

ОБ АППРОКСИМАЦИЯХ И ГРУБОСТИ ПРОСТРАНСТВА ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Н. Н. Баутин

(Горький)

В уравнениях движения динамических систем, моделирующих поведение технических устройств, обычно бывает возможно наряду с параметрами системы выделить не содержащие параметров нормированные характеристики (синусоидальные, полигональные, релейные и т. д.), описывающие поведение отдельных элементов этого устройства. Выбор таких характеристик всегда в какой-то мере произволен и диктуется, с одной стороны, соответствием поведения характеристики модели поведению реальной характеристики изучаемого устройства, а с другой стороны, ограничен требованием получения такой системы уравнений, исследование которой может быть проведено с необходимой полнотой.

Удачный выбор характеристики (удачная аппроксимация) весьма важен для создания модели, пригодной для исследования. Выбранной характеристике будет соответствовать некоторое разбиение пространства параметров системы на области различной качественной структуры фазового пространства. Естественным требованием для создания удобной модели за счет изменения аппроксимации будет при этом требование сохранения при изменении характеристики качественной структуры разбиения пространства параметров и фазового пространства исследуемой системы. Таким образом, возникает задача выяснить, в какой мере возможно изменять характеристики системы, не изменяя существенно общую картину зависимости поведения траекторий от параметров, и выяснить, что может происходить с пространством параметров системы при изменении характеристик.

1. Будем рассматривать уравнения вида

$$\dot{x} = P[x, y, F_i(x), \lambda_k], \quad \dot{y} = Q[x, y, \psi_j(x), \lambda_k] \quad (1.1)$$

где $F_i(x)$ и $\psi_j(x)$ — кусочно-непрерывные (в частном случае аналитические) характеристики системы и λ_k — параметры.

Определение 1.1. Пространство параметров λ_k системы (1.1) будем называть грубым по отношению к классу характеристик $F_i(x)$ и $\psi_j(x)$, если для всех характеристик этого класса остается неизменной качественная структура разбиения пространства параметров λ_k на области одинаковой (или сходной в некотором смысле) структуры разбиения фазового пространства на траектории.

Задача выделения классов характеристик, по отношению к которым пространство параметров λ_k системы (1.1) будет грубым, сводится к задаче изучения бифуркаций [1], возможных в системе при изменении характеристик. Если при замене одной характеристики другой не исчезают какие-либо возможные бифуркации и не появляются новые, то система будет грубой в указанном выше смысле по отношению к этим характеристикам. В общем случае эта задача очень трудна и не существует регулярных методов для ее решения. Бифуркации, возможные в системе, в неодинаковой степени доступны для исследования. Простейшие из них характеризуются значениями некоторых величин, отнесенных к точке фазового пространства (таковы бифуркации сложных состояний равновесия или бифуркации, связанные с оценкой числа предельных циклов, появляющихся из состояния равновесия типа фокус или от петли сепара-

трысы), другие требуют сведений о глобальном поведении траекторий и не могут быть получены регулярными методами (сюда относятся весьма сложные вопросы о существовании сепаратрис, идущих из седла в седло, и рождении двойных предельных циклов из сгущения траекторий).

Однако в некоторых случаях такие глобальные оценки могут быть получены при использовании специфики исследуемых уравнений или при использовании специально подобранных систем сравнения, и тогда поставленная задача допускает полное решение. Чаще, однако, оказывается возможным выделить таких классов характеристик, при которых можно обеспечить неизменность разбиения пространства параметров на области не тождественной, но лишь сходной в некотором смысле структуры.

Например, можно условиться не различать области пространства параметров, которым соответствуют разбиения фазового пространства, возможно, различающиеся лишь четным числом предельных циклов. Такая постановка задачи нередко бывает полезной, так как позволяет расширить класс характеристик, расширяет возможности разумного выбора аппроксимации и тем самым возможности получения практически полного знания всех важнейших особенностей в работе устройства в зависимости от параметров. В то же время такой подход оставляет в стороне часто неразрешимую задачу прослеживания бифуркаций, связанных с двойным циклом.

2. Рассмотрим, как реализуются высказанные соображения на примере уравнения

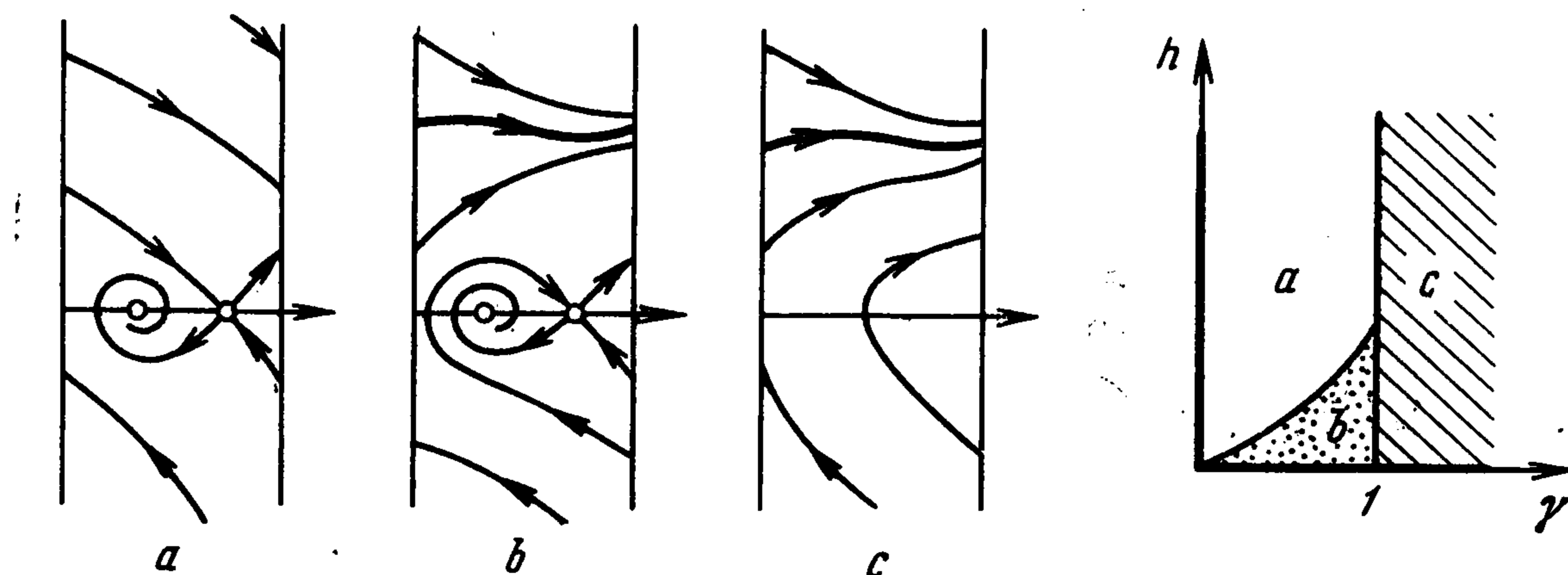
$$\varphi'' + h\varphi' + F(\varphi) = \gamma \quad (2.1)$$

представляющего интерес для ряда задач механики, электротехники, теории фазовой автоподстройки частоты [2-4] и т. д. при различных характеристиках $F(\varphi)$.

Утверждение 2.1. Если $F(\varphi)$ — дифференцируемая, периодическая с периодом 2π , кусочно-монотонная с двумя экстремумами на периоде ($|\text{extr} F(\varphi)| = 1$) и такая, что

$$\int_0^{2\pi} F(\varphi) d\varphi = 0 \quad (2.2)$$

то пространство параметров $\gamma > 0$, $h > 0$ будет грубым по отношению к классу характеристик $F(\varphi)$.



Фиг. 1

Пространство параметров разбивается на три области, соответствующие трем возможным грубым разбиениям на траектории фазового пространства φ , φ' . Различным $F(\varphi)$ соответствует лишь различное расположение на плоскости параметров бифуркационной кривой на интервале $0 < \gamma < 1$ (фиг. 1).

Уравнению (2.1) эквивалентна система

$$\frac{d\varphi}{dt} = y \equiv P, \quad \frac{dy}{dt} = \gamma - hy - F(\varphi) \equiv Q \quad (2.3)$$

или уравнение

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{\gamma - hy - F(\varphi)}{y} \quad (2.4)$$

Будем рассматривать (2.3) и (2.4) на фазовом цилиндре $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ (прямые $\varphi = \pm \pi$ отождествляются). Два состояния равновесия (2.3) или две особые точки (2.4) располагаются на оси $y = 0$ и для любых характеристик класса $F(\varphi)$ будут фокус и седло. Характер состояний равновесия определяется по корням характеристического уравнения и будет зависеть от знака $F'(\varphi)$ в соответствующей точке. Производная $F'(\varphi)$ в двух соседних особых точках имеет разные знаки. Для $h > 0$ фокус устойчивый. При $\gamma = 1$ особые точки сливаются, образуя особую точку типа седло-узел.

Критерий Дюлака [5] позволяет сделать исчерпывающие высказывания о бифуркациях, связанных с предельными циклами. Так как величина $P_\varphi' + Q_y' \equiv -h$ не меняет знак в рассматриваемой области пространства параметров, то не существует предельных циклов, охватывающих состояние равновесия, и не может быть более одного предельного цикла, охватывающего фазовый цилиндр. Бифуркации, связанные с появлением предельного цикла из сгущения траекторий (связанные с рождением двойного предельного цикла), для рассматриваемого класса характеристик невозможны.

Условие (2.2) позволяет утверждать, что бифуркация, связанная с петлей сепаратрисы, возможна только в верхнем полуцилиндре ($y > 0$). В самом деле, если существует замкнутый контур, составленный из интегральных кривых уравнения (2.4), то должно быть

$$\int_0^{2\pi} [\gamma - hy(\varphi) - F(\varphi)] d\varphi \equiv \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d[y(\varphi)]^2 = 0$$

или в силу (2.2)

$$\int_0^{2\pi} [\gamma - hy(\varphi)] d\varphi = 0$$

но это невозможно при $y(\varphi) < 0$ и положительных h и γ . Каждая траектория системы (2.3) на нижнем полуцилиндре пересекает ось $y = 0$ (если только она не будет ω -сепаратрисой седла).

Теперь остается установить для характеристик рассматриваемого класса возможность бифуркаций, связанных с появлением предельного цикла из петли сепаратрисы в верхнем полуцилиндре.

Для определенности выберем так начало отсчета по координате φ , чтобы для характеристики $F(\varphi)$ выполнялись условия $F(-\pi) = 0$, $F'(-\pi) < 0$ (для системы (2.3) это всегда возможно). Другой корень уравнения $F(\varphi) = 0$ обозначим φ_0 .

Введем систему сравнения (2.5)

$$\frac{d\varphi}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = \gamma - hy - \Phi(\varphi), \quad \Phi(\varphi) = \begin{cases} -1 & (-\pi < \varphi < \varphi_0) \\ 0 & (\varphi_0 < \varphi < \pi) \end{cases} \quad (2.5)$$

Характеристика $\Phi(\varphi)$ расположена ниже характеристики $F(\varphi)$ системы (2.3). Векторное поле системы (2.5) повернуто по отношению к векторному полю системы (2.3) на положительный угол на верхнем полуцилиндре.

Качественная структура разбиения фазового пространства и пространства параметров системы сравнения (2.5) могут быть легко получены. Для системы (2.5) при $h > 0$ и $\gamma > 0$ существует лишь одна структура разбиения фазового пространства на траектории. Все траектории идут из бесконечности к устойчивому предельному циклу на верхнем полуцилиндре, расположенному в полосе $(\gamma + 1) / h < \varphi < \gamma / h$.

Проследим поведение траекторий системы (2.3) на верхнем полуцилиндре, используя сведения о поведении траекторий системы (2.3) при $h = 0$ и систему сравнения (2.5).

Рассмотрим разбиение на траектории для системы (2.3) при $h = 0$ ($0 < \gamma < 1$). Уравнение (2.4) интегрируется. На фазовом цилиндре две особые точки: $y = 0$, $\varphi = \varphi_1$ (центр) и $y = 0$, $\varphi = \varphi_2$ (седло). φ_1, φ_2 — корни уравнения $\gamma - F(\varphi) = 0$ ($\varphi_2 > \varphi_1$). Уравнение сепаратрис, проходящих через седло, будет

$$y^2 = 2\gamma(\varphi - \varphi_2) - 2\Phi(\varphi), \quad \Phi(\varphi) = \int_{\varphi_2}^{\varphi} F(\varphi) d\varphi \quad (2.6)$$

Функция $\Phi(\varphi)$ — периодическая с периодом 2π , кусочно-монотонная с двумя экстремумами на периоде в точках $\varphi = -\pi$ ($\varphi = \pi$) и $\varphi = \varphi_0$, обращающаяся в нуль в точках φ_2 и φ_2' ($-\pi < \varphi_2' < \varphi_2$).

Уравнение

$$\gamma(\varphi - \varphi_2) - \Phi(\varphi) = 0$$

кроме двойного корня $\varphi = \varphi_2$ всегда имеет при $\gamma \neq 0$ ($0 < \gamma < 1$) единственный простой корень $\varphi = \varphi^*$ ($-\pi < \varphi_2' < \varphi^* < \varphi_2$). Поэтому сепаратриса (2.6) при $0 < \gamma < 1$ образует петлю, охватывающую состояние равновесия $\varphi = \varphi_1$. Отметим, что α -сепаратриса седла на верхнем полуцилиндре не может возвратиться в то же седло и, накручиваясь на цилиндр, уходит в бесконечность (при $h = 0$ бесконечность устойчива).

Лишь при $\gamma = 0$ будет $\varphi^* = \varphi_2' = -\pi$ и сепаратриса образует петлю, охватывающую цилиндр. Для любого $\gamma \neq 0$ ($0 < \gamma < 1$) всегда можно выбрать столь малое h , что α -сепаратриса седла на верхнем полуцилиндре также будет накручиваться на цилиндр. Так как при $h > 0$ бесконечность для системы (2.3) неустойчива, то отсюда следует существование для малых h устойчивого предельного цикла, охватывающего цилиндр (единственного в силу критерия Дюлака).

Для больших h структуру разбиения фазового пространства на траектории можно установить, используя систему сравнения (2.5). На верхнем полуцилиндре изображающая точка, двигающаяся по траектории системы (2.3), слева направо пересекает траектории системы (2.5) сверху вниз. Пусть $y = \eta$ есть точка пересечения ω -сепаратрисы седла на верхнем полуцилиндре с прямой $\varphi = \varphi_1$. Если выбрать h так, чтобы верхний край полосы, содержащий предельный цикл системы (2.5), лежал ниже прямой $y = \eta$ и, следовательно, выполнялось условие $(\gamma + 1)/h < \eta$, то ω -сепаратриса седла на верхнем полуцилиндре попадет в область (выше полосы, содержащей предельный цикл системы (2.5)), заполненную траекториями, пересекающими траектории системы (2.5) сверху вниз. В этом случае предельный цикл системы (2.3) не может существовать. Такой выбор h при $0 < \gamma < 1$ всегда возможен, так как с возрастанием h векторное поле поворачивается по часовой стрелке и, следовательно, η растет.

Из сравнения структур разбиения фазового пространства для малых и для больших h следует существование при $0 < \gamma < 1$ бифуркационной кривой, для точек которой α - и ω -сепаратрисы на верхнем полуцилиндре образуют петлю, охватывающую цилиндр. Эта кривая будет однозначной по h для $0 < \gamma < 1$, так как монотонному изменению h соответствует монотонный поворот векторного поля на верхнем полуцилиндре. Бифуркационная кривая начинается в точке $h = \gamma = 0$.

При $\gamma = 1$ на оси $y = 0$ — сложная особая точка седло-узел. Существует единственное значение $h = h_0$, при котором α - и ω -сепаратрисы седло-узла образуют петлю, охватывающую цилиндр. При $0 < h < h_0$ существует устойчивый предельный цикл, охватывающий цилиндр; при $h_0 < h < \infty$ все траектории имеют предельной точкой седло-узел. Циклов нет. Для $\gamma > 1$ при любых h существует единственный устойчивый предельный цикл, так как в этом случае нет особых точек, а бесконечность неустойчива.

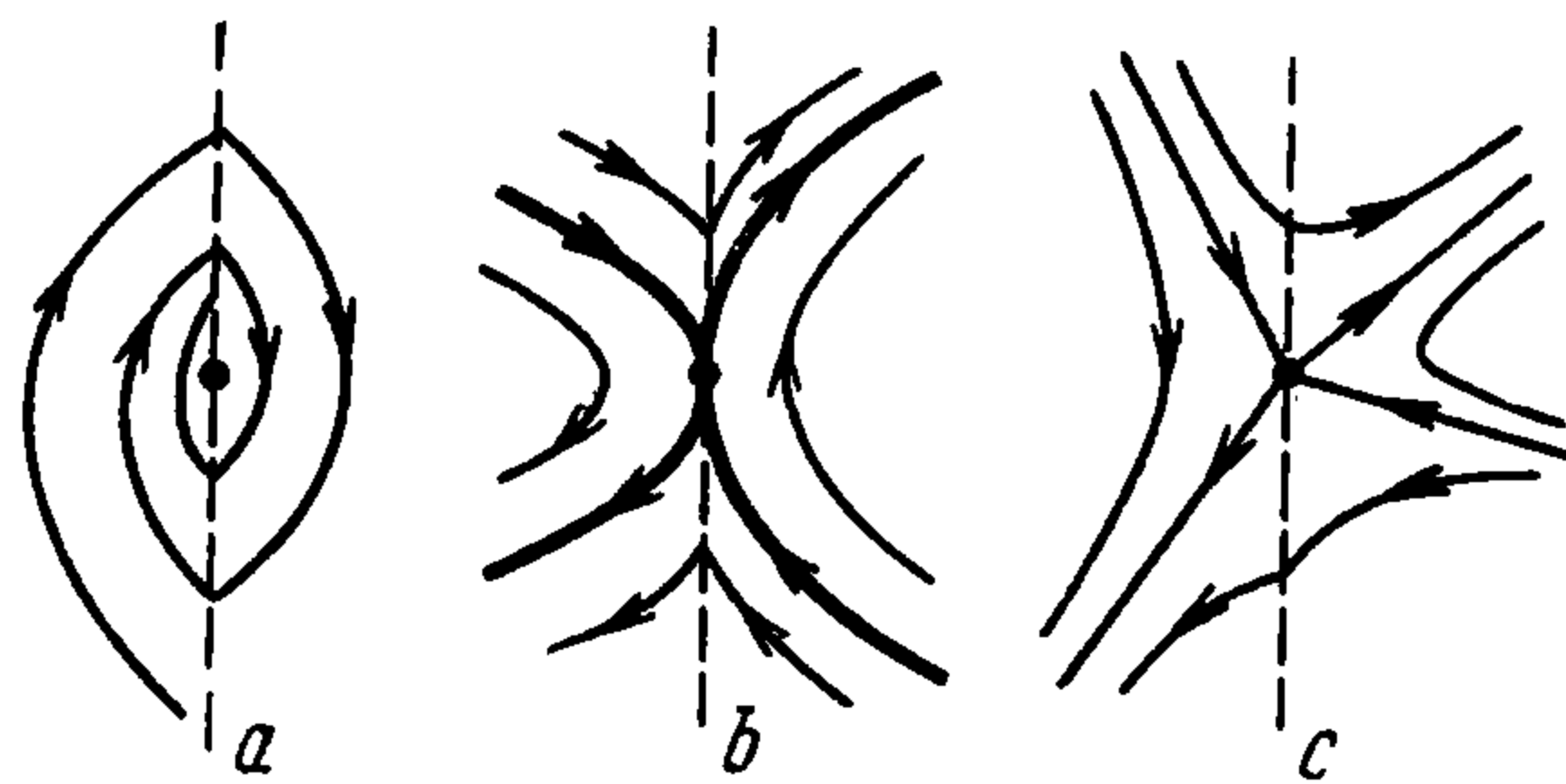
В класс характеристик $F(\varphi)$ системы (2.3), для которой пространство параметров λ_k будет грубым, могут быть включены полигональные и разрывные характеристики, если поставить ограниченную задачу и не различать сходные в некотором смысле структуры разбиения фазового пространства на траектории. Как оказывается, несмотря на различия (иногда существенные) в локальном поведении траекторий в фазовом пространстве, в целом картина разбиения пространства сохраняет при переходе к таким характеристикам многие общие черты и сохраняет общую картину возможных бифуркаций в рассматриваемом пространстве параметров. Можно, например, считать сходными и не различать фокус (или узел) и «сшитый фокус», седло и «сшитое седло». На фиг. 2 изображены: a — фокус, сшитый из обыкновенных траекторий, b — седло, сшитое из обыкновенных траекторий (особая точка не будет состоянием равновесия), c — седло, сшитое из двух различных аналитических седел (особая точка будет состоянием равновесия).

В окрестности этих сшитых особых точек качественная структура разбиения фазового пространства будет в обычном смысле тождественна разбиению в окрестности аналитических фокуса и седла, но поведение траекторий в зависимости от t будет отличаться существенно.

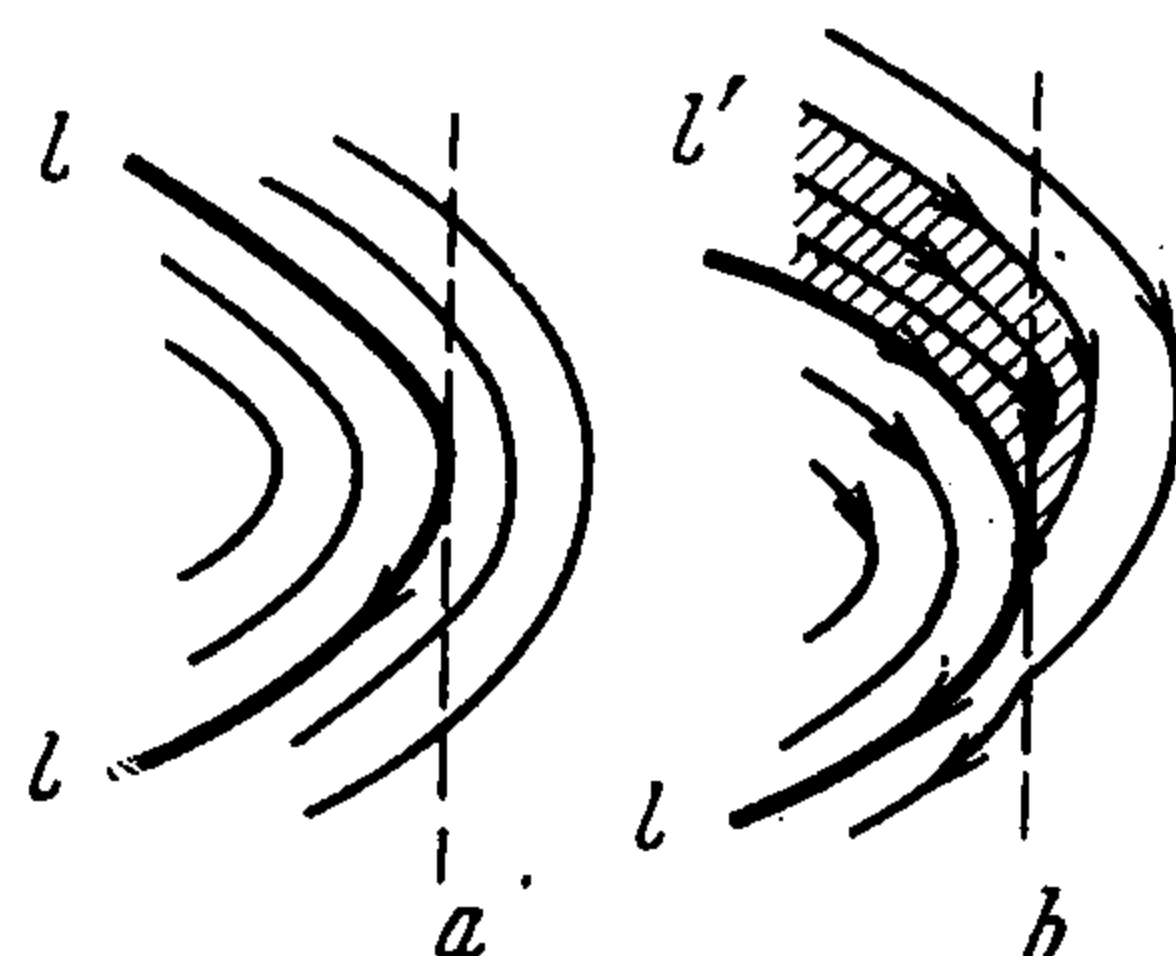
Можно сделать и еще шаг и не различать в ряде случаев континуум траекторий и отдельную траекторию, если их поведение при $t \rightarrow \infty$ или $t \rightarrow -\infty$ в некотором смысле сходное.

Вот примеры таких возможных отождествлений. Кривая l на фиг. 3, a после сдвига фазовой плоскости вдоль пунктирной прямой отождествляется с континуумом кривых l' , переходящих в отрезок скольжения и в часть кривой l (фиг. 3, b).

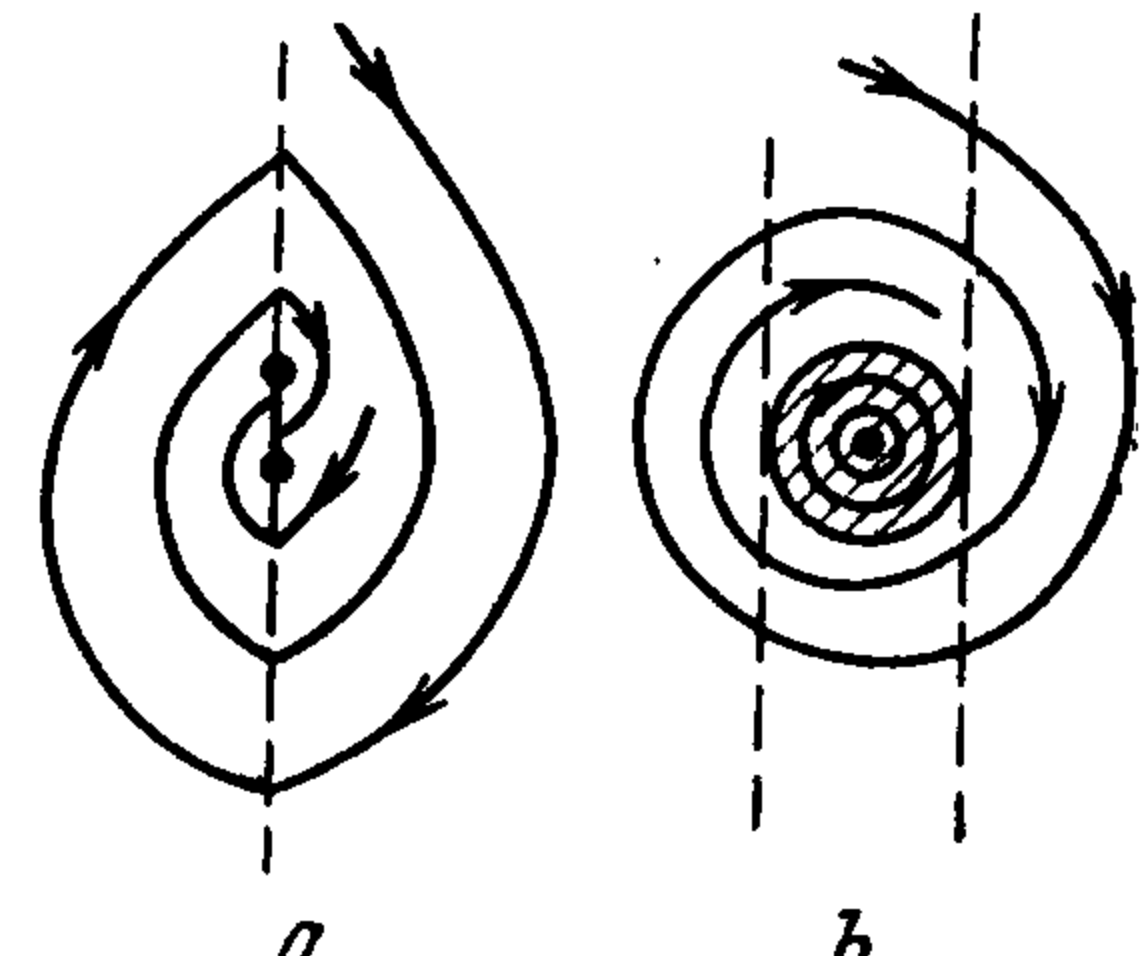
Изолированная особая точка типа фокус (или узел) отождествляется с отрезком притяжения или отталкивания [(фиг. 4, a) или отождествляется с ограниченной областью, заполненной замкнутыми траекториями и играющей роль элемента притяжения или отталкивания для других траекторий (фиг. 4, b).



Фиг. 2



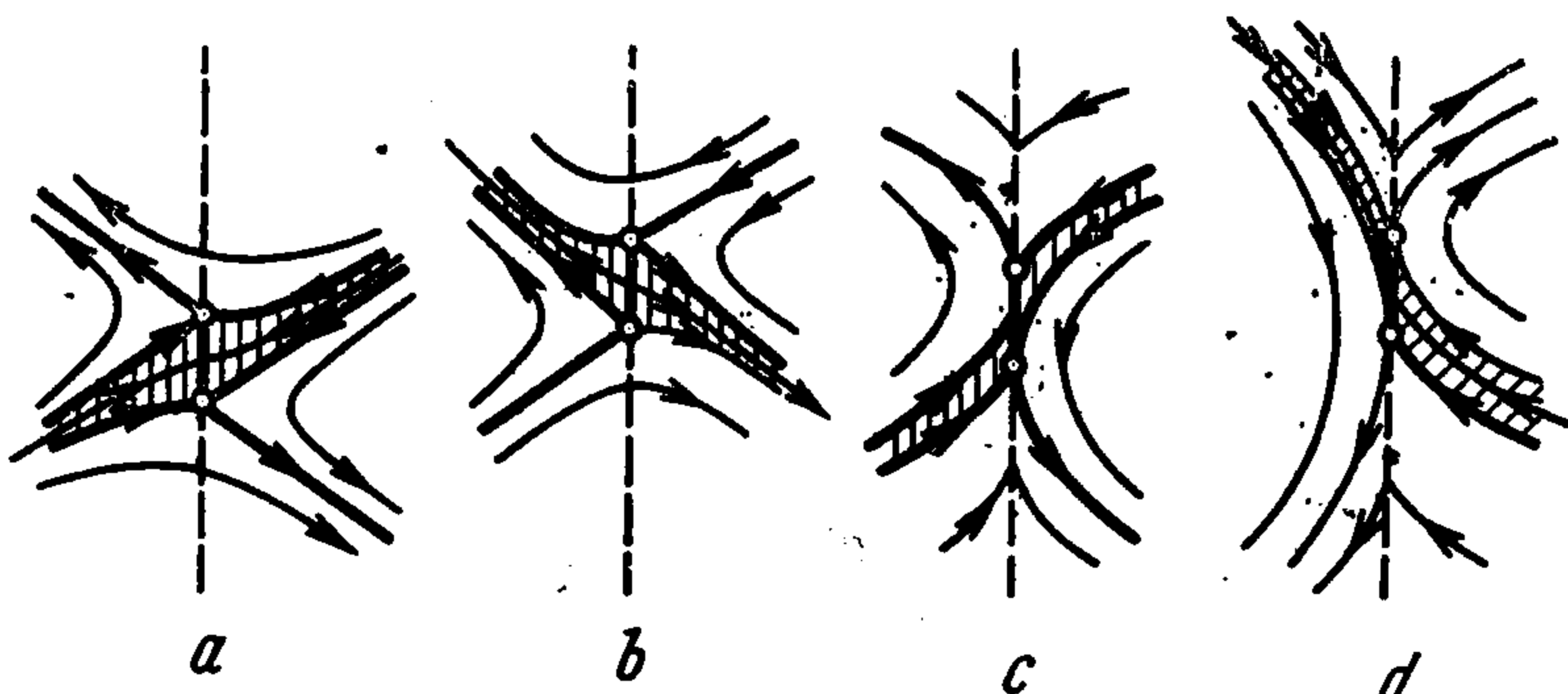
Фиг. 3



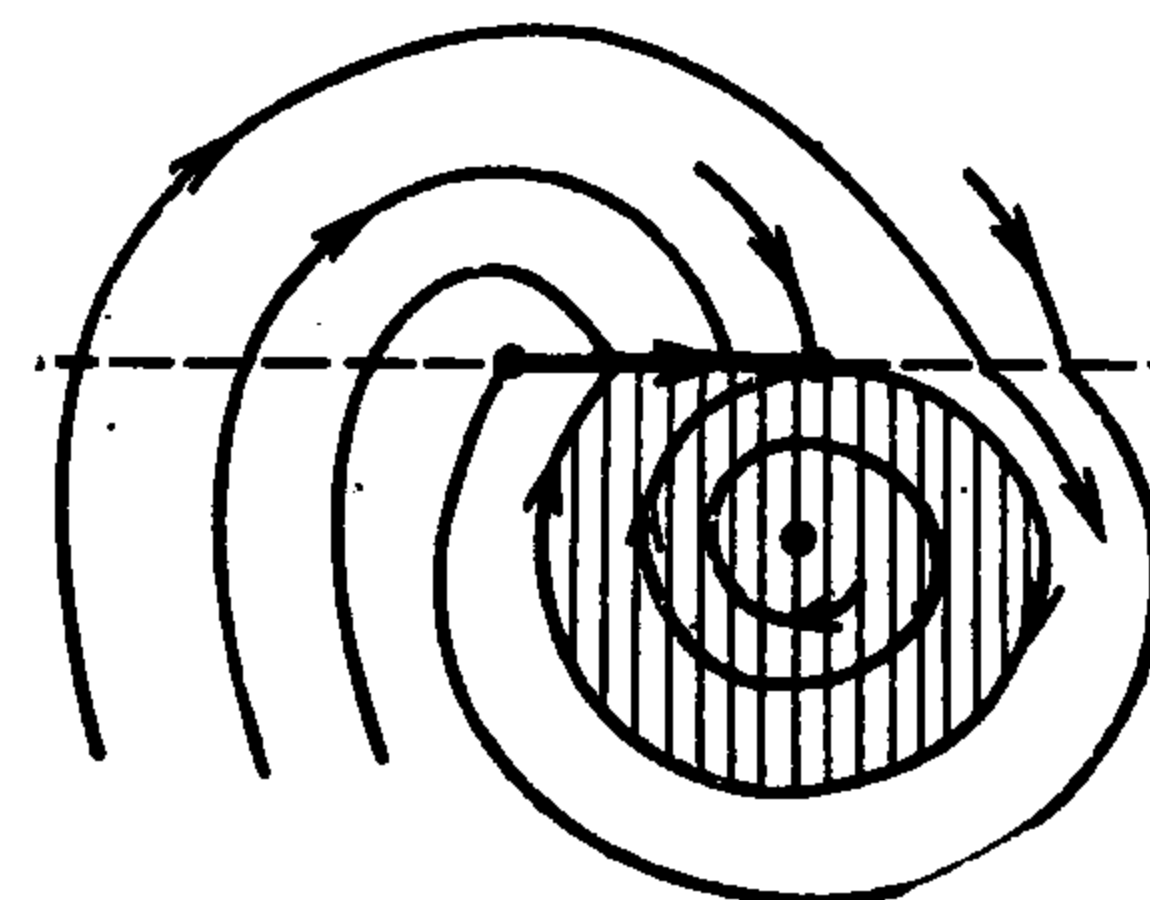
Фиг. 4

При таком отождествлении особой точки с линейными или двумерными элементами притяжения или отталкивания естественным образом возникают аналоги бифуркаций, соответствующих рождению из особой точки предельного цикла при смене устойчивости.

На фиг. 5 представлены некоторые возможные случаи отождествления сепаратрисы обычного аналитического седла с континуумом траекторий шитого седла; a — седло, шитое из двух сдвинутых аналитических седел с отрезком притяжения для континуума траекторий, b — седло, шитое из аналитических седел с отрезком отталкивания для континуума траекторий, c — седло, шитое из обыкновенных траекторий,



Фиг. 5



Фиг. 6

с отрезком притяжения для континуума траекторий (на концах отрезка покоя нет состояния равновесия), d — седло с отрезком отталкивания, шитое из обыкновенных траекторий. Возможны и некоторые другие отождествления, например возможно отождествление устойчивого предельного цикла с замкнутым контуром, включающим отрезок скольжения, на который через конечное время переходит изображающая точка с континуума траекторий (фиг. 6).

Включение в класс $F(\varphi)$ полигональных и разрывных характеристик часто позволяет получить существенно более простые уравнения, допускающие полное качественное исследование и допускающие получение уравнений границ, на которых происходят бифуркации в пространстве параметров. В то же время качественные результаты исследования с точностью до указанных выше отождествлений совпадают с результатами, соответствующими аналитическим характеристикам класса $F(\varphi)$.

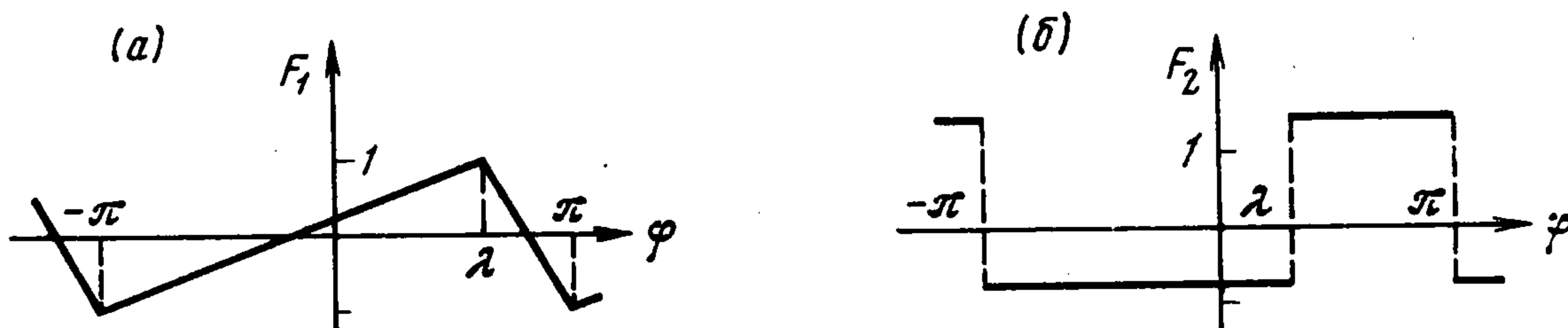
Для уравнения (2.1) класс $F(\varphi)$ может быть, например, расширен за счет полигональных характеристик (фиг. 7, а)

$$F_1(\varphi) = \begin{cases} 2(\varphi + \pi)/(\pi + \lambda) - 1, & -\pi \leq \varphi \leq \lambda \\ -2(\varphi - \lambda)/(\pi - \lambda) + 1, & \lambda \leq \varphi \leq \pi \end{cases} \quad (2.7)$$

или характеристик релейного типа (фиг. 7, б)

$$F_2(\varphi) = \begin{cases} -\pi/(\pi + \lambda), & -\pi < \varphi < \lambda \\ \pi/(\pi - \lambda), & \lambda < \varphi < \pi \end{cases} \quad (2.8)$$

Здесь λ — «внутренний параметр» семейства характеристик [6].



Фиг. 7

Для этих характеристик легко найти уравнения кривых, на которых происходят бифуркации. Например, легко обнаружить, что при характеристике (2.7) бифуркационная кривая в плоскости γ, h проходит через начало координат и точку $(1, 2\sqrt{2/(\pi + \lambda)})$, в которой происходит смыкание с вертикальным куском границы.

Особенно простое уравнение бифуркационной кривой будет при $\lambda = \pi$ (при этом характеристика (2.7) становится разрывной)

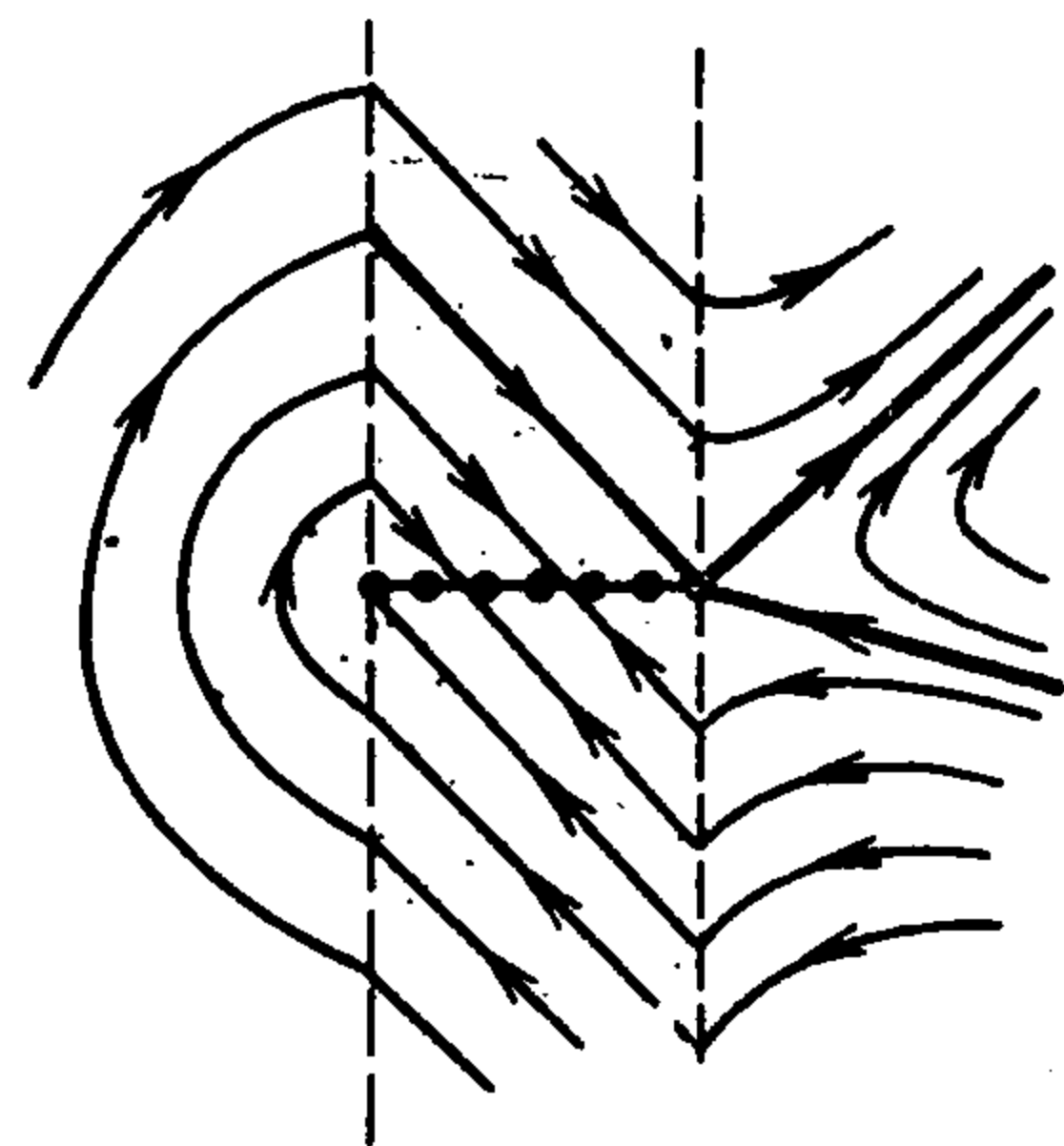
$$\gamma = \frac{e^H - 1}{e^H + 1}, \quad H = \frac{\pi^{3/2} h}{\sqrt{4 - \pi h^2}}$$

При $\lambda \neq \pi$ и $\gamma < 1$ в фазовом пространстве на линии сшивания нет особых точек. Для $\lambda = \pi$ и $\gamma < 1$ две особые точки — фокус и (на линии сшивания) седло, спитое из обыкновенных траекторий. Для $\gamma = 1$ на линии сшивания сложная особая точка, исчезающая при $\gamma > 1$.

При характеристике (2.8) смыкание бифуркационной кривой с вертикальным куском границы происходит в точке $\gamma = \pi/(\pi - \lambda)$, $h = h_0$, где h_0 — корень уравнения

$$2\pi^2 \left[1 - \exp\left(-\frac{h^2(\pi^2 - \lambda^2)}{\pi}\right) \right] = h^2(\pi - \lambda)^2(\pi + \lambda)$$

При $\gamma < \pi/(\pi - \lambda)$ в фазовом пространстве на линиях сшивания две особые точки, спитые из обыкновенных траекторий: спитый фокус и спитое седло. При $\gamma = \pi/(\pi - \lambda)$ возникает особое образование (фиг. 8), сходное с седло-узлом, содержащее отрезок притяжения $y = 0$,



Фиг. 8

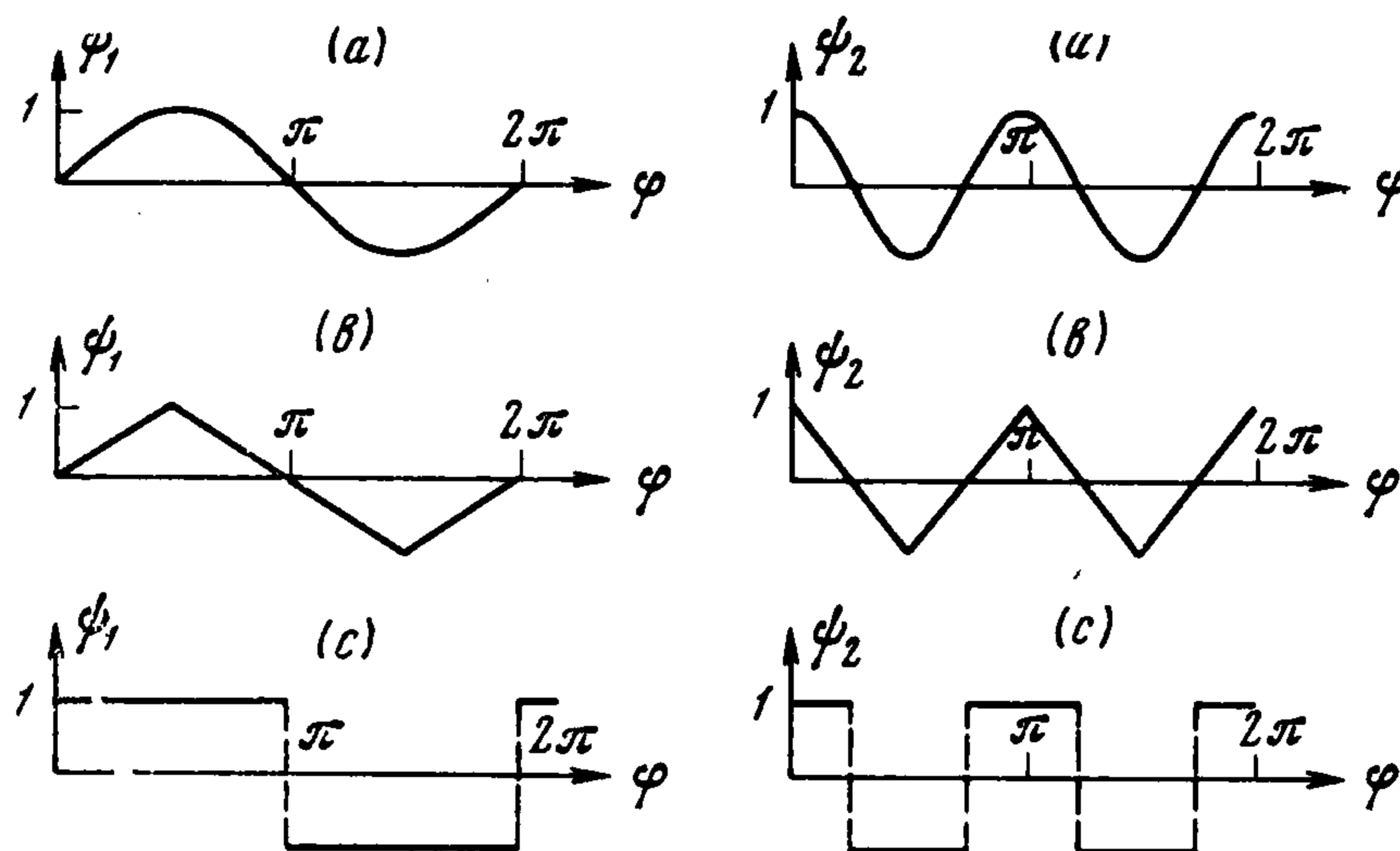
$\lambda < \varphi < \pi$ и исчезающее при возрастании γ (индекс замкнутой кривой, содержащей внутри отрезок притяжения с примыкающими к нему траекториями, равен нулю).

Пространство параметров γ, h уравнения (2.1) будет грубым по отношению к классу характеристик $F(\varphi), F_1(\varphi)$ и $F_2(\varphi)$, если отождествить в указанном выше смысле сходные элементы притяжения или отталкивания.

3. Приведем некоторые примеры систем с более сложным разбиением пространства параметров — грубым по отношению к некоторому классу характеристик. Рассмотрим систему (уравнения автоколебаний синхронного мотора) [7,8]

$$dy/dt = D - \psi_1(\varphi) - [A + B\psi_2(\varphi) - C\psi_1(\varphi)]y, \quad d\varphi/dt = y \quad (3.1)$$

где $\psi_1(\varphi)$ (нечетная) и $\psi_2(\varphi)$ (четная) — периодические с периодами соответственно 2π и π , для трех видов характеристик: аналитической $\psi_1 = \sin \varphi, \psi_2 = \cos 2\varphi$ (фиг. 9, а), полигональной (фиг. 9, б) и релейной (фиг. 9, с).



Фиг. 9

Введем малый положительный параметр μ , положив $D = \mu T, A = \mu\alpha, B = \mu\beta, C = \mu\gamma$. Для аналитических характеристик получим уравнения

$$dy/dt = -\sin \varphi + \mu[T - (\alpha + \beta \cos 2\varphi - \gamma \sin \varphi)y], \quad d\varphi/dt = y \quad (3.2)$$

Система (3.2) имеет два состояния равновесия: фокус и седло. При малых μ фокус будет устойчивый, если $\alpha + \beta > 0$, и неустойчивый, если $\alpha + \beta < 0$.

Структура разбиения фазового пространства на траектории определяется характером особых точек, характером и расположением предельных циклов и поведением сепаратрис. При введении в систему малого параметра удобным инструментом исследования будет теорема Л. С. Понтрягина [9], позволяющая проследивать поведение предельных циклов систем, близких к гамильтоновым, и определять области их существования.

При $\mu = 0$ система (3.2) имеет интеграл $H(\varphi, y) \equiv \frac{1}{2} y^2 - \cos \varphi = h$. Значениям константы h из интервала $-1 < h < 1$ соответствуют замкнутые интегральные кривые, охватывающие состояние равновесия (типа центр), значениям из интервала $1 < h < \infty$ — охватывающие фазовый цилиндр. При $h = 1$ сепаратрисы седла образуют петлю, охватывающую цилиндр.

Если систему (3.2) записать в виде

$$d\varphi/dt = H_y' + \mu p(\varphi, y) \quad [dy/dt = -H_\varphi' + q(\varphi, y)] \quad (3.3)$$

то значения константы h , выделяющие кривые консервативной системы, вблизи которых при малом μ на верхнем и нижнем полуцилиндрах будут предельные циклы системы (3.3), соответственно определяются как корни уравнений

$$\psi_1(h) = 0, \quad \psi_2(h) = 0$$

где

$$\begin{aligned} \psi_1(h) &= \int_0^{2\pi} q d\varphi - p dy = \int_0^{2\pi} [T - (\alpha + \beta \cos 2\varphi - \gamma \sin \varphi) y] d\varphi = \\ &= \beta \int_0^{2\pi} [\nu - (\sigma - 2 \sin^2 \varphi) \sqrt{2(\cos \varphi + h)}] d\varphi = \\ &= \beta \left[2\pi\nu + \left(\frac{128 k^4 - k^2 + 1}{15 k^5} - \frac{8\sigma}{k} \right) E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) + \frac{64(3k^2 - k^4 - 2)}{15 k^5} F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \right] \\ \psi_2(h) &= \beta \left[2\pi\nu - \left(\frac{128 k^4 - k^2 + 1}{15 k^5} - \frac{8\sigma}{k} \right) E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - \frac{64(3k^2 - k^4 - 2)}{15 k^5} F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \right] \end{aligned}$$

Здесь $F(1/2 \pi, k)$ и $E(1/2 \pi, k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода и введены обозначения

$$\nu = T/\beta, \quad \sigma = (\alpha + \beta)/\beta, \quad k^2 = 2 / (h + 1) \quad (1 < h < \infty)$$

Значения константы h_0 , выделяющие кривые C_{h_0} консервативной системы, охватывающие состояние равновесия, определяются как корни уравнения

$$\psi_3(h) = 0$$

где

$$\begin{aligned} \psi_3(h) &= \iint_{C_{h_0}} (p_\varphi' + q_y') d\varphi dy = - \iint_{C_{h_0}} (\alpha + \beta \cos 2\varphi - \gamma \sin \varphi) d\varphi dy = \\ &= -2\sqrt{2}\beta \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (\sigma - 2 \sin^2 \varphi) \sqrt{\cos \varphi + h} d\varphi = \\ &= -16\beta \{ [\sigma - \frac{16}{15}(\kappa^4 - \kappa^2 + 1)] E(1/2 \pi, \kappa) + [\sigma(\kappa^2 - 1) - \\ &\quad - \frac{8}{15}(3\kappa^2 - \kappa^4 - 2)] F(1/2 \pi, \kappa) \} \\ \kappa^2 &= \frac{1}{2}(h + 1) \quad (-1 < h < 1), \quad \varphi_0 = \arccos(-h) \end{aligned}$$

Корни уравнений $\psi_1(h) = 0$, $\psi_2(h) = 0$, $\psi_3(h) = 0$ зависят от двух параметров σ и ν . В плоскости σ, ν можно получить разбиение на

области, соответствующие различным возможным распределениям корней уравнений. Каждому распределению будет соответствовать определенная структура разбиения фазового пространства на траектории. Следующий набор условий (каждому условию соответствует некоторая кривая в плоскости σ ν) определяет все возможные в системе (3.3) бифуркации

$$\begin{aligned} (1) \quad & \psi_3(-1) = 0, & (2) \quad & \psi_1(\infty) = 0 \quad] \quad \text{или} \quad \psi_2(\infty) = 0 \\ (3) \quad & \psi_3(1) = 0, & (4) \quad & \psi_1(1) = 0, & (5) \quad & \psi_2(1) = 0 \\ (6) \quad & \psi_1(h) = 0 & \text{и} & \psi_1'(h) = 0, & (7) \quad & \psi_2(h) = 0 \text{ и } \psi_2'(h) = 0 \\ (8) \quad & \psi_3(h) = 0 & \text{и} & \psi_3'(h) = 0, \end{aligned}$$

Положим для определенности $\beta > 0$, $\nu > 0$ и будем рассматривать верхнюю полуплоскость σ , ν (при $\nu < 0$ получаем разбиение пространства параметров, симметричное области $\nu > 0$ относительно оси σ). В этом случае уравнение $\psi_1(h) = 0$ имеет не более одного корня, $\psi_2(h) = 0$ и $\psi_3(h) = 0$ — не более двух корней. Перечисленному набору условий соответствуют следующие уравнения граничных кривых и бифуркаций.

1. $\sigma = 0$ — при возрастании σ из фокуса появляется неустойчивый предельный цикл.
2. $\sigma = 1$ — при возрастании σ устойчивый предельный цикл появляется из $+\infty$. При убывании σ неустойчивый предельный цикл появляется из $-\infty$.
3. $\sigma = 16/15 = 1,066\dots$ — при возрастании σ из сепаратрисы седла появляется устойчивый (так как в седле $P_{\varphi}' + Q_{\nu}' \equiv -\mu\beta\sigma < 0$) предельный цикл, охватывающий состояние равновесия.
4. $2\nu - 8\sigma + 128/15 = 0$ — при убывании σ от петли сепаратрисы на верхнем полуцилиндре появляется устойчивый предельный цикл.
5. $2\nu + 8\sigma - 128/15 = 0$ — при возрастании σ от петли сепаратрисы на нижнем полуцилиндре появляется неустойчивый (если $-\beta\mu\sigma > 0$) или при убывании σ от петли сепаратрисы появляется устойчивый (если $-\beta\mu\sigma < 0$) предельный цикл.
6. При $\nu > 0$ кривая не существует (в верхнем полуцилиндре не может быть двух предельных циклов при $\nu > 0$).
7. Если обозначить $\psi_2(h) \equiv \beta[2\nu + \sigma\Phi_1(h) - \Phi_2(h)] = 0$, то параметрические уравнения кривой будут

$$\sigma = \frac{\Phi_2'(h)}{\Phi_1'(h)}, \quad \nu = \frac{\Phi_2(h)\Phi_1'(h) - \Phi_2'(h)\Phi_1(h)}{2\pi\Phi_1(h)}.$$

Кривая проходит между точками $A(0, 128/30 \pi^{-1} = 1.36)$ и $B(1, 0)$. При возрастании σ двойной предельный цикл, возникший на нижнем полуцилиндре из сгущения траекторий, разделяется на два (нижний — неустойчивый, верхний — устойчивый).

8. Из $\psi_3(h) \equiv -16\beta[\Psi_1(h)\sigma - \Psi_2(h)] = 0$ и $\psi_3'(h) = 0$, исключая σ , получаем уравнение для определения h . Уравнение $\Psi_2'\Psi_1 - \Psi_2\Psi_1' = 0$ имеет единственный корень $h = 0.86$, соответствующий $\sigma = 1.09$. При возрастании σ исчезает двойной предельный цикл, охватывающий состояние равновесия.

Разбиение пространства параметров σ, ν на области, которым соответствуют различные качественные структуры разбиения фазового пространства, представлено на фиг. 10. Штриховкой отмечены две тонкие области, для точек которых в фазовом пространстве есть два предельных цикла.

Исследование системы (3.1) при полигональных и разрывных характеристиках может быть аналогично проведено методом малого параметра. Достаточные условия возможности применения формулы Л. С. Понтрягина [9] к системам с кусочно-аналитическими правыми частями установлены в [10].

Пусть $H(x, y) = h$ — семейство замкнутых кривых, зависящих от параметра h , сшитых из кусков $H_i(x, y) = h$ на интервалах $x_i < x < x_{i+1}$. Функции $H_i(x, y)$ предполагаются аналитическими по каждому из аргументов. Система

$$\dot{x} = H_y' + \mu p(x, y), \quad \dot{y} = -H_x' + \mu q(x, y)$$

где $p(x, y), q(x, y)$ — аналитические в каждом из интервалов $x_i < x < x_{i+1}$ и μ — малый параметр, будет иметь при $\mu \neq 0$ единственный предельный цикл в окрестности замкнутой кривой C_{h_0} , где h_0 — корень уравнения

$$\psi(h_0) \equiv \int_{C_{h_0}} q(x, y) dx - p(x, y) dy = 0 \quad (3.4)$$

и $\psi'(h_0) \neq 0$, если $\partial H / \partial y$ будет непрерывна в точках сшивания $x = x_i$. Предельный цикл будет устойчив, если $\psi'(h_0) < 0$, и неустойчив, если $\psi'(h_0) > 0$.

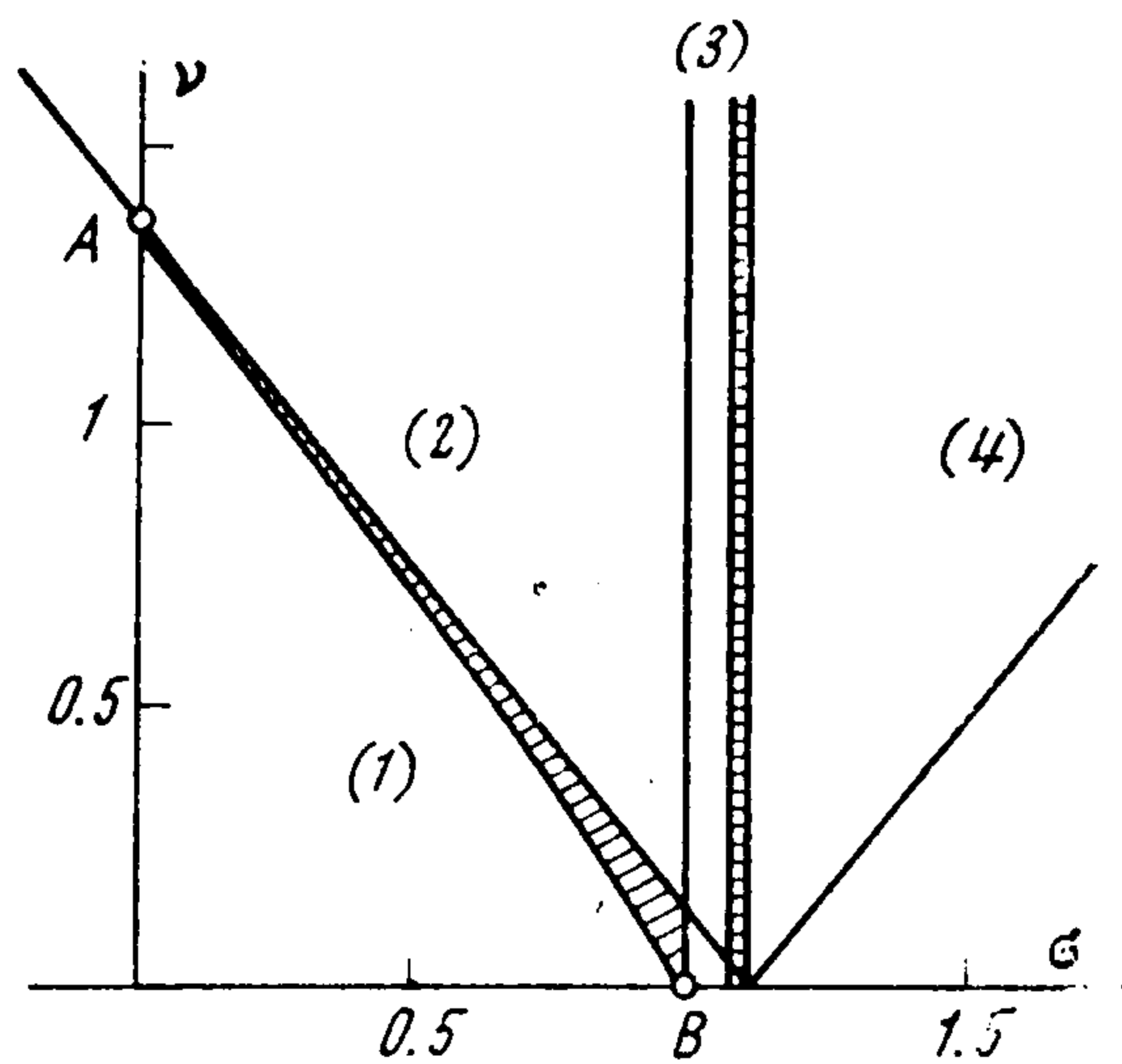
Кривые C_{h_0} могут, в частности, охватывать фазовый цилиндр.

Система (3.1) с полигональными характеристиками (фиг. 9, в) и малым параметром μ [11]¹ имеет при $\mu = 0$ интеграл

$$H(\varphi, y) = \frac{y^2}{2} + \begin{cases} -(\varphi + \pi)^2 / \pi \\ \varphi^2 / \pi - \pi / 2 \\ -(\varphi - \pi)^2 / \pi \end{cases} = h \quad \begin{matrix} (-\pi < \varphi < -\pi/2) \\ (-\pi/2 < \varphi < \pi/2) \\ (\pi/2 < \varphi < \pi) \end{matrix} \quad (3.5)$$

Замкнутые кривые семейства (3.5) при $-\frac{1}{2}\pi < h < 0$ охватывают особую точку, при $0 < h < \infty$ — фазовый цилиндр. Состояния равновесия при $\mu \neq 0$ смещены с линии сшивания и будут $O_1(\frac{1}{2} \mu T \pi, 0)$ — фокус и $O_2(\pi - \frac{1}{2} \mu T \pi, 0)$ — седло.

¹ В [11] указано на ошибки в работе [8], касающиеся существования неустойчивого предельного цикла, повторенные в [12].



Фиг. 10

Приведем (в том же порядке, что и для (3.2)) уравнения границ в пространстве параметров σ и ν :

$$(1) \sigma = 0, \quad (2) \sigma = 1, \quad (3) \sigma = \frac{4}{3} \sqrt{2} (1 + \frac{1}{4} \pi)^{-1} = 1.056 \dots$$

$$(4) 2\pi\nu - \frac{1}{2} \sqrt{2} \pi^{3/2} (1 + \frac{1}{4} \pi) \sigma + \frac{4}{3} \pi^{3/2} = 0$$

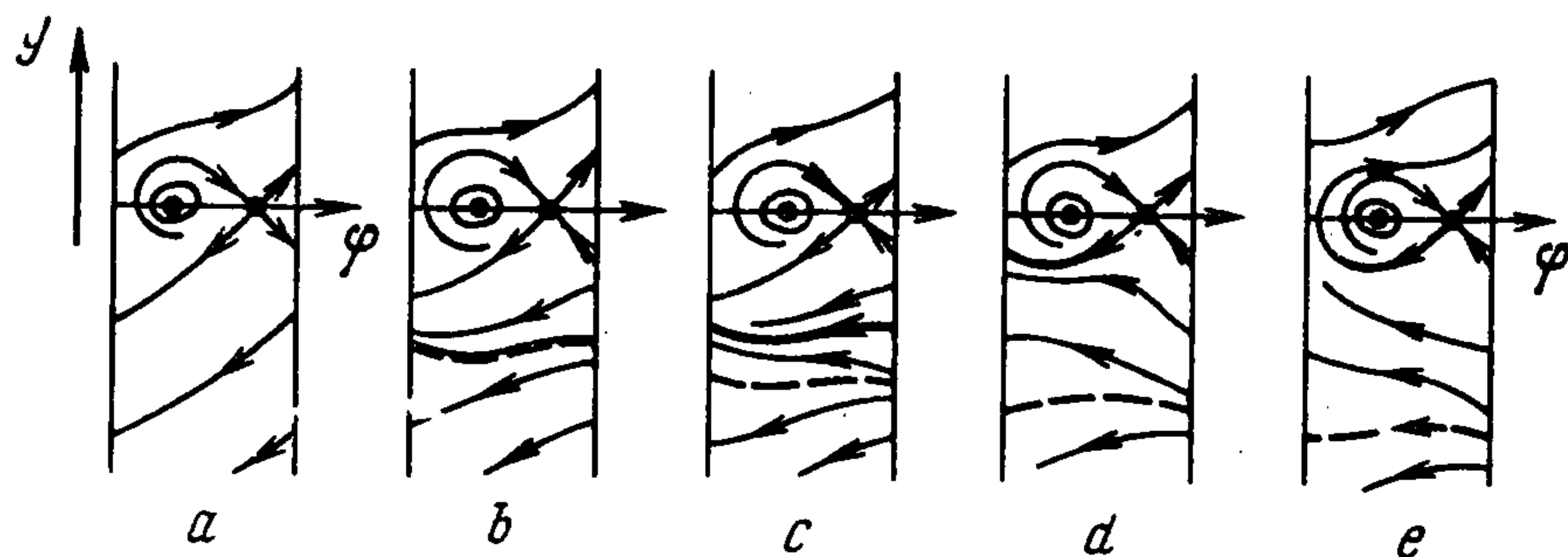
$$(5) 2\pi\nu + \frac{1}{2} \sqrt{2} \pi^{3/2} (1 + \frac{1}{4} \pi) \sigma - \frac{4}{3} \pi^{3/2} = 0$$

(6) при $\nu > 0$ не существует

(7) кривая проходит между точками $A(0, \frac{2}{3} \sqrt{\pi} = 1.26 \dots)$ и $B(1.0)$

(8) $\sigma = 1,07 \dots$

Разбиения фазового пространства и пространства параметров для полигональных характеристик останутся качественно тождественными разбиениям для характеристик фиг. 9, а. Сохранятся и тонкие области, для



Фиг. 11

точек которых в фазовом пространстве есть два предельных цикла. Их размеры лишь незначительно изменятся. На фиг. 11, а, е, представлены разбиения цилиндрического фазового пространства соответственно для областей (1) и (2) фиг. 10.

Для полигональных характеристик (фиг. 9, в) качественно эквивалентные фиг. 11, а, е разбиения фазового пространства будут соответствовать областям пространства параметров, расположенных, как и на фиг. 10, в полосе $0 < \sigma < 1$. Для обеих рассмотренных аппроксимаций уравнения (3.1) области (1) и (2) в пространстве параметров будут разделены узкой полосой, для точек которой в фазовом пространстве есть два предельных цикла, не исчезающей при изменении аппроксимации, несмотря на весьма малую ее ширину (максимальная ширина порядка 0.015 для $\sigma = 1$ весьма быстро убывает при $\sigma \rightarrow 0$, так как бифуркационная кривая между точками А и В касается в точке А прямой, ограничивающей снизу область (2)). Грубость пространства параметров по отношению к изменению характеристики с сохранением «тонких» элементов не будет очевидной и связана с сохранением для различных аппроксимаций особенностей бифуркаций при возникновении и исчезновении петли сепаратрисы. Эти особенности определяются знаком величины $P_\phi' + Q_\nu'$ для седла [1].

Для фиксированного σ при возрастании параметра ν можно перейти из области (1) в область (2). При этом разбиение фазового пространства, изображенное на полосе шириной 2π (на фиг. 11, а), переходит в разбиение 11, е. При значении $\nu = \nu_0$ (это значение единственное в силу монотонности изменения направления векторного поля при монотонном измене-

нии ν) α - и ω -сепаратрисы седла на нижнем полуцилиндре должны образовать петлю, охватывающую цилиндр.

От петли, однако, не может появиться неустойчивый предельный цикл, изображенный на фиг. 11, *e*, так как седловая величина, которая для обеих аппроксимаций (фиг. 9, *a*, *e*) с точностью до членов порядка μ^2 дается выражением $P_\varphi' + Q_\nu' = -\mu\beta\sigma$, в интервале $0 < \sigma < 1$ отрицательна ($\beta > 0$) и, следовательно, при возрастании ν в петлю сепаратрисы должен превратиться устойчивый предельный цикл. Чтобы это оказалось возможным, необходимо должен возникнуть двойной предельный цикл при возрастании ν до значения $\nu = \nu_0$.

Этот цикл затем разделяется на два (верхний — устойчивый, нижний неустойчивый), и устойчивый предельный цикл превращается в петлю сепаратрисы, исчезающую при дальнейшем возрастании ν и порождающую разбиение, представленное на фиг. 11, *e* (последовательные переходы от *a* до *e* представлены на фиг. 11).

Высказанные соображения позволяют выделить класс характеристик, для которых области (1) и (2) необходимо разделяются областью с двумя циклами. Все сказанное может быть почти дословно повторено по отношению к условиям существования тонкой полосы с фазовым пространством, содержащим два предельных цикла (охватывающих состояние равновесия) и разделяющей области (3) и (4).

При изменении характеристик, вообще говоря, будут перемещаться бифуркационные кривые на плоскости параметров и их точки пересечения. Если на плоскости параметров есть точки, в которых пересекаются более двух бифуркационных кривых (и, следовательно, смыкаются более четырех областей), то окрестность таких точек при изменении характеристик может изменить качественную структуру разбиения плоскости параметров при соответствующем изменении характеристики.

Сохранение структуры разбиения плоскости параметров в этих точках требует более жестких условий для класса характеристик, не изменяющих структуру разбиения плоскости параметров. Такой точкой, например, для рассматриваемой плоскости параметров σ , ν при характеристиках фиг. 9, *a*, *e* будет точка *A*, в которой смыкаются пять областей. Незменность качественной структуры разбиения плоскости параметров системы (3.1) при характеристиках фиг. 9, *a*, *e*, обуславливается тем, что величина $P_\varphi' + Q_\nu'$ с точностью до величин порядка μ^2 для фокуса и для седла имеет одинаковое значение при обеих аппроксимациях и при изменении знака σ не только появляется цикл из особой точки, но и происходит изменение характера бифуркаций для петли сепаратрисы. Это условие не будет соблюдено, если перейти к релейным характеристикам.

Рассмотрим систему (3.1) с релейными характеристиками (фиг. 9, *c*) и малым параметром¹. При $\mu = 0$ система будет иметь интеграл

$$H(\varphi, y) = \begin{cases} y^2/2 - \varphi \\ y^2/2 + \varphi \end{cases} = h \quad \begin{matrix} (-\pi < \varphi < 0) \\ (0 < \varphi < \pi) \end{matrix} \quad (3.6)$$

¹ Задача рассматривалась И. А. Непомнящей.

Замкнутые кривые семейства (3.6) при $0 < h < \pi$ охватывают особую точку, при $\pi < h < \infty$ — фазовый цилиндр. Система будет иметь особые точки на линиях сшивания: в точке $O_1(0, 0)$ — сшитый фокус, в точке $O_2(\pi, 0)$ — седло, сшитое из обыкновенных траекторий.

Функции $\psi_1(h)$, $\psi_2(h)$ и $\psi_3(h)$ для релейных характеристик имеют особенно простой вид. Приведем выражение для $\psi_3(h)$, представляющей некоторые интересные особенности

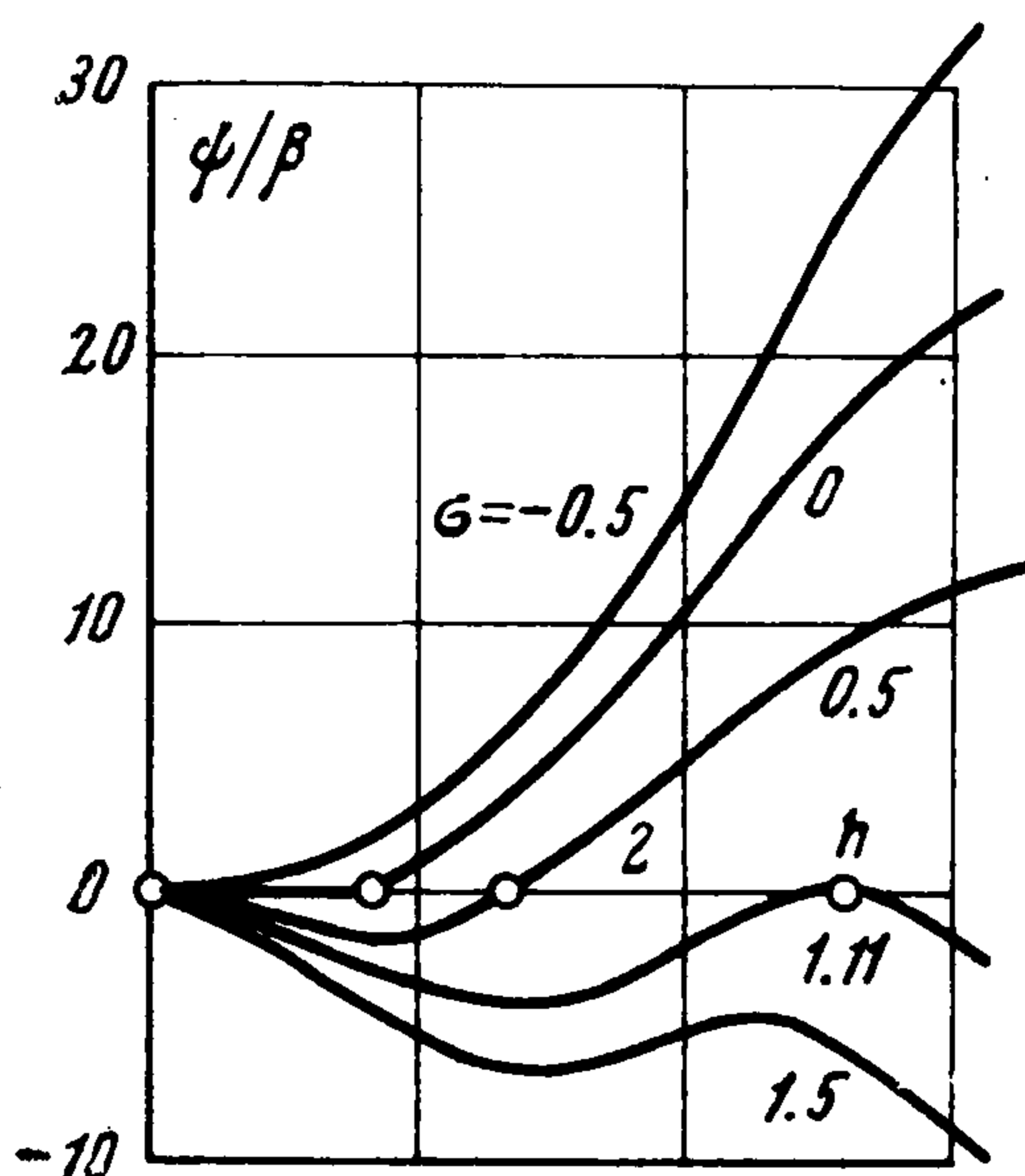
$$\psi_3(h) = -\frac{8}{3} \sqrt{2} [\sigma h^{3/2} - 2m(h - \frac{1}{4}\pi)^{3/2} + 2n(h - \frac{3}{4}\pi)^{3/2}] \quad (3.7)$$

Здесь

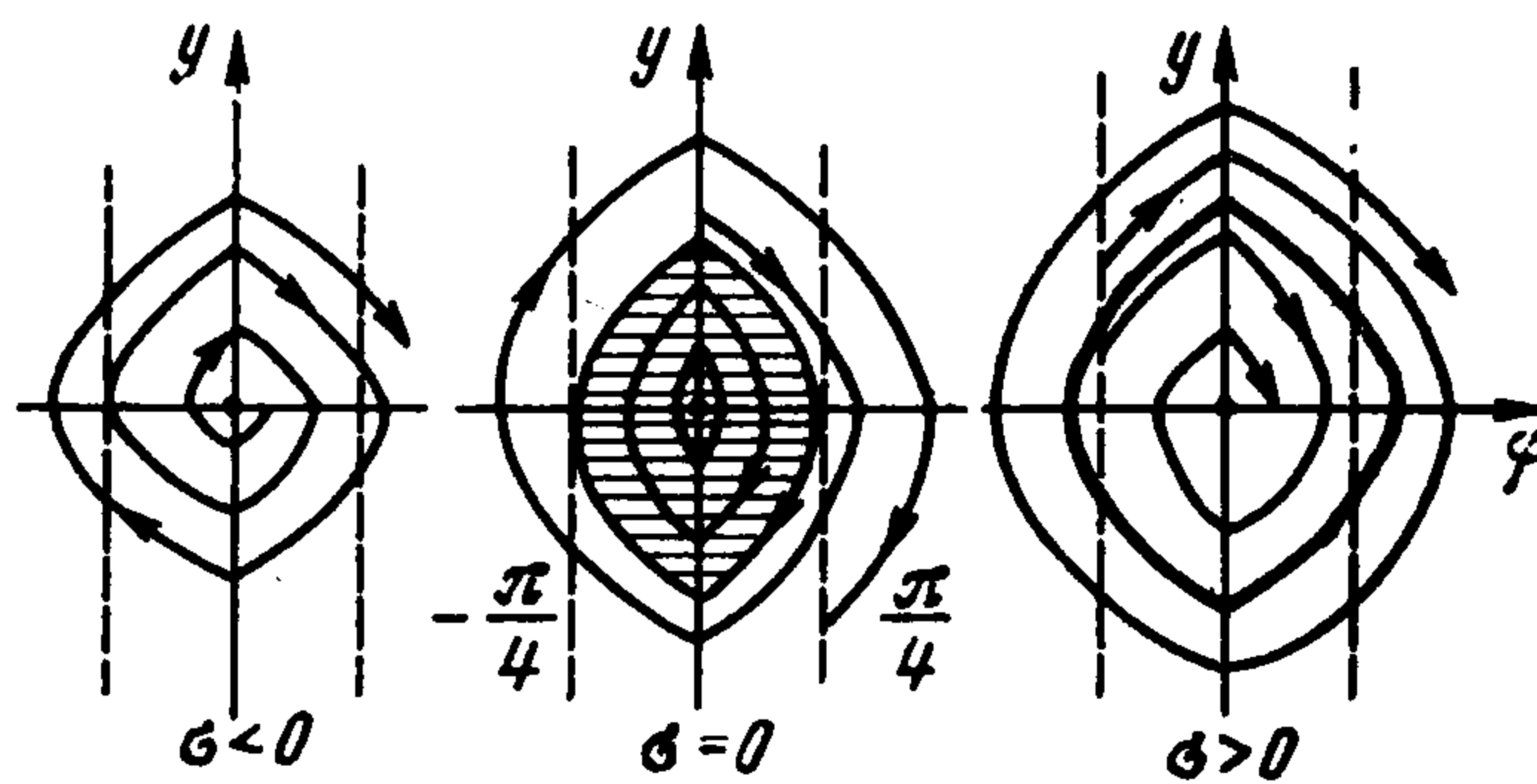
$$\begin{aligned} m = n = 0, & \text{ если } 0 \leq h \leq \frac{1}{4}\pi \\ m = 1, n = 0, & \text{ если } \frac{1}{4}\pi \leq h \leq \frac{3}{4}\pi \\ m = n = 1, & \text{ если } \frac{3}{4}\pi \leq h \leq \pi \end{aligned}$$

На фиг. 12 в плоскости $h\psi$ изображены кривые (3.7) для различных σ . При $\sigma = 0$ функция $\psi_3(h)$ для $0 \leq h \leq \frac{1}{4}\pi$ совпадает с отрезком оси h , и, следовательно, имеет континуум корней.

Переход σ через нуль, соответствующий последовательности изменения качественных структур, представленной на фиг. 13, будет аналогом бифуркации, соответствующей рождению неустойчивого предельного цикла из особой точки. Предельный цикл появляется из границы области, заполненной замкнутыми кривыми¹.



Фиг. 12



Фиг. 13

Приведем уравнения границ на плоскости $\sigma\nu$:

$$(1) \quad \sigma = 0, \quad (2) \quad \sigma = 1, \quad (3) \quad \sigma = \frac{1}{4}(3\sqrt{3} - 1) = 1.049 \dots$$

¹ При $\sigma = 0$ сшитое состояние равновесия на линии склейки будет «центр с точностью до величин порядка μ^2 ». При учете членов порядка μ^2 в полосе $-\frac{1}{2}\pi \leq \varphi \leq \frac{1}{4}\pi$ будут «медленно закручивающиеся» или «медленно раскручивающиеся» спирали. В этом можно убедиться построив, например, функцию последования на полупрямой $y \geq 0$ на линии сшивания. Она будет иметь вид:

$$y_2 = y_1 - \frac{4}{3} T \gamma y_0^2 \mu^2 + (\dots)\mu^3 + \dots \quad (y_0 \text{ — параметр})$$

Функция ψ_3^* , описывающая бифуркации в окрестности особой точки с учетом членов порядка μ^2 , не может быть получена из (3.4), но может быть получена из так называемых вторых приближений.

$$(4) \quad 2\pi\nu - \frac{1}{3}\sqrt{2\pi}^{3/2}(4\sigma + 1 - 3\sqrt{3}) = 0$$

$$(5) \quad 2\pi\nu + \frac{1}{3}\sqrt{2\pi}^{3/2}(4\sigma + 1 - 3\sqrt{3}) = 0$$

(6) при $\nu > 0$ не существует

(7) кривая проходит между точками

$$A \left[\sqrt{3} - 1, \sqrt{\frac{1}{2}\pi} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right] \text{ и } B(1, 0)$$

$$(8) \quad \sigma = \frac{4}{13}\sqrt{13} = 1.11 \dots$$

Разбиения фазового пространства системы (3.1) с релейными характеристиками не будут для всех областей пространства параметров качественно эквивалентными соответствующим разбиениям для аналитических и полигональных характеристик, но будут в случаях различия сходными, допускающими отождествление в указанном выше смысле. Различие в бифуркациях будет на прямой $\sigma = 0$ (рождение неустойчивого предельного цикла при изменении знака σ из границы некоторой области, содержащей внутри особую точку).

Разбиение пространства параметров σ, ν для системы с релейными характеристиками отличается от представленного на фиг. 10 расположением кривой AB . Точка A не лежит на оси $\sigma = 0$. Кривая AB касается в точке A границы области (2) при $\sigma = \sqrt{3} - 1$. На интервале $0 < \sigma < \sqrt{3} - 1$ возможен при возрастании ν непосредственный переход, минуя область с двумя циклами от разбиения фиг. 11, *a* к разбиению фиг. 11, *e* через рождение неустойчивого предельного цикла от петли сепаратрисы, охватывающей цилиндр. Характер и взаиморасположение других бифуркационных кривых не изменяются при замене полигональных или аналитических характеристик релейными.

4. Рассмотрим систему (симметричный полет самолета в вертикальной плоскости с постоянным углом атаки) [13]

$$d\varphi / dt = y^2 - \cos \varphi, \quad dy / dt = y(\alpha - \beta y^2 - \sin \varphi) \quad (4.1)$$

и введем [14] малый параметр $\beta = \mu, \alpha = k\mu$. При $\mu = 0$ система имеет интеграл

$$H(\varphi, y) = \frac{1}{3}y^3 - y \cos \varphi = h \quad (4.2)$$

Замкнутые кривые семейства (4.2) при $-\frac{2}{3} < h < 0$ охватывают состояние равновесия, при $0 < h < \infty$ — фазовый цилиндр. При малом μ система имеет три состояния равновесия: $O_1(-\frac{1}{2}\pi, 0)$ и $O_2(\frac{1}{2}\pi, 0)$ — седла, $O_3[(k-1)\mu, 1 + \frac{1}{2}(k^2-1)\mu^2]$ — фокус (при $\mu = 0$ — центр). Фазовое пространство — цилиндрическое. В соответствии с физическим смыслом переменных и параметров рассматриваем лишь верхний полуцилиндр ($y = 0$ — интегральная кривая) и положительные значения параметров.

Особенность разбиения фазового пространства на траектории состоит в рассматриваемой задаче в том, что для значений параметров, при которых возникает сепаратриса, идущая из седла в седло, образуются сразу два замкнутых контура, составленных из сепаратрис седла на цилиндре и отрезков оси φ : контур, охватывающий состояние равновесия, и контур, охватывающий фазовый цилиндр. От контуров, составленных из сепаратрис седла, при изменении параметра появляется либо предельный цикл, охватывающий состояние равновесия, либо предельный цикл, охватывающий фазовый цилиндр. Поэтому функция $\psi(h)$, корни которой определяют структуру разбиения на траектории, может быть записана единообразно для циклов любой природы

$$\psi(h) = \iint_{Ch_0} (k - 3y^2) dy d\varphi \quad [\text{или} \quad \psi(h) = \int_{-\pi}^{\pi} y(k - y^2) d\varphi]$$

соответственно для $-\frac{2}{3} < h < 0$ или $0 < h < \infty$, что можно для обоих случаев записать в виде

$$\psi(h) = 2 \int_{e_2}^{e_1} \frac{(k - y^2)(2y^3 + 3h)}{\sqrt{9y^2 - (y^3 - 3h)^2}} dy \quad (4.3)$$

Здесь e_1 и $e_2 < e_1$ — положительные корни уравнения $y^3 - 3y = 3h$ если $-\frac{2}{3} < h < 0$, или положительные корни соответственно уравнений $y^3 - 3y = 3h$ и $y^3 + 3y = 3h$, если $h > 0$. Функция $\psi(h)$ доопределяется для $h = -\frac{2}{3}$ и $h = 0$ ее предельными значениями.

Исследование обнаруживает, что $\psi(h) = 0$ не может иметь более двух корней на интервале $0 < h < \infty$ и более одного корня для $-\frac{2}{3} < h < 0$.

Все возможные бифуркации в системе (4.1) с малым параметром соответствуют следующему набору условий (каждому отвечает определенное значение k).

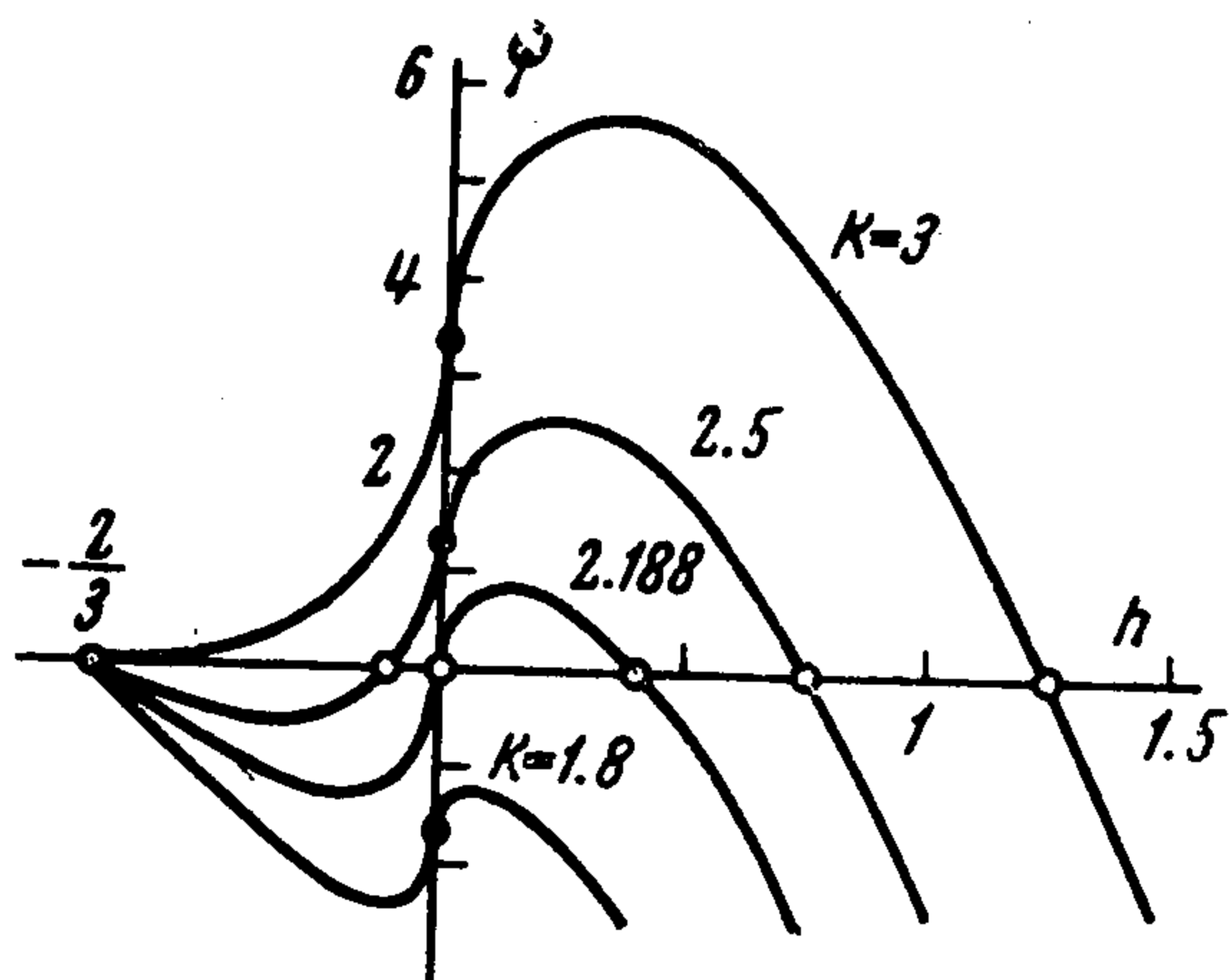
1. $\psi(-\frac{2}{3}) = 0$, $\psi'(-\frac{2}{3}) = 0$. При убывании k из состояния равновесия появляется неустойчивый предельный цикл.
2. $\psi(0) = 0$. При убывании k из петли сепаратрисы появляется неустойчивый предельный цикл, охватывающий цилиндр, а при возрастании k появляется неустойчивый предельный цикл, охватывающий состояние равновесия.
3. $\psi(h^*) = 0$, $\psi'(h^*) = 0$ ($h^* > 0$). При убывании k исчезает двойной предельный цикл. При возрастании k двойной предельный цикл разделяется на два (верхний — устойчивый, нижний — неустойчивый).

Перечисленному набору условий соответствуют следующие значения параметра k :

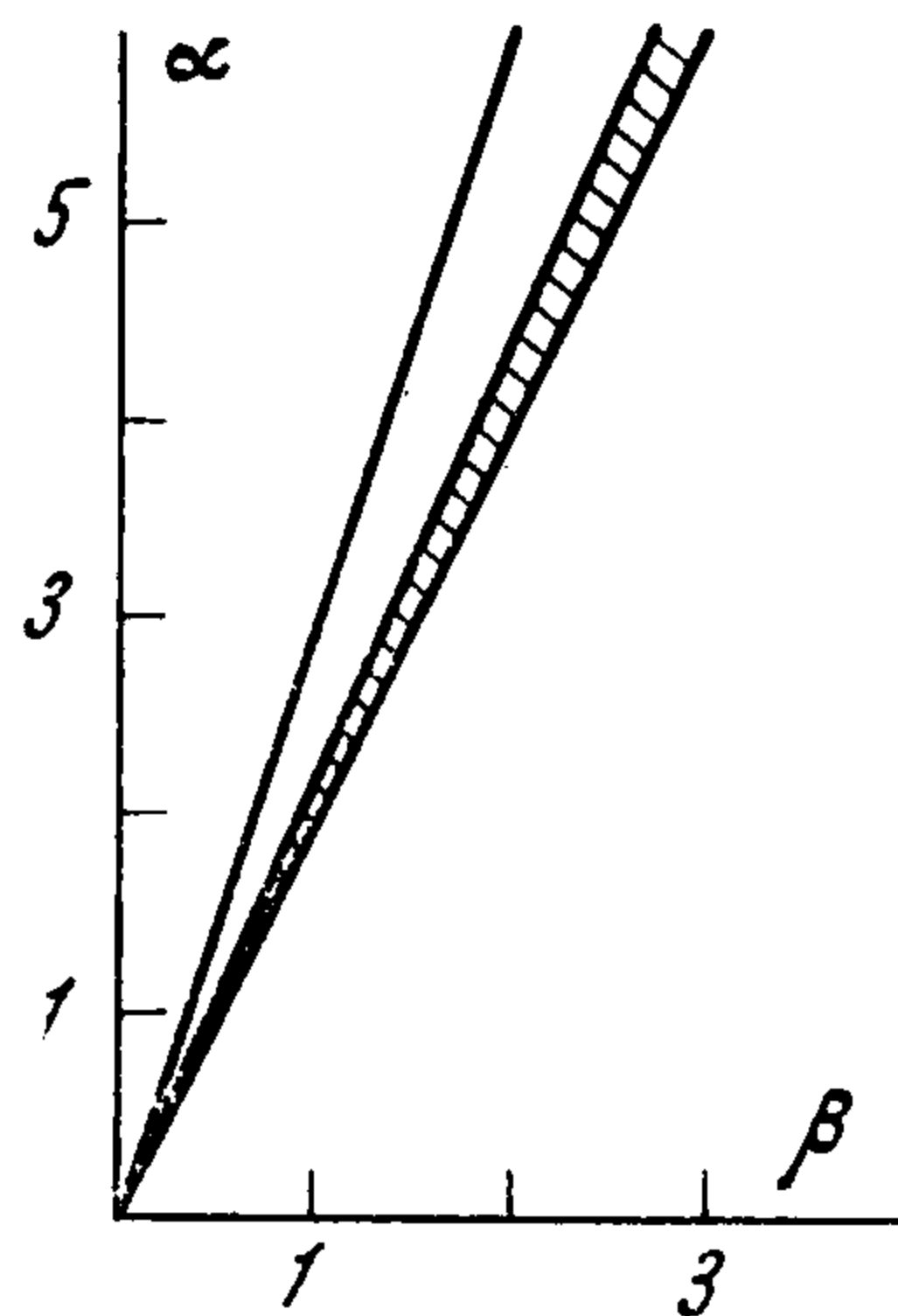
$$(1) k = 3, \quad (2) k = \Gamma^4(1/4) / 8 \pi^2 = 2.188, \quad (3) k = 2,05$$

Вид функций $\psi(h)$ для различных k представлен на фиг. 14. На фиг. 15 в плоскости малых параметров α , β представлено разбиение на области

с различной качественной структурой разбиения фазового пространства на траектории. Заштрихована узкая полоса, для точек которой в фазовом пространстве есть два предельных цикла.



Фиг. 14



Фиг. 15

Рассмотрим систему (4.1) с малым параметром при аппроксимациях $\cos \varphi$ — пилою, $\sin \varphi$ — релейной функцией¹.

При $\mu = 0$ система будет иметь интеграл

$$H(\varphi, y) = \frac{y^3}{3} - y + \begin{cases} 2y\varphi/\pi & (-\pi < \varphi < 0) \\ -2y\varphi/\pi & (0 < \varphi < \pi) \end{cases} = h \quad (4.4)$$

для которого производная $\partial H/\partial y$ непрерывна на линиях сшивания $\varphi = 0$ и $\varphi = \pm \pi$.

Замкнутые кривые семейства (4.4) при $-\frac{2}{3} < h < 0$ охватывают состояние равновесия типа «спитый центр», а при $0 < h < \infty$ — фазовый цилиндр. Состояния равновесия $O_1(-\frac{1}{2}\pi, 0)$ и $O_2(\frac{1}{2}\pi, 0)$ будут седла. Функция $\psi(h)$ здесь будет иметь вид

$$\psi(h) = \frac{\pi}{3} \int_{e_2}^{e_1} \left[\frac{3kh}{y} + 2ky^2 - 3hy - 2y^4 \right] dy \quad (4.5)$$

а e_1 и e_2 имеют те же значения, что и в предыдущем случае.

Исследование обнаруживает тождественность поведения и свойств функций $\psi(h)$ для исходной и аппроксимирующей систем по отношению к зависимости корней от параметра k . Соответствующие бифуркационные значения k для аппроксимирующей системы будут: $k = 3, \frac{9}{5}, 1.65$. Пространство параметров системы будет отличаться от представленного на фиг. 15 лишь незначительным смещением заштрихованной полосы, соответствующей системам с двумя циклами.

Тождественность разбиений фазового пространства для исходной и аппроксимирующей систем обуславливается здесь в первую очередь сохранением особенностей бифуркаций, связанных с сепаратрисами седел, так как седловая величина не изменилась при переходе к аппроксимирующей системе (для обеих систем в седле $P_\varphi' + Q_y' = k\mu$).

¹ Задача рассматривалась И. С. Шаровой.

5. Хорошо известно, что результаты качественного исследования, полученные методом малого параметра, часто остаются верными и по отношению к системам, где параметры заведомо не будут малыми. Такое «чудо малого μ » находит объяснение в условиях грубости пространства параметров по отношению к классу характеристик, включающих как часть характеристики с малым параметром μ , который может принимать и не малые значения (здесь параметр μ играет роль внутреннего параметра в классе характеристик, зависящих от обеих переменных).

Если динамическая система при некоторых значениях параметров (на множестве A_0) имеет фазовое пространство (плоское или цилиндрическое) с континуумом замкнутых кривых (окружающих состояние равновесия типа центр или замкнутых кривых на цилиндре) и если при других значениях параметров (на множествах A_i) в системе могут существовать особые элементы, имеющие негрубую природу (негрубый фокус, двойной предельный цикл или сепаратрисы, идущие из седла в седло) и пространство параