Прикладная математика и механика. Том 33, 1969

К ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССОВ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

Ю. В. Кожевников

(Казань)

Рассмотрена одна задача об оптимизации процесса с отклоняющимся аргументом. Получены необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума. Специальным преобразованием задача сведена к решению краевой проблемы для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, не содержащей отклоняющегося аргумента.

В качестве примера рассмотрена задача об успокоении колебаний струны.

1. Некоторые важные задачи математической физики, например задачи об успокоении одномерных колебательных процессов (см. пример), приводятся к исследованию оптимальной проблемы следующего вида.

Для процесса $x(t) = (x_1(t),\ldots, x_n(t))$ со значениями $x \in X \subset E_n$ при каждом $t \in [0, k\,t_k]$, описываемого на участках $[st_k, (s+1)t_k]$ $(s = 0,\ldots$ $\ldots, k-1)$ уравнениями

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{st_k+\tau} = \varphi^s(\tau, z^+, z^-) \qquad (\tau \in [0, t_k];\ s = 0, \ldots, k-1) \tag{1.1}$$

с граничными условиями

$$f_j(x_0^\circ, \ldots, x_0^{k-1}, x_k^\circ, \ldots, x_k^{k-1}) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, q;\ q < 2nk) \tag{1.2}$$

требуется найти управление $u(t) = (u_1(t),\ldots, u_r(t))$ со значениями $u \in$ $\in U \subset E_r$ при каждом $t \in [0, kt_k]$ из условия минимума функционала

$$J = f_0(x_0^\circ, \ldots, x_0^{k-1}, x_k^\circ, \ldots, x_k^{k-1}) \tag{1.3}$$

Здесь $x(t)$ — непрерывная, а $u(t)$ — кусочно-непрерывная вектор-функция времени на $[st_k, (s+1)t_k]$; $\varphi^s = (\varphi_1^s,\ldots, \varphi_n^s)$, $f_0,\ldots, f_q$ — непрерывны вместе с двумя своими производными; t_k — заданное число

$$z^+ = (x(\tau),\ldots, x((k-1)\,t_k + \tau),\ u(\tau),\ldots,\ u((k-1)t_k + \tau))$$
$$z^- = (x(t_k - \tau),\ldots, x(kt_k - \tau),\ u(t_k - \tau),\ \ldots,\ u(kt_k - \tau))$$
$$x_0^s = (x_{i0}^s) = x(st_k + \tau)\big|_{\tau=0} = x((s+1)t_k - \tau)\big|_{\tau=t_k}$$
$$x_k^s = (x_{ik}^s) = x(st_k + \tau)\big|_{\tau=t_k} = x((s+1)\,t_k - \tau)\big|_{\tau=0}$$

Решение сформулированной задачи будем называть оптимальным.

Оказывается в силу специфики отклонений аргумента и области определения решения на временной оси могут быть сформулированы такие необходимые условия оптимальности, которые позволяют применить принцип максимума, следуя Л. С. Понтрягину [1], и привести проблему к решению обычной краевой задачи для некоторой расширенной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, не содержащей отклоняющегося аргумента.

Введем новые фазовые координаты $x^s = x^s(\tau)$, $x^{s-} = x^{s-}(\tau)$ и новые управляющие функции $u^s = u^s(\tau)$, $u^{s-} = u^{s-}(\tau)$, связанные с исходными соотношениями

$$x^s(\tau) = x(st_k + \tau), \quad x^{s-}(\tau) = x((s+1)t_k - \tau), \quad u^s(\tau) = u(st_k + \tau) \tag{1.4}$$
$$u^{s-}(\tau) = u((s+1)t_k - \tau)$$
$$(s = 0, \ldots, k-1)$$

Очевидно

$$x^s(\tau) = x^{s-}(t_k - \tau), \qquad u^s(\tau) = u^{s-}(t_k - \tau)$$
$$x^s(0) = x^{s-}(t_k) = x_0{}^s, \qquad x^s(t_k) = x^{s-}(0) = x_k{}^s \tag{1.5}$$
$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{st_k+\tau} = \frac{dx^s}{d\tau}, \qquad \left.\frac{dx^s}{d\tau}\right|_{t_k-\tau} = -\frac{dx^{s-}}{d\tau}$$

Отсюда и из (1.1) следует, что вектор-функции

$$x^+ = (x_1{}^\circ, \ldots, x_n^{k-1}), \; x^- = (x_1{}^{\circ-}, \ldots, x_n^{(k-1)-}), \quad u^+ = (u_1{}^\circ, \ldots, u_r^{k-1})$$
$$u^- = (u_1{}^{\circ-}, \ldots, u_r^{(k-1)-})$$

удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dx_i{}^s}{d\tau} = \varphi_i{}^s(\tau, x^+, x^-, u^+, u^-), \quad \frac{dx_i{}^{s-}}{d\tau} = -\varphi_i{}^{s-}(\tau, x^+, x^-, u^+, u^-) \tag{1.6}$$
$$(\tau \in [0, t_k]; \; i = 1, \ldots, n; \; s = 0, \ldots, k-1)$$

При этом

$$x_0{}^s = x^s(0), \quad x_k{}^s = x^s(t_k), \quad x_0{}^{s-} = x^{s-}(0), \quad x_k^{s-} = x^{s-}(t_k)$$

оказываются связанными соотношениями (1.2) и условиями

$$x_0{}^{s-} - x_k{}^s = 0, \qquad x_k{}^{s-} - x_0{}^s = 0 \qquad (s = 0, \ldots, k-1) \tag{1.7}$$

Вектор-функция $\varphi^{s-} = (\varphi_1{}^{s-}, \ldots, \varphi_n{}^{s-})$ получается из $\varphi^s = (\varphi_1{}^s, \ldots$ $\ldots, \varphi_n{}^s)$ заменой ее аргумента τ на $t_k - \tau$ и обращением индексов плюс и минус у остальных аргументов. Положим

$$H(\tau, x^+, x^-, u^+, u^-, \lambda^+, \lambda^-) = \sum_{s=0}^{k-1} [(\lambda^s, \varphi^s) + (\lambda^{s-}, \varphi^{s-})] \tag{1.8}$$

где

$$\lambda^+ = (\lambda_1{}^\circ, \ldots, \lambda_n^{k-1}), \quad \lambda^- = (\lambda_1{}^{\circ-}, \ldots, \lambda_n^{(k-1)-}), \quad \lambda^+(\tau) = \lambda^-(t_k - \tau)$$

определяются из уравнений

$$\frac{d\lambda_i{}^s}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial x_i{}^s}, \quad \frac{d\lambda_i{}^{s-}}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial x_i{}^{s-}} \quad \begin{pmatrix} \tau \in [0, t_k]; & i = 1, \ldots, n \\ s = 0, 1, \ldots, k-1 & \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

при граничных условиях

$$\lambda_{ik}^s = \lambda_{i0}^{s-} = -\sum_{j=0}^{q} \nu_j \frac{\partial f_j}{\partial x_{ik}^s}, \qquad \lambda_{i0}^s = \lambda_{ik}^{s-} = \sum_{j=0}^{q} \nu_j \frac{\partial f_j}{\partial x_{i0}^s} \tag{1.10}$$
$$(s = 0, \ldots, k-1; \; i = 1, \ldots, n)$$

Здесь $\nu_0 = 1, \nu_1, \ldots, \nu_q$ — постоянные множители Лагранжа

$$\lambda_{i0}^{s} = \lambda_{i0}^{s}(0),\ \lambda_{ik}^{s} = \lambda_i^{s}(t_k),\ \lambda_{i0}^{s-} = \lambda_i^{s-}(0),\ \lambda_{ik}^{s-} = \lambda_i^{s-}(t_k)$$

Необходимые условия оптимальности управления $u(t)$ и вытекающий отсюда метод решения задачи доставляет следующая теорема.

Теорема 1. Для оптимальности управления $u(t)$, $t \in [0, kt_k]$ необходимо, чтобы при каждом $\tau \in [0, t_k]$ функция $H(\tau, x^+, x^-, u^+, u^-, \lambda^+, \lambda^-)$ переменных $u^s \in U$, $u^{s-} \in U$ достигала максимума на значениях $u(t)$.

Из теоремы следует, что в открытом ядре области U оптимальное управление удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial H}{\partial u_j^s} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial u_j^{s-}} = 0 \quad (j = 1, \ldots, r;\ s = 0, \ldots, k-1) \tag{1.11}$$

Заметим, что функции x^+, x^-, u^+, u^- следует рассматривать как обычные фазовые координаты и управляющие функции, зависящие от аргумента $\tau : \tau \in [0, t_k]$. Таким образом, теорема 1 приводит задачу к интегрированию уравнений (1.6), (1.9), дополненных необходимыми условиями оптимальности u^+, u^-, например, вида (1.11) при наличии граничных условий (1.2), (1.7), (1.10), т. е. к решению краевой задачи без отклоняющегося аргумента.

Доказательство теоремы дается в приложении.

2. Рассмотрим задачу об успокоении колебаний струны, описываемых волновым уравнением

$$z_{tt} - a^2 z_{\xi\xi} = F(t, \xi) \quad (0 < \xi < l,\ 0 < t < 2t_k) \tag{2.1}$$

при начальных и граничных условиях

$$z|_{t=0} = \varphi(\xi), \quad z_t|_{t=0} = \psi(\xi), \quad z|_{\xi=l} = 0, \quad z|_{\xi=0} = x_1(t) \tag{2.2}$$

Здесь $z = z(t, \xi)$ — отклонение струны относительно положения равновесия, a — скорость распространения возбуждения, $F(t, \xi)$, $\varphi(\xi)$, $\psi(\xi)$ — заданные функции, обладающие необходимыми теоретико-функциональными свойствами, $x_1(t)$ — подлежащий выбору закон перемещения левого конца струны, обеспечивающий ее успокоение, a, l, $t_k = l / a$ — заданные величины.

В качестве меры успокоенности струны может быть принята величина ее энергии к моменту времени $t = 2t_k$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^l (T z_t^2|_{2t_k} + \rho z_\xi^2|_{2t_k})\, d\xi \qquad (T = a^2\rho) \tag{2.3}$$

Здесь T, ρ — натяжение и массовая плотность струны [2].

Задача состоит теперь в определении $x_1(t)$, $t \in [0, 2t_k]$, $x_1(0) = \varphi(0)$, доставляющей минимум функционалу (2.3).

Как известно, решение уравнения (2.1) при условиях (2.2) может быть записано в виде [2]:

$$z(t, \xi) = z_0(t, \xi) + z_1(t, \xi)$$

Здесь $z_0(t, \xi)$ — решение уравнения (2.1) при условиях (2.2), где последнее соотношение заменено следующим: $z|_{\xi=0} = 0$; функции $z_1(2t_k,\xi)$, $z_{1\xi}(2t_k,\xi)$, $z_{1t}(2t_k,\xi)$ выражаются формулами

$$z_1|_{2tk} = x_1(2t_k - \xi/a) - x_1(\xi/a), \qquad z_{1\xi}|_{2tk} = -a^{-1}[u(2t_k - \xi/a) + u(\xi/a)]$$

$$z_{1t}|_{2tk} = u(2t_k - \xi/a) - u(\xi/a), \quad u(t) = dx_1/dt \tag{2.4}$$

Подставляя выражения (2.4) в правую часть (2.3), после несложных преобразований найдем, что минимизация I приводится к отысканию минимума функционала

$$J = x_{2k}{}^\circ \tag{2.5}$$

определяемого системой уравнений с отклоняющимся аргументом типа (1.1)

$$\left.\frac{dx_1}{dt}\right|_\tau = u(\tau), \qquad \left.\frac{dx_1}{dt}\right|_{t_k+\tau} = u(t_k+\tau)$$

$$\frac{dx_2{}^\circ}{d\tau} = [u(\tau)]^2 + [u(2t_k-\tau)]^2 + A_1(\tau)u(2t_k-\tau) + A_2(\tau)u(\tau) \tag{2.6}$$

при граничных условиях

$$x_{20}{}^\circ = 0, \quad x_1(\tau)|_{\tau=0} = \varphi(0), \quad x_1(\tau)|_{\tau=t_k} = x_1(t_k+\tau)|_{\tau=0} \quad (\tau = \xi/a) \tag{2.7}$$

$$A_1(\tau) = a^{-1}z_{0t}(2t_k, a\tau) - z_{0\xi}(2t_k, a\tau), \quad A_2(\tau) = -a^{-1}z_{0t}(2t_k, a\tau) - z_{0\xi}(2t_k, a\tau) \tag{2.8}$$

Система (2.6) и граничные условия (2.7) приводятся к следующему виду, аналогичному (1.2), (1.6), (1.7):

$$\frac{dx_1{}^\circ}{d\tau} = u^\circ, \qquad \frac{dx_1{}^{\circ-}}{d\tau} = -u^{\circ-}$$

$$\frac{dx_1{}^1}{d\tau} = u^1, \qquad \frac{dx_1{}^{1-}}{d\tau} = -u^{1-}$$

$$\frac{dx_2{}^\circ}{d\tau} = (u^\circ)^2 + (u^{1-})^2 + A_1u^{1-} + A_2u^\circ, \qquad \frac{dx_2{}^{\circ-}}{d\tau} = -(u^{\circ-}) + (u^1)^2 - A_1(t_k - \tau)u^1 - A_2(t_k-\tau)u^{\circ-}$$

$$x_{10}{}^\circ = \varphi(0), \quad x_{1k}{}^\circ - x_{10}{}^1 = 0, \quad x_{20}{}^\circ = 0, \quad x_{i0}^{s-} = x_{ik}^{s}, \quad x_{ik}^{s-} = x_{i0}^{s} \quad (i = 1, 2;\ s = 0, 1$$

Таким образом, в рассматриваемом случае

$$H = \lambda_1{}^\circ u^\circ + \lambda_1{}^1u^1 + \lambda_2{}^\circ[(u^\circ)^2 + (u^{1-})^2 + A_1u^{1-} + A_2u^\circ] + \lambda_1{}^{\circ-}u^{\circ-} +$$
$$+ \lambda_1{}^{1-}u^{1-} + \lambda_2{}^{\circ-}[(u^{\circ-})^2 + (u^1)^2 + A_1(t_k-\tau)u^1 + A_2(t_k-\tau)u^{\circ-}]$$

Выражение H не содержит в явном виде фазовых координат, поэтому имеем

$$\lambda_1{}^\circ = \lambda_1{}^{\circ-} = \text{const}, \ \lambda_1{}^1 = \lambda_1{}^{1-} = \text{const}, \ \lambda_2{}^\circ = \lambda_2{}^{\circ-} = \text{const}$$

Из условий трансверсальности (1.10) получим

$$\lambda_1{}^\circ = \lambda_1{}^{\circ-} = \lambda_1{}^1 = \lambda_1{}^{1-} = 0, \qquad \lambda_2{}^\circ = \lambda_2{}^{\circ-} = -1$$

из уравнений

$$\partial H \,/\, \partial u^\circ = 0, \qquad \partial H \,/\, \partial u^1 = 0$$

найдем

$$u^\circ(\tau) = u(\tau) = -\,{}^1/_2\ A_2(\tau), \qquad u^1(\tau) = u(t_k + \tau) = -\,{}^1/_2\ A_1(t_k - \tau)$$

Следовательно, искомое оптимальное управление $x_1(t)$ определится выражениями

$$x_1(\tau) = \varphi(0) - \frac{1}{2}\int_0^\tau A_2(\tau)\,d\tau \qquad (0 \leqslant \tau \leqslant t_k) \tag{2.9}$$

$$x_1(t_k + \tau) = \varphi(0) - \frac{1}{2}\int_0^{t_k} A_2(\tau)\,d\tau - \frac{1}{2}\int_0^\tau A_1(t_k - \tau)\,d\tau$$

В частном случае, когда

$$l = t_k = \pi, \quad a = 1, \quad \varphi(\xi) = A\sin\xi, \quad \psi(\xi) = F(t, \xi) = 0$$

имеем

$$z_0\,|_{2t_k} = A\sin\xi, \quad z_{0t}\,|_{2t_k} = 0, \quad z_{0\xi}\,|_{2t_k} = A\cos\xi, \quad A_1(\tau) = A_2(\tau) = -\,A\cos\tau$$

Следовательно

$$x_1(\tau) = {}^1/_2\ A\ \sin\ \tau, \qquad x_1(t_k + \tau) = -\,{}^1/_2\ A\ \sin\ \tau$$

Объединяя эти формулы, получим

$$x_1(t) = {}^1/_2 A\sin t \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2t_k) \tag{2.10}$$

Далее, учитывая (2.4), найдем

$$z_1\,|_{2t_k} = -\,A\sin\xi, \qquad z_{1t}\,|_{2t_k} = 0$$

Теперь имеем

$$z\,|_{2t_k} = z_0\,|_{2t_k} + z_1\,|_{2t_k} = 0, \qquad z_t\,|_{2t_k} = z_{0t}\,|_{2t_k} + z_{1t}\,|_{2t_k} = 0$$

Таким образом, управление (2.10) приводит струну в состояние равновесия.

Приложение. Очевидно, что после введения вектор-функций x^+, x^-, u^+, u^- вопрос об оптимизации $u(t)$ приводится к решению следующей оптимальной задачи: для системы (1.6) с фазовым состоянием x^+, x^-, удовлетворяющим граничным условиям (1.2), (1.7), требуется найти управление u^s, u^{s-} со значениями в U, которое доставляет минимум функционалу (1.3). При этом в силу (1.5) функции u^+ и u^- должны быть связаны соотношениями

$$u^+(\tau) = u^-(t_k - \tau), \qquad u^-(\tau) = u^+(t_k - \tau) \tag{A.1}$$

Заметим, что из (1.6), (1.7) и (А.1) следует

$$x^+(\tau) = x^-(t_k - \tau), \qquad x^-(\tau) = x^+(t_k - \tau) \tag{A.2}$$

что означает тождественное удовлетворение условий (1.5), относящихся к x^s, x^{s-}.

Ясно, что для решения сформулированной здесь задачи могут быть применены методы теории принципа максимума Л. С. Понтрягина. Особого рассмотрения требует лишь вопрос, связанный с построением игольчатых вариаций управления. Особенность эта связана с условием (А.1), из которого следует, что если на сколь угодно малом отрезке $[\tau', \tau''] \subset [0, t_k]$ управлению $u^+(\tau)$ сообщается игольчатая вариация, т. е. здесь $u^+(\tau) = \omega, \omega \in U$, то одновременно имеем: $u^-(\tau) = \omega$, $[\tau \in [t_k - \tau'', t_k - \tau']$. Вследствие этого в выражении линейной части приращения функционала J содержится независимое неположительное слагаемое

$$\int\limits_{\tau'}^{\tau''} [H^*(\tau, x^+, x^-, \omega, u^-, \mu^+, \mu^-) - H^*(\tau, x^+, x^-, u^+, u^-, \mu^+, \mu^-)]\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_{t_k-\tau''}^{t_k-\tau'} [H^*(\tau, x^+, x^-, u^+, \omega, \mu^+, \mu^-) - H^*(\tau, x^+, x^-, u^+, u^-, \mu^+, \mu^-)]\, d\tau \leqslant 0 \qquad (\text{A.3})$$

$$H^* = \sum_{s=0}^{k-1} [(\mu^s, \varphi^s) - (\mu^{s-}, \varphi^{s-})]$$

Здесь x^+, x^-, u^+, u^- определяют оптимальный режим, w соответствует игольчатой вариации управления; $\mu^+ = (\mu_1^\circ, \ldots, \mu_n^{k-1})$, $\mu^- = (\mu_1^{\circ-}, \ldots \mu_n^{(k-1)-})$ сопряженные функции, определяемые из уравнений [3]

$$\frac{d\mu_i^s}{d\tau} = -\frac{\partial H^*}{\partial x_i^s}, \qquad \frac{d\mu_i^{s-}}{d\tau} = -\frac{\partial H^*}{\partial x_i^{s-}} \left(\begin{matrix}\tau \in [0, t_k];\ i = 1, \ldots, n \\ s = 0, 1, \ldots, k-1\end{matrix}\right) \qquad (\text{A.4})$$

при граничных условиях

$$\mu_{ik}^s = \nu_i^{s0} - \sum_{j=0}^{q} \nu_j \frac{\partial f_j}{\partial x_{ik}^s}, \quad \mu_{i0}^s = -\nu_i^{sk} + \sum_{j=0}^{q} \nu_j \frac{\partial f_j}{\partial x_{i0}^s}, \quad \mu_{ik}^{s-} = -\nu_i^{sk}, \quad \mu_{i0}^{s-} = \nu_i^{s0}$$

$$(i = 1, \ldots, n;\ s = 0, \ldots, k-1) \qquad (\text{A.5})$$

В соотношениях (А.5) индексы 0 и k у μ указывают их значения при $\tau = 0$ и $\tau = t_k$, ν_i^{s0}, ν_i^{sk} — постоянные множители Лагранжа.

Как видно, левая часть (А.3) кроме обычного в теории принципа максимума первого слагаемого, содержит второй член. Производя замену переменной под знаком второго интеграла (А.3) подстановкой $\tau = t_k - t$, а затем, возвращаясь к прежнему обозначению независимой переменной, получим

$$\int\limits_{\tau'}^{\tau''} [H^*(\tau, x^+, x^-, \omega, u^-, \mu^+, \mu^-) + H^*(\tau, x^+, x^-, u^+, \omega, \mu^+, \mu^-)\,|_{t_k-\tau} -$$

$$- H^*(\tau, x^+, x^-, u^+, u^-, \mu^+, \mu^-) - H^*(\tau, x^+, x^-, u^+, u^-, \mu^+, \mu^-)\,|_{t_k-\tau}]\, d\tau \leqslant 0$$

Расписывая подынтегральное выражение с учетом очевидных соотношений

$$\varphi^s|_{t_k-\tau} = \varphi^{s-}, \quad \varphi^{s-}|_{t_k-\tau} = \varphi^s$$

и соотношений

$$\lambda^s = \mu^s - \mu^{s-}|_{t_k-\tau}, \quad \lambda^{s-} = \mu^s|_{t_k-\tau} - \mu^{s-} \qquad (s = 0, \ldots, k-1) \qquad (\text{A.6})$$

справедливость которых будет показана ниже, будем иметь

$$\int\limits_{\tau'}^{\tau''} [H(\tau, x^+, x^-, \omega, u^-, \lambda^+, \lambda^-) - H(\tau, x^+, x^-, u^+, u^-, \lambda^+, \lambda^-)]\, d\tau \leqslant 0$$

Отсюда обычными в теории принципа максимума рассуждениями устанавливаем справедливость утверждения теоремы 1 относительно u^{s-}. Сообщая на $[\tau', \tau''] \subset [0, t_k]$ игольчатую вариацию управлению u^{s-}, аналогично доказываем утверждение теоремы относительно u^{s-}. Остается показать, что λ^s, λ^{s-}, введенные в виде (А.6), обладают свойством $\lambda^s|_{t_k-\tau} = \lambda^{s-}$, удовлетворяют уравнениям (1.9) и граничным условиям (1.10).

Соотношение $\lambda^s|_{t_k-\tau} = \lambda^{s-}$ вытекает из непосредственного сравнения правых частей (А.6).

Условия (А.5) могут быть записаны в виде

$$\mu_{ik}{}^s - \mu_{i0}{}^{s-} = -\sum_{j=0}^{q} \nu_j \frac{\partial f_j}{\partial x_{ik}{}^s}, \qquad \mu_{i0}{}^s - \mu_{ik}{}^{s-} = \sum_{j=0}^{q} \nu_j \frac{\partial f_j}{\partial x_{i0}{}^s}$$

Отсюда сразу же следует, что левые части (А.6) удовлетворяют соотношениям (1.10).

Поскольку

$$\left.\frac{d\mu^s}{d\tau}\right|_{t_k-\tau} = -\frac{d\mu^s(t_k-\tau)}{d\tau}, \qquad \left.\frac{d\mu^{s-}}{d\tau}\right|_{t_k-\tau} = -\frac{d\mu^{s-}(t_k-\tau)}{d\tau}$$

то

$$\frac{d\lambda^s}{d\tau} = \frac{d\mu^s}{d\tau} + \left.\frac{d\mu^{s-}}{d\tau}\right|_{t_k-\tau}, \quad \frac{d\lambda^{s-}}{d\tau} = -\left.\frac{d\mu^s}{d\tau}\right|_{t_k-\tau} - \frac{d\mu^{s-}}{d\tau} \tag{А.7}$$

Из соотношений (А.4) следует

$$\frac{d\mu_i{}^s}{d\tau} + \left.\frac{d\mu_i{}^{s-}}{d\tau}\right|_{t_k-\tau} = -\frac{\partial H^*}{\partial x_i{}^s} - \left.\frac{\partial H^*}{\partial x_i{}^{s-}}\right|_{t_k-\tau}$$

$$\left.\frac{d\mu_i{}^s}{d\tau}\right|_{t_k-\tau} + \frac{d\mu_i{}^{s-}}{d\tau} = -\left.\frac{\partial H^*}{\partial x_i{}^s}\right|_{t_k-\tau} - \frac{\partial H^*}{\partial x_i{}^{s-}}$$

Отсюда после расписывания правых частей и приведения подобных членов, учитывая (А.6), (А.7) и очевидные соотношения

$$\left.\frac{\partial \varphi_j{}^{\nu-}}{\partial x_i{}^{s-}}\right|_{t_k-\tau} = \frac{\partial \varphi_j{}^{\nu}}{\partial x_i{}^s}, \qquad \left.\frac{\partial \varphi_j{}^{\nu}}{\partial x_i{}^{s-}}\right|_{t_k-\tau} = \frac{\partial \varphi_j{}^{\nu-}}{\partial x_i{}^s}$$

найдем, что левые части (А.6) удовлетворяют также системе (1.9).

Теорема полностью доказана.

Поступила 13 II 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В. Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1966.
3. Кожевников Ю. В. К теории оптимального осреднения управлений динамических систем. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.