтя это, сделаем в неравенствах (12.2) такие замены индекса l соответственно

$$l - q + p = r, \quad l - q + 2p - c = r, \quad l = r$$

Получим

$$\begin{aligned} s_{110}^{(r+q-p)} + \zeta s_{111}^{(r+q-p)} + S_{11a}^{(r-q+2p-c)} + S_{11b}^{(r)} &= 0 \quad (0 \leq r < q-p) \\ s_{120}^{(r+q-2p+c)} + \zeta s_{121}^{(r+q-2p+c)} + T_{12a}^{(r)} + T_{12b}^{(r-q+c)} &= 0 \quad (0 \leq r < q-c) \\ s_{130}^{(r)} + \zeta s_{131}^{(r)} + \zeta^2 s_{132}^{(r)} + S_{13a}^{(r-q+2p-c)} + S_{13b}^{(r)} &= 0 \quad (0 \leq r < 2q-2p) \end{aligned} \quad (12.10)$$

$(\alpha_1 = 0)$

Легко проверить, что $q - c \geq q - p$ ¹. Поэтому, считая, что антиплоский погранслои достаточно построить с формальной асимптотической погрешностью (12.7), можно во втором равенстве (12.10) отбросить член, связанный с плоским погранслоем. Равным образом, с формальной асимптотической погрешностью (12.5), можно в первом и третьем равенствах (12.10) отбросить члены, связанные с антиплоским погранслоем. Кроме того, из (10.7), (10.4) и (12.3) следует, что

$$\begin{aligned} s_{110}^{(r+q-p)} = s_{111}^{(r+q-p)} &= 0 \quad (0 \leq r + q - p < q - 2p + c) \\ s_{120}^{(r)} = 0 \quad (0 \leq r < q - p), \quad s_{130}^{(r)} + \frac{1}{3} s_{132}^{(r)} &= 0 \quad (0 \leq r < q - 2p + c) \end{aligned}$$

$(\alpha_1 = 0)$

Отсюда и получаются равенства (12.6) и (12.8).

Из формул (12.1) вытекает, что вблизи свободного края антиплоский погранслои P_a , вообще говоря, (при $p \neq 0$) в асимптотическом смысле обладает большей интенсивностью, чем плоский погранслои P_b . А именно можно условно написать

$$P_b = O(\kappa^{-p+c}) P_a$$

(это значит, что отношение наибольших напряжений или наибольших перемещений в P_b и в P_a есть величина вида $O(\kappa^{-p+c})$).

Отсюда следует, что в полном погранслое P , являющимся суммой P_a и P_b , асимптотическая погрешность (12.5), допущенная в плоском погранслое, соответствует формальной асимптотической погрешности (12.7).

13. Пусть край оболочки, проходящий вдоль линии $\alpha_1 = 0$, жестко заделан и на нем должны быть выполнены такие граничные условия теории упругости

$$\begin{aligned} v_1^* = v_1 + hU_{1a} + hU_{1b} &= 0, \quad v_2^* = v_2 + hV_{2a} + hV_{2b} = 0 \\ v_3^* = v_3 + hU_{3a} + hU_{3b} &= 0 \quad (\alpha_1 = 0) \end{aligned}$$

Примем для этого случая, что

$$\lambda = p + d, \quad \mu = q + d \quad (13.1)$$

¹ Здесь и всегда, когда речь идет о выполнении неравенств, принимается во внимание ограничение (10.5).

Тогда, действуя так же как в п. 12 и учтя первую формулу (3.2), получим такую последовательность граничных условий:

$$\begin{aligned} v_{10}^{(l)} + \zeta v_{11}^{(l)} + RU_{1a}^{(l-3q+3p)} + RU_{1b}^{(l-q+p)} &= 0 \quad (0 \leq l < 2q - 2p) \\ v_{20}^{(l)} + \zeta v_{21}^{(l)} + RV_{2a}^{(l-2q+2p)} + RV_{2b}^{(l-2q+2p)} &= 0 \quad (0 \leq l < 2q - 2p) \\ v_{30}^{(l)} + \zeta v_{31}^{(l)} + \zeta^2 v_{32}^{(l)} + RU_{3a}^{(q-3q+2p+c)} + RU_{3b}^{(l-q+c)} &= 0 \quad (0 \leq l < 2q - p - c) \\ &(\alpha_1 = 0) \end{aligned} \quad (13.2)$$

Здесь в первых двух равенствах для l приняты обычные ограничения, в рамках которых остается верным линейный закон изменения v_1, v_2 по ζ ; в третьем равенстве l ограничено сверху числом $2q - p - c$, которое при $p \neq 0$, больше чем $2q - 2p$. В связи с этим считается, что v_3 определено формулой (10.10).

Потребуем, чтобы в первом и третьем равенствах (13.2) индекс l был ограничен соответственно неравенствами

$$0 \leq l < q - p, \quad 0 \leq l < q - c$$

Тогда в силу (4.3) величины, относящиеся к погранслоям, пропадут и упомянутые равенства примут вид

$$\begin{aligned} v_{10}^{(l)} + \zeta v_{11}^{(l)} &= 0 \quad (0 \leq l < q - p) \\ v_{30}^{(l)} + \zeta v_{31}^{(l)} + \zeta^2 v_{32}^{(l)} &= 0 \quad (0 \leq l < q - c) \end{aligned} \quad (\alpha_1 = 0) \quad (13.3)$$

Их можно отбросить, так как ниже выяснится, что (13.3) есть следствие некоторых других соотношений. Поэтому будем считать, что в первом и третьем равенствах (13.2) значения l ограничены соответственно неравенствами

$$q - p \leq l < 2q - 2p, \quad q - c \leq l < 2q - p - c$$

Пользуясь этим, произведем такие замены индекса l

$$l - q + p = r, \quad l - q + c = r$$

В результате первое и третье равенства (13.2) можно будет записать так:

$$EU_{1b}^{(r)} = a_0 + a_1 \zeta, \quad EU_{3b}^{(r)} = b_0 + b_1 \zeta + b_2 \zeta^2 \quad (\alpha_1 = 0, 0 \leq r < q - p) \quad (13.4)$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{E}{R} v_{10}^{(r+q-p)}, & a_1 &= -\frac{E}{R} v_{11}^{(r+q-p)} \\ b_0 &= -\frac{E}{R} v_{30}^{(r+q-c)}, & b_1 &= -\frac{E}{R} v_{31}^{(r+q-c)}, & b_2 &= -\frac{E}{R} v_{32}^{(r+q-c)} \end{aligned} \quad (13.5)$$

Будем рассматривать (13.4), (13.5) как торцевые условия для плоского погранслоя и потребуем, чтобы выполнялись соответствующие условия затухания.

Их в данном случае можно выразить тремя равенствами

$$v_{11}^{(r+q-p)} = f v_{32}^{(r+q-c)}, \quad v_{30}^{(r+q-c)} = g v_{32}^{(r+q-c)}, \quad v_{10}^{(r+q-p)} = m v_{31}^{(r+q-c)} \quad (13.6)$$

$(\alpha_1 = 0, 0 \leq r < q - p)$

в которых коэффициенты f, g, m выражаются формулами

$$m = - \frac{P_1^{[w1]}}{P_1^{[u0]}}$$

$$f = \frac{P_2^{[w0]} P_3^{[w2]} - P_2^{[w2]} P_3^{[w0]}}{P_2^{[u1]} P_3^{[w0]} - P_2^{[w0]} P_3^{[u1]}} \quad (13.7)$$

$$g = \frac{P_2^{[w2]} P_3^{[u1]} - P_2^{[u1]} P_3^{[w2]}}{P_2^{[u1]} P_3^{[w0]} - P_2^{[w0]} P_3^{[u1]}}$$

а величины, стоящие в правых частях этих равенств, могут быть получены в результате решения пяти плоских задач, изображенных на фиг. 2 (на торце $\xi_1' = 0$ показаны эпюры ненулевых перемещений, а на торце $\xi_1' = -l$ ненулевые реакции, входящие в обсуждаемые формулы).

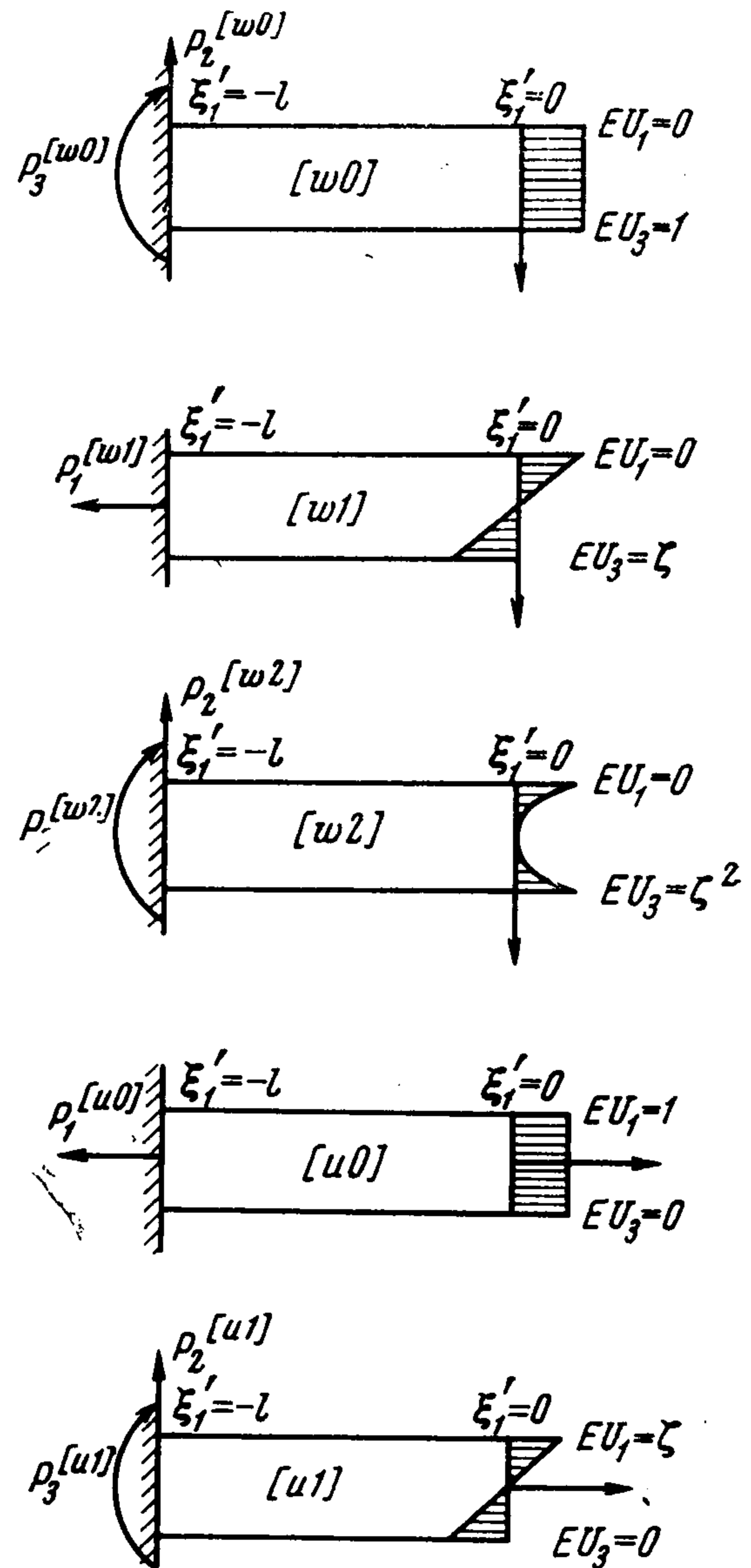
Для доказательства равенств (13.6), (13.7) обратимся к плоской задаче, рассмотренной в п. 8. В ней торцевые условия (8.3) представляют собой обобщение равенств (13.4) и можно воспользоваться кинематическими условиями затухания (8.4). В рассматриваемом случае в (8.4) надо считать, что $P_\rho^* \equiv 0$, так как в (13.4) индекс r не превышает q и, следовательно, уравнения плоского погранслоя однородны (см. п. 5). Кроме того, в суммах (8.4) сохранятся только члены, содержащие a_0, a_1, b_0, b_1, b_2 , а из фиг. 2 видно, что P_1 отличны от нуля лишь в напряженных состояниях $S^{[u0]}$ и $S^{[w1]}$, а реактивные поперечная сила и момент P_2, P_3 будут отличны от нуля только в напряженных состояниях $S^{[u1]}, S^{[w0]}$ и $S^{[w2]}$. Поэтому в рассматриваемом случае кинематические условия затухания примут вид

$$P_1 \equiv a_0 P_1^{[u0]} + b_1 P_1^{[w1]} = 0, \quad P_2 \equiv a_1 P_2^{[u1]} + b_0 P_2^{[w0]} + b_2 P_2^{[w2]} = 0$$

$$P_3 \equiv a_1 P_3^{[u1]} + b_0 P_3^{[w0]} + b_2 P_3^{[w2]} = 0$$

Отсюда, приняв во внимание формулы (13.5), и получаем (13.6), (13.7).

Три кинематические условия затухания (13.6), (13.7) будем рассматривать как граничные условия для внутреннего напряженного состояния и присоединим к ним в качестве четвертого условия второе равенство (13.2). Тогда первое и третье равенства (13.2) после преобразования их к виду (13.4) и (13.5) образуют торцевые условия для плоского погранслоя.



Фиг. 2

В рамках принятой здесь формальной асимптотической точности (4.4) описанные выше граничные условия для внутреннего напряженного состояния приводятся к виду

$$\begin{aligned} v_{10}^{(r)} + \frac{\nu R}{E} m (s_{110}^{(r-q+p)} + s_{220}^{(r-q+p)}) &= 0 \quad (0 \leq r < 2q - p - c) \\ v_{20}^{(r)} = v_{30}^{(r)} &= 0 \quad (0 \leq r < 2q - 2p) \\ v_{11}^{(r)} + \frac{\nu R}{2E} f (s_{111}^{(r-q+p)} + s_{221}^{(r-q+p)}) &= 0 \quad (0 \leq r < 2q - 2p) \\ (\alpha_1 = 0) \end{aligned} \quad (13.8)$$

а торцевые условия для плоского погранслоя с формальной асимптотической погрешностью (12.7) можно записать так

$$\begin{aligned} EU_{1b}^{(r)} &= \nu m (s_{110}^{(r)} + s_{220}^{(r)}) + 1/2 \nu f \zeta (s_{111}^{(r)} + s_{221}^{(r)}) \\ EU_{3b}^{(r)} &= 1/2 \nu g (g + \zeta^2) (s_{111}^{(r)} + s_{221}^{(r)}) + \nu \zeta (s_{110}^{(r)} + s_{220}^{(r)}) \\ (\alpha_1 = 0, 0 \leq r < q - p) \end{aligned} \quad (13.9)$$

Докажем справедливость равенств (13.8) и (13.9). Величины, стоящие в правых частях равенств (13.6), можно выразить при помощи (10.12) (10.13). Выполним в этих равенствах соответствующие замены индексов, заметим, что при $r < q - p$ справедливы неравенства

$$r + q - c < 3q - 2p, \quad r - q < 0, \quad r - q + c < 0$$

и отбросим величины с заведомо отрицательными индексами. Получим

$$\begin{aligned} v_{32}^{(r+q-c)} &= -\frac{\nu R}{2E} (s_{111}^{(r)} + s_{221}^{(r)}) \quad (0 \leq r < q - p) \\ v_{31}^{(r+q-c)} &= -\frac{\nu R}{E} (s_{110}^{(r)} + s_{220}^{(r)}) \quad (0 \leq r < q - c) \quad (\alpha_1 = 0) \end{aligned} \quad (13.10)$$

В силу (10.7) имеем

$$s_{111}^{(r)} = s_{221}^{(r)} = 0 \quad (r < q - 2p + c)$$

Поэтому

$$v_{32}^{(l)} = 0 \quad (0 \leq l < 2q - 2p), \quad v_{31}^{(l)} = 0 \quad (0 \leq l < q - c) \quad (\alpha_1 = 0) \quad (13.11)$$

Из (13.11) и (13.6) вытекает, что

$$v_{10}^{(l)} = 0 \quad (0 \leq l < q - p), \quad v_{11}^{(l)} = 0 \quad (0 \leq l < 2q - 3p + c) \quad (13.12)$$

$$v_{30}^{(l)} = 0 \quad (0 \leq l < 2q - 2p) \quad (13.13)$$

$$(\alpha_1 = 0)$$

Вместе с тем имеют места неравенства

$$2q - 3p + c \geq q - p, \quad 2q - 2p \geq q - c$$

откуда следует, что (13.3) действительно можно было игнорировать, так как эти равенства есть следствие (13.6) и (13.11). Подставив (13.10) в (13.6), будем иметь

$$\begin{aligned} v_{11}^{(r+q-p)} &= -(\nu R / 2E) f (s_{111}^{(r)} + s_{221}^{(r)}) \\ v_{30}^{(r+q-c)} &= -(\nu R / 2E) g (s_{111}^{(r)} + s_{221}^{(r)}) \\ v_{10}^{(r+q-p)} &= -(\nu R / E) m (s_{110}^{(r)} + s_{220}^{(r)}) \\ (\alpha_1 = 0) \end{aligned} \quad (0 \leq r < q - p) \quad (13.14)$$

Вернувшись к граничным условиям (13.2), отметим, что второе из этих равенств можно заменить равенством

$$v_{20}^{(l)} = 0 \quad (\alpha_1 = 0, 0 \leq l < 2q - 2p) \quad (13.15)$$

так как величины, связанные с погранслоями, в нем имеют заведомо отрицательные индексы. Далее из граничных равенств (13.11) и (13.15) следует, что $v_{21}^{(l)}$ на границе равно нулю при $l < 2q - 2p$. Действительно, любое выражение, составленное из $v_{20}^{(l)}$ и $v_{30}^{(l)}$ или их производных по α_2 в силу (13.11) и (13.15), должно исчезать, если $l < 2q - 2p$, а (10.8) показывает, что именно такой вид имеет величина $v_{21}^{(l)}$.

Итак, показано, что граничные условия (13.2) эквивалентны равенствам (13.4), (13.5) и (13.15), а кинематические условия затухания сводятся к равенствам (13.11), (13.12), (13.13).

Равенства (13.11) можно отбросить: в силу (10.12), (10.13) и (10.7) они выполняются не только на границе, но и всюду. Равенства (13.12), (13.13) и (13.15) при помощи (13.14) приводятся к виду (13.8), а равенства (13.4) и (13.5) при помощи (13.10) и (13.13) преобразовываются в торцевые условия (13.9). Требуемое положение доказано.

В числе выведенных соотношений не оказалось торцевого условия для антиплоского погранслоя. Однако из (13.1) видно, что в данном случае в обозначениях, принятых в п. 12

$$P_a = O(\kappa^{-q+p}) P_b$$

а это значит, что если плоский погранслоем построен с формальной асимптотической погрешностью (12.7), то в рамках такой точности антиплоский погранслоем и не должен учитываться.

14. Пусть на краю, проходящем вдоль линии $\alpha_1 = 0$, должны выполняться следующие смешанные граничные условия теории упругости:

$$\begin{aligned} s_{11}^* &\equiv s_{11} + S_{11a} + S_{11b} = 0, & v_2^* &= v_2 + hV_{2a} + hV_{2b} = 0 \\ v_3^* &\equiv v_3 + hU_{3a} + hU_{3b} = 0 \end{aligned} \quad (14.1)$$

(будем считать, что они моделируют шарнирно опертый край). В этом случае, приняв

$$\lambda = p + d, \quad \mu = q + d \quad (14.2)$$

получим такую последовательность граничных условий

$$\begin{aligned} s_{110}^{(l)} + \zeta s_{111}^{(l)} + S_{11a}^{(l-2q+2p)} + S_{11b}^{(l)} &= 0 \quad (0 \leq l < 2q - 2p) \\ v_{20}^{(l)} + \zeta v_{21}^{(l)} + RV_{2a}^{(l-2q+2p)} + RV_{2b}^{(l-2q+2p)} &= 0 \quad (0 \leq l < 2q - 2p) \\ v_{30}^{(l)} + \zeta v_{31}^{(l)} + \zeta^2 v_{32}^{(l)} + RU_{3a}^{(l-3q+2p+c)} + RU_{3b}^{(l-q+c)} &= 0 \quad (0 \leq l < 2q - p - c) \end{aligned} \quad (14.3)$$

($\alpha_1 = 0$)

К ним надо присоединить два статических и одно кинематическое условия затухания.

Статическими условиями затухания в рассматриваемом случае служат первое и четвертое равенства (6.4). Их можно преобразовать по схеме, описанной в п. 12. Из первого граничного условия (14.3), так же как в п. 12, получим первое и четвертое равенства (12.4), в которых надо для величин, связанных с антиплоским погранслоем, заменить индекс $l - 2q + 3p - c$ на $l - 2q + 2p$, а для величин, связанных с плоским погранслоем, заменить индекс $l - q + p$ на l .

Отсюда при помощи (7.1) и (7.2) после отбрасывания величин с заведомо отрицательными индексами получаем требуемые статические условия затухания

$$2s_{110}^{(l)}|_{\alpha_1=0} + \int_{-1}^{+1} d\xi \int_{-\infty}^0 Rk_{20} S_{22b}^{(l-q)} A_{10} d\xi_1 = 0 \quad (0 \leq l < 2q - 2p) \quad (14.4)$$

$$\frac{2}{3} s_{111}^{(l)}|_{\alpha_1=0} + \int_{-1}^{+1} d\xi \int_{\infty}^0 \left[Rk_{20} \xi S_{22b}^{(l-q)} - \frac{R}{R_{20}} A_{10} \xi_1 S_{22b}^{(l-q)} \right] A_{10} d\xi_1 = 0$$

из которых, в частности, следует, что

$$s_{110}^{(l)} = s_{111}^{(l)} = 0 \quad (\alpha_1 = 0, 0 \leq l < q) \quad (14.5)$$

Ограничим в третьем условии (14.3) значения l неравенствами $0 \leq l < q - c$ и отбросим в силу (4.3) слагаемые, относящиеся к погранслоям. Тогда получится равенство

$$v_{30}^{(l)} + \zeta v_{31}^{(l)} + \zeta^2 v_{32}^{(l)} = 0 \quad (\alpha_1 = 0, 0 \leq l < q - c) \quad (14.6)$$

которое, как выяснится ниже, можно не принимать во внимание, так как оно является следствием других соотношений. Таким образом l в третьем равенстве (14.3) можно ограничить неравенствами

$$q - c \leq l < 2q - p - c$$

и, основываясь на этом, выполнить в первом и третьем равенствах (14.3) замены индексов по формулам $l = r$ и $l - q + c = r$ соответственно. Тогда, учтя (4.3), можно эти равенства записать так

$$S_{11b}^{(r)}|_{\alpha_1=0} = f(\zeta) \quad (0 \leq r < 2q - 2p), \quad EU_{3b}^{(r)}|_{\alpha_1=0} = c_0 + c_1 \zeta + c_2 \zeta^2 \quad (0 \leq r < q - p) \quad (14.7)$$

где

$$f(\zeta) = -s_{110}^{(r)} - \zeta s_{111}^{(r)}$$

$$c_0 = -\frac{E}{R} v_{30}^{(r+q-c)}, \quad c_1 = -\frac{E}{R} v_{31}^{(r+q-c)}, \quad c_2 = -\frac{E}{R} v_{32}^{(r+q-c)} \quad (14.8)$$

Они представляют собой торцевые условия для плоского погранслоя, а соответствующее кинематическое условие затухания заключается в равенстве

$$v_{30}^{(r)} = 0 \quad (\alpha_1 = 0, 0 \leq r < 2q - 2p) \quad (14.9)$$

Чтобы показать это заметим, что плоская задача с торцевыми условиями вида (14.7) рассмотрена в п. 9. Единственным кинематическим условием затухания для нее является равенство (9.2). Применим его к рассматриваемому случаю и будем считать, что в первом равенстве (14.7) индекс r ограничен такими же неравенствами, как и во втором. Тогда r будет достаточно мал, чтобы уравнения (5.1) плоского погранслоя были однородными и чтобы выполнялись равенства (14.5), в силу которых $f(\zeta) = 0$. Кроме того, в нашем случае в (9.1) сумма состоит из трех первых членов и можно

считать, что среди напряженных состояний, введенных в п. 9, отличны от нуля только $S^{(w0)}$, $S^{(w1)}$, $S^{(w2)}$, (фиг. 3), причем очевидно, что $S^{(w1)}$ дает нулевую поперечную реактивную силу. Таким образом (9.2) примет вид

$$c_0 P_2^{(w0)} + c_2 P_2^{(w2)} = 0$$

откуда, учитывая (14.8) и (13.10), получаем равенство

$$v_{30}^{(r+q-c)} = e \frac{vR}{2E} (s_{111}^{(r)} + s_{221}^{(r)}) \quad (\alpha_1 = 0, 0 \leq r < q - p) \quad (14.10)$$

в котором

$$e = P_2^{(w2)} / P_2^{(w0)} \quad (14.11)$$

Здесь $P_2^{(w0)}$ и $P_2^{(w2)}$ — поперечные реакции в первой и третьей задачах, изображенных на фиг. 3.

Величина, стоящая в правой части равенства (14.10), в силу (10.7) отлична от нуля только при $r \geq q - 2p + c$. Отсюда и вытекает обсуждаемое равенство (14.9).

Отметим, что для величин $v_{30}^{(l)}$, $v_{31}^{(l)}$, $v_{32}^{(l)}$ имеют место формулы (14.9) и (13.10). Из них следует, что в пределах изменения l , указанного для (14.6), все перечисленные величины обращаются в нуль, а это значит, что равенство (14.6) действительно автоматически выполняется.

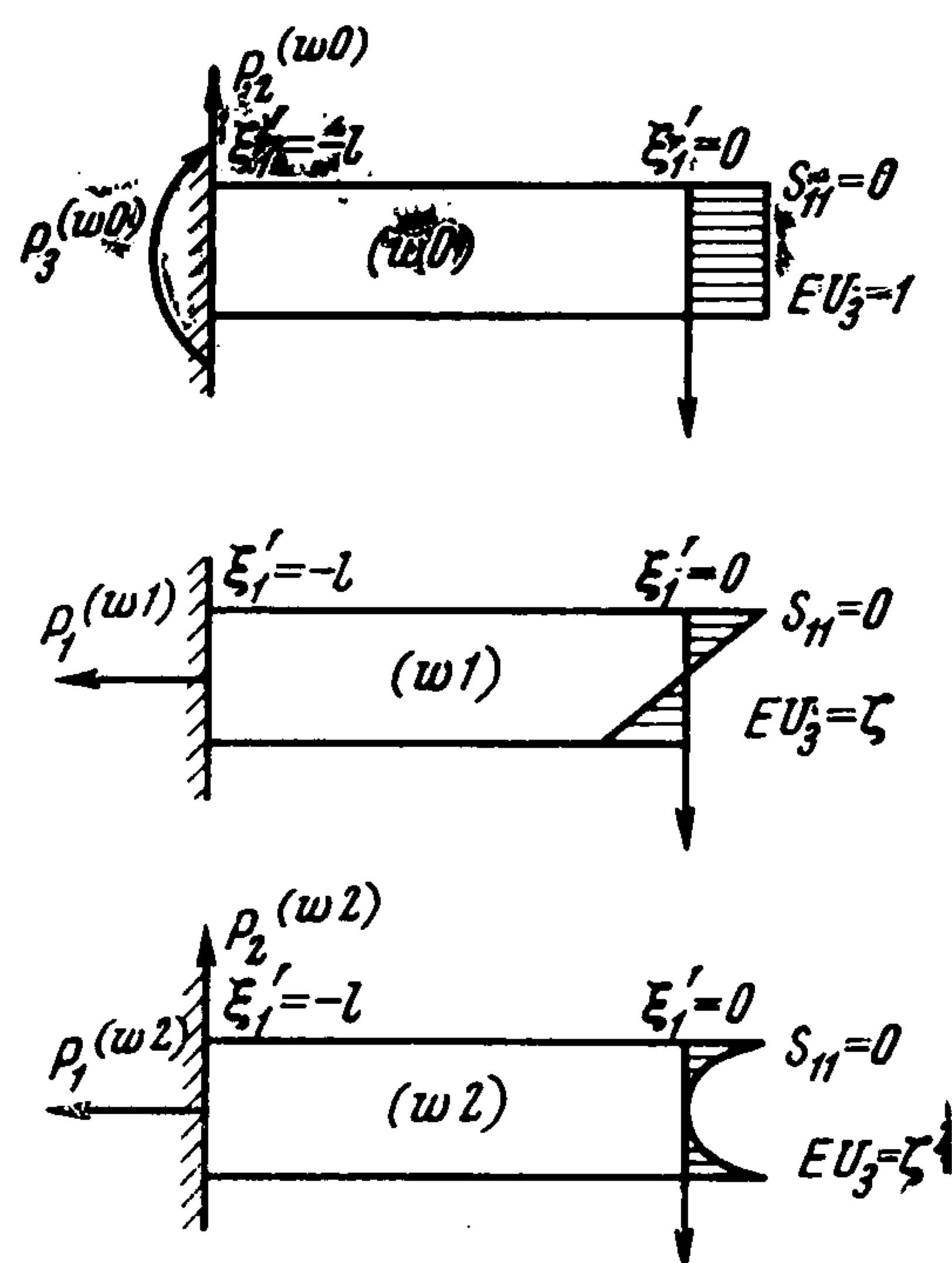
Второе равенство (14.3) тождественно со вторым равенством (13.2) и также приводится к виду (13.15).

Итак, для внутреннего напряженного состояния на шарнирном краю получают четыре граничные условия, выражаемые двумя равенствами (14.4) и равенствами (13.15), (14.9), позволяющими строить внутреннее напряженное состояние с формальной асимптотической погрешностью (4.4). Для плоского погранслоя получают торцевые условия (14.7), (14.8), позволяющие строить его с формальной асимптотической погрешностью (12.7): при этом в первом равенстве (14.7) достаточно ограничить значения r неравенством $r < q - p$, как и было сделано при выводе кинематического условия затухания.

Торцевые условия (14.7), (14.8) при помощи (13.8), (14.5) и (14.10) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} S_{11b}^{(r)} &= 0 \\ EU_{3b}^{(r)} &= 1/2 v (-e + \zeta^2) (s_{111}^{(r)} + s_{221}^{(r)}) + v \zeta (s_{110}^{(r)} + s_{220}^{(r)}) \\ &(\alpha_1 = 0, 0 \leq r < q - p) \end{aligned} \quad (14.12)$$

Торцевое условие для антиплоского погранслоя в случае шарнирно опертого края отсутствует. В рамках точности (12.7) его строить и не нужно, как следует из формул (14.2).



Фиг. 3

15. Граничные условия предыдущих разделов сформулированы относительно коэффициентов разложений (10.2), (10.3) и (11.3). Умножая полученные соотношения на подобранные должным образом степени κ и суммируя, можно вернуться от разложений к исходным величинам. При этом надо учитывать форму упомянутых разложений, формулы (12.1), (13.1) и (14.2) для чисел λ , μ и первое равенство (3.2). Кроме того, надо раскрыть смысл d_{20} по формулам (3.4), (3.1) и использовать следующее, легко проверяемое правило суммирования:

если

$$\kappa^a \left[\sum_{s=0}^{\sigma-1} \kappa^{-s} P^{(s)} + O(\kappa^{-\sigma}) \right] = P$$

то

$$\kappa^a \sum_{s=0}^{\sigma-1} \kappa^{-s} P^{(s-b)} = \kappa^{-b} P + O(\kappa^{a-\sigma})$$

Результаты этих выкладок заключаются в следующем.

Свободный край. Из (12.3), (12.6) и (12.8) получаются граничные условия для внутреннего напряженного состояния

$$\begin{aligned} 2s_{110} |_{\alpha_1=0} = 0, \quad 2s_{120} |_{\alpha_1=0} = 0 & \quad (15.1) \\ 2 \left(s_{130} + \frac{1}{3} s_{132} \right) |_{\alpha_1=0} - h \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 \left[\frac{1}{A_{20}} \frac{\partial T_{23a}}{\partial \alpha_2} + k_{10} T_{23a} \right] A_{10} d\xi_1 + \\ + \frac{h}{R_{20}} \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 S_{22b} A_{10} d\xi_1 \\ \frac{2}{3} s_{111} |_{\alpha_1=0} - h \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 \left[\frac{\zeta}{A_{20}} \frac{\partial T_{21a}}{\partial \alpha_2} - \frac{A_{10}\xi_1}{A_{20}} \frac{\partial T_{23a}}{\partial \alpha_2} \right] A_{10} d\xi_1 = 0 \end{aligned}$$

и торцевые условия для плоского и антиплоского погранслоев

$$S_{11b} = 0, \quad S_{13b} = (3\zeta^2 - 1) s_{130} - \zeta s_{131} \quad (\alpha_1 = 0) \quad (15.2)$$

$$T_{12a} = -\zeta s_{121} \quad (\alpha_1 = 0) \quad (15.3)$$

Жестко заделанный край. Из равенств (13.8), (13.9) получаем граничные условия для внутреннего напряженного состояния

$$\begin{aligned} v_{10} + (\nu h / E) m (s_{110} + s_{220}) = 0, \quad v_{20} = 0 \\ v_{30} = 0, \quad v_{11} + (\nu h / 2E) f (s_{111} + s_{221}) = 0 \\ (\alpha_1 = 0) \end{aligned} \quad (15.4)$$

и торцевые условия для плоского погранслоя

$$\begin{aligned} EU_{1b} = \nu m (s_{110} + s_{220}) + 1/2 \nu f \zeta (s_{111} + s_{221}) \\ EU_{3b} = \nu \zeta (s_{110} + s_{220}) - 1/2 \nu (g + \zeta^2) (s_{111} + s_{221}) \\ (\alpha_1 = 0) \end{aligned} \quad (15.5)$$

Отметим, что в четвертом условии (15.4) величину v_{11} можно выразить через v_{30} и v_{10} при помощи (10.8). Выполнив здесь суммирование, получим

$$v_{11} = -h \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial v_{30}}{\partial \alpha_1} + \frac{v_{10}}{R_1} \right) \quad (15.6)$$

Шарнирный край. Из равенств (14.4), [(14.9), (13.15)] вытекают граничные условия для внутреннего напряженного состояния

$$2s_{110}|_{\alpha_1=0} + hk_{20} \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 S_{22b} A_{10} d\xi_1 = 0, \quad v_{20}|_{\alpha_1=0} = 0, \quad v_{30}|_{\alpha_1=0} = 0 \quad (15.7)$$

$$\frac{2}{3} s_{111}|_{\alpha_1=0} + hk_{20} \int_{-1}^{+1} \zeta d\zeta \int_{-\infty}^0 S_{22b} A_{10} d\xi_1 - \frac{h}{R_{20}} \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 A_{10} \xi_1 S_{22b} A_{10} d\xi_1 = 0$$

и торцевые условия для плоского погранслоя

$$S_{11b} = 0, \quad EU_{3b} = \nu \zeta (s_{110} + s_{220}) + \frac{\nu}{2} (-e + g) (s_{111} + s_{221}) \quad (\alpha_1 = 0) \quad (15.8)$$

16. Остановимся на структуре граничных условий, полученных в п. 15. В них внутреннее напряженное состояние и погранслои не разделены. Однако в граничных условиях, накладываемых на внутреннее напряженное состояние, погранслои имеет в асимптотическом смысле второстепенное значение (за одним исключением, которое обсуждается ниже). Это утверждение легко проверить, так как оценки для внутреннего напряженного состояния получаются из (10.2), (10.3), (10.7) и (10.8), оценки для погранслоев — из разложений (11.3) и формул (12.1), (13.1) и (14.2) для чисел λ, μ , а символ $d(\cdot) / d\alpha_2$ можно оценить при помощи (3.3). Выполнив такой анализ, убедимся что упоминавшимся выше исключением [будет только третье равенство (15.1), в котором первые два слагаемые находятся в таком асимптотическом соотношении

$$h \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 \left[\frac{1}{A_{20}} \frac{\partial T_{23a}}{\partial \alpha_2} + k_{10} T_{23a} \right] A_{10} d\xi_1 = 0 \quad (\kappa^{-q+2p-c}) \left(s_{130} + \frac{1}{3} s_{132} \right)_{\alpha_1=0} \quad (16.1)$$

а это значит, что при $2p \geq q$, т. е. при $t \geq 1/2$, антиплоский погранслой и внутреннее напряженное состояние в третьем равенстве (15.1) будут соизмеримы.

В рамках точности (4.3) левую часть равенства (16.1) можно выразить так

$$h \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 \left[\frac{1}{A_{20}} \frac{\partial T_{23a}}{\partial \alpha_2} + k_{10} T_{23a} \right] A_{10} d\xi_1 = -\frac{2}{3} \frac{h}{A_{20}} \frac{\partial s_{121}}{\partial \alpha_2} \quad (16.2)$$

В самом деле, смысл k_{10} определяется формулами (2.3), поэтому

$$\frac{1}{A_{20}} \frac{\partial T_{23a}}{\partial \alpha_2} + k_{10} T_{23a} = \frac{1}{A_{10} A_{20}} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_{10} T_{23a}) \quad (16.3)$$

и, следовательно

$$h \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 \left[\frac{1}{A_{20}} \frac{\partial T_{23a}}{\partial \alpha_2} + k_{10} T_{23a} \right] A_{10} d\xi_1 = \frac{h}{A_{20}} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left\{ \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 T_{23a} A_{10} d\xi_1 \right\} \quad (16.4)$$

Выполним в фигурной скобке интегрирование по частям относительно ζ и учтем условия (6.2). Получим

$$\int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 T_{23a} A_{10} d\xi_1 = - \int_{-1}^{+1} \zeta d\zeta \int_{-\infty}^0 \frac{\partial T_{23a}}{\partial \zeta} A_{10} d\xi_1$$

Вместе с тем из (16.1) следует, что требуемая точность (4.4) будет соблюдена, если обсуждаемый интеграл будет вычислен с формальной асимптотической погрешностью порядка $O(\kappa^{-q+c})$, а так как $c \geq 0$, то можно считать, что T_a удовлетворяет однородным уравнениям (5.2). Следовательно

$$\int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 T_{23a} A_{10} d\xi_1 = \int_{-1}^{+1} \zeta d\zeta \int_{-\infty}^0 \frac{1}{A_{10}} \frac{\partial T_{12a}}{\partial \xi_1} A_{10} d\xi_1 = \int_{-1}^{+1} \zeta T_{12a} |_{\xi_1=0} d\zeta$$

Здесь подынтегральное выражение в правой части равенства можно заменить через краевое значение s_{121} при помощи (15.3), откуда и получится формула (16.2).

Теперь можно сформулировать такой итерационный процесс выполнения граничных условий предыдущего раздела, в котором внутреннее напряженное состояние, плоский погранслои и антиплоский погранслои в известном смысле отделены друг от друга.

Отбросим в граничных условиях внутреннего напряженного состояния те слагаемые, которые порождаются погранслоем и имеют второстепенное значение, а слагаемое (16.1), не подчиняющееся этому правилу, выразим при помощи (16.2). Тогда в пределах некоторой точности построение внутреннего напряженного состояния выделится в самостоятельную задачу. Решив ее, можно обратиться к построению погранслоев, считая в соответствующих условиях известными члены, порождаемые внутренним напряженным состоянием. Это приведет к тому, что плоский и антиплоский погранслои также отделятся друг от друга, а дальше можно применять очевидные итерации. Это и есть тот итерационный процесс, о котором говорилось в п. 11, и тот факт, что его удалось получить, показывает, что формулами (12.1), (13.1) и (14.2) действительно определяются непротиворечивые значения показателей λ , μ .

17. Покажем теперь, что если считать известными решения некоторых вспомогательных задач, то отделение внутреннего напряженного состояния можно выполнить со всей принятой здесь асимптотической точностью (4.4).

Вспомогательные задачи будут отмечаться цифрами в квадратных скобках и заключаются они в построении затухающих решений, однородных уравнений плоской или антиплоской задач теории упругости в полуполосе

$$-\infty < A_{10} \xi_1 \leq 0, \quad -1 \leq \zeta \leq +1$$

на лицевых сторонах которой должны отсутствовать внешние силы. Приводим торцевые условия, которыми различаются вспомогательные задачи [1], [2], ..., [7] (задача [1] — антиплоская, а остальные задачи — плоские):

[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]
$T_{12} = \zeta$	$S_{11} = 0$	$S_{11} = 0$	$EU_1 = m$	$EU_1 = f\zeta$	$S_{11} = 0$	$S_{11} = 0$
—	$S_{13} = 3\zeta^2 - 1$	$S_{13} = \zeta$	$EU_3 = \zeta$	$EU_3 = g + \zeta^2$	$EU_3 = \zeta$	$EU_3 = -e + \zeta^2$

Существование затухающих решений во всех вспомогательных задачах обеспечено. Задача [1] легко решается при помощи тригонометрических рядов и в ней справедливость этого утверждения проверяется непосредственно. В задачах [2], [3] торцевые нагрузки самоуравновешены и затухание следует из принципа Сен-Венана. В задаче [6] оно вытекает из результатов работы [10], наконец, в задачах [4], [5], [7] из условий затухания и определялись числа m, f, g, e (п. 8,9).

Торцевые условия (15.2), (15.3), (15.5) и (15.8) можно представить как линейные комбинации торцевых условий вспомогательных задач. Поэтому плоские и антиплоские погранслои, возникающие вблизи краев с рассмотренными выше условиями закрепления, также представляют собой линейные комбинации решений вспомогательных задач. А именно вблизи свободного края

$$T = T^{[1]} [s_{121}]_{\alpha_1=0}, \quad S = S^{[2]} [s_{130}]_{\alpha_1=0} + S^{[3]} [s_{131}]_{\alpha_1=0} \quad (17.1)$$

вблизи жестко заделанного края

$$S = \nu S^{[4]} [s_{110} + s_{220}]_{\alpha_1=0} + \frac{1}{2} \nu S^{[5]} [s_{111} + s_{221}]_{\alpha_1=0} = 0 \quad (17.2)$$

вблизи шарнирной заделки

$$S = \nu S^{[6]} [s_{110} + s_{220}]_{\alpha_1=0} + \frac{1}{2} \nu S^{[7]} [s_{111} + s_{221}]_{\alpha_1=0} \quad (17.3)$$

Полученными формулами и достигается поставленная цель, так как теперь в граничных условиях для внутреннего напряженного состояния можно исключить величины, связанные с погранслоем.

Соответствующие результаты для удобства сравнения сформулируем в терминах классической теории оболочек. Для этого, воспользовавшись равенствами (10.1), (10.6), (3.1) и (3.2), напишем формулы для усилий, моментов и перемещений. В обозначениях работы [11] они имеют вид

$$\begin{aligned} T_i &= 2hs_{i10}, & S_1 &= 2hs_{120}, & G_i &= -\frac{2}{3}h^2s_{i11}, & H_1 &= \frac{2}{3}h^2s_{121} \\ N_i &= -2h(s_{i30} + \frac{1}{3}s_{i32}) & & & & & & (i=1, 2) \\ u &= v_{10}, & v &= v_{20}, & w &= v_{30}, & v_{11} &= h\gamma_1 \end{aligned} \quad (17.4)$$

(γ_1 — упругий угол поворота).

Выразим в граничных условиях для внутреннего напряженного состояния, т. е. в равенствах (15.1), (15.4), (15.6) и (15.7) величины, относящиеся к погранслою, при помощи (17.1), (17.2) или (17.3), заметим, что имеет место формула (16.2), а также равенства вида (16.3) и перейдем по формулам (17.4) к усилиям, моментам и перемещениям теории оболочек. Получим:

граничные условия на свободном крае

$$\begin{aligned} T_1 &= 0, & S_1 &= 0 \\ N_1 + \frac{1}{A_2} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - \frac{h^2}{R_2} a^{[3]} s_{131} &= 0, & G_1 + ha^{[1]} \frac{1}{A_2} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} &= 0 \end{aligned} \quad (17.5)$$

граничные условия на жестко заделанном крае

$$\begin{aligned} 2Ehu_1 + \nu hm(T_1 + T_2) &= 0, & 2Ehu_2 &= 0 \\ 2Ehw &= 0, & 2Eh\gamma_1 - (\nu/h) f(G_1 + G_2) &= 0 \end{aligned} \quad (17.6)$$

граничные условия для шарнирно опертого края

$$\begin{aligned} T_1 + \nu h a^{[6]} k_2 (T_1 + T_2) &= 0, & v &= 0 & (17.7) \\ w = 0, G_1 - \nu h a^{[7]} k_2 (G_1 + G_2) + \nu h^2 \frac{b^{[6]}}{R_2} (T_1 + T_2) &= 0 \end{aligned}$$

Здесь буквы a и b с верхними индексами имеют следующий смысл:

$$\begin{aligned} a^{[1]} &= \frac{3}{2} \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 (\zeta T_{12a}^{[1]} - A_{10} \xi_1 T_{23a}^{[1]}) A_{10} d\xi_1 \\ a^{[3]} &= \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 S_{22b}^{[3]} A_{10} d\xi_1, & a^{[6]} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 S_{22b}^{[6]} A_{10} d\xi_1 & (17.8) \\ a^{[7]} &= \frac{3}{4} \int_{-1}^{+1} \zeta d\zeta \int_{-\infty}^0 S_{22b}^{[7]} A_{10} d\xi_1, & b^{[6]} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^0 A_{10} \xi_1 S_{22b}^{[6]} A_{10} d\xi_1 \end{aligned}$$

18. В работе [1] показано, что можно существенно повысить точность построения внутреннего напряженного состояния ценой незначительной модификации уравнений классической теории оболочек. Модификация заключается только в надлежащем выборе соотношений упругости; они приведены в произвольной системе координат в работе [1], а для оболочки, отнесенной к линиям кривизны, выписаны в [12].

Формальная асимптотическая погрешность модифицированных уравнений теории оболочек имеет порядок (4.4). Показано, что такая точность предельна для уравнений, получаемых в рамках обычных представлений классической теории оболочек, т. е. для уравнений, построенных без введения новых понятий и без повышения порядка уравнений.

Модифицированным уравнениям соответствуют по точности модифицированные граничные условия, которые для свободного, жестко заделанного и шарнирно опертого краев оболочки получены здесь в виде равенств (17.5) — (17.8).

В классической теории оболочек ни уравнения ни граничные условия не обеспечивают точности (4.4). Уравнения классической теории (при недостаточно аккуратно выбранных соотношениях упругости) приводят к погрешностям порядка

$$\varepsilon = \max \{O(h_*), O(h_*^{2-2l})\} \quad (18.1)$$

Это выведено в [13,14] и подтвердилось в [1].

Погрешности граничных условий классической теории легко оценить, рассмотрев поправочные члены, появляющиеся при переходе к модифицированным граничным условиям. Как указывалось в [2], они могут превысить (4.4), достигнув порядка

$$\varepsilon = O(h_*^{1-l})$$

В совокупности модифицированные уравнения и модифицированные граничные условия составляют двухмерную теорию внутреннего напряженного состояния, которые позволяют определять внутреннее напряженное состояние оболочки не выходя за рамки привычных понятий классической теории с предельно возможной точностью порядка (4.4). Этот результат не совсем универсален, он относится только к таким внутренним напряженным состояниям, асимптотика которых определяется формулами (10.2), но большинство практически важных задач этим свойством обладает (см. [1]).

Полученные здесь результаты позволяют определить и погранслои, т. е. исследовать краевые напряжения, остающиеся вне поля зрения классической теории оболочек. Построение погранслоя надо рассматривать как второй этап расчета оболочки. Он выполняется после того, как найдено внутреннее напряженное состояние и заклю-

чается в построении по формулам (17.1) — (17.3) линейной комбинации из решений семи вспомогательных задач, введенных в п. 17. Коэффициентами этой линейной комбинации служат краевые значения, полученных ранее внутренних напряжений.

Предлагаемая теория краевых напряжений уступает по точности описанной выше теории внутреннего напряженного состояния. А именно погранслоем строится с формальной асимптотической погрешностью порядка (12.7).

Теорию внутреннего напряженного состояния и теорию погранслоя в совокупности можно рассматривать как исходное приближение некоторого итерационного процесса, позволяющего формально сколь угодно близко подойти к решению соответствующей краевой задачи теории упругости.

Для фактического расчета оболочек предлагаемым методом надо иметь решения семи вспомогательных задач (п. 17), а также знать коэффициенты m, f, g, e , входящие в соответствующие им кинематические условия затухания (п. 8,9) и коэффициенты a, b , определяемые формулами (17.8). Заметим, что для изотропной оболочки условия всех вспомогательных задач, так же как требования и формулы, определяющие значения a, b, m, f, g, e , не зависят от геометрических свойств оболочки и почти не зависят от ее физических свойств (существует лишь слабая зависимость от числа Пуассона ν). Все эти величины безразмерны, имеют вид $O(h_*^0)$ и для анизотропных оболочек их как функции параметра ν достаточно вычислить один раз. Числа a, b , так же как напряжения, определяемые вспомогательными задачами вдали от углов полуполосы, не только остаются конечными при $h_* \rightarrow 0$, но и не сильно отличаются от единицы. Вместе с тем m, f, g, e будут малы по модулю. Это очевидно из физических соображений; m, f, g, e , согласно (13.7), (14.11), составляются из реактивных сил и моментов, изображенных на фиг. 2, 3, но в задачах $[w1], [w2], (w2)$, они, очевидно, должны быть значительно меньше, чем в задачах $[w0], [u0], [u1], (w0)$, и из структуры формул (13.7), (14.11) следует, что модули m, f, g, e будут малы. Это подтверждается и вычислениями, выполненными на основании результатов работы [10]; при $\nu = 0,3$ получается

$$e = -0,20; f = 0,097; g = -0,25$$

Модифицированные граничные условия отличаются от граничных условий классической теории некоторым числом поправочных членов, отражающих влияние погранслоя на внутреннее напряженное состояние оболочки. Как было показано в [2], они представляют обобщение тех поправок, которые были введены Кирхгоффом. Последнее можно рассматривать как поправки первого приближения, в то время как в модифицированных граничных условиях учитываются уже и следующие приближения для пластинки этот результат был получен в [15]). В п. 16 это отчетливо видно: единственным слагаемым, связанным с погранслоями, который не был заведомо меньше слагаемых, связанных с внутренним напряженным состоянием, оказался член (16.1), соответствующий поправке Кирхгоффа.

Коэффициенты, входящие в модифицированные граничные условия, не одинаковы по абсолютным значениям. В статические граничные условия поправочные члены входят с коэффициентами a, b , соизмеримыми с единицей. В кинематические граничные условия они входят с коэффициентами $\nu m, \nu f, \nu g, \nu e$, которые малы по сравнению с единицей (хотя и конечные при $h_* \rightarrow 0$). Это значит, что в классической теории оболочек погрешности кинематических граничных условий практически меньше погрешностей статических граничных условий.

Из сказанного, конечно, не следует, что увеличение жесткости закрепления края уменьшает относительную роль напряжений погранслоя. Из формул (17.1) — (17.3) следует, что порядок краевых напряжений погранслоя определяется порядком коэффициентов, стоящих при решениях вспомогательных задач, т. е. краевые напряжения, вообще говоря, будут того же порядка, что и наибольшие внутренние напряжения. Исключение может представлять только свободный край оболочки (но не пластинки), если в ней изменимость внутреннего напряженного состояния не слишком велика.

Поступила 13 VI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Г о л ь д е н в е й з е р А. Л. О двухмерных уравнениях общей линейной теории тонких оболочек. Сб. «Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды», М., «Наука», 1969.
2. Г о л ь д е н в е й з е р А. Л. Методы обоснования и уточнения теории оболочек. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
3. F r i e d r i c h s К. О. Kirchhoff's boundary conditions and the edge effect for elastic plates. Proc. Sympos. Appl. Math. 1950, vol. 3.
4. J o h n s o n М. W., R e i s s n e r Е. On the foundations of the theory of thin elastic shells. J. Math Phys., 1959, vol. 37, № 4.
5. R e i s s Е. L. A theory for the small rotationally symmetric deformations of cylindrical shells. Comm. Pure and Appl. Math., 1960, vol. 13, № 3.
6. Г о л ь д е н в е й з е р А. Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
7. G r e e n А. Е. Boundary — layer equations in the linear theory of thin elastic shells. Proc. Roy. Soc. A, 1962, vol. 269, No. 1339.
8. Г о л ь д е н в е й з е р А. Л. Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 1963, т. 27, вып. 4.
9. А к с е н т я н О. К., В о р о в и ч И. И. Напряженное состояние плиты малой толщины. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.
10. Г у с е й н - з а д е М. И. О необходимых и достаточных условиях существования затухающих решений плоской задачи теории упругости для полуполосы. ПММ, 1965, т. 29, вып. 4.
11. Г о л ь д е н в е й з е р А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М., Гостехиздат, 1953.
12. Г о л ь д е н в е й з е р А. Л. О погрешностях классической линейной теории оболочек и возможностях ее уточнения. ПММ, 1965, т. 29, вып. 4.
13. K o i t e r W. T. A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells. Pros, JUTAM, Sympos on the Theory of thin Elastic Shells, Delft. 1960.
14. J o h n F. Estimates for the derivatives of the stress in a thin shells and interior shell equations. Comm. Pure und Appl. Math., 1965, vol. 18, No 12.
15. К о л о с А. В. Методы уточнения классической теории изгиба и растяжения пластинок. ПММ, 1965, т. 29, вып. 4.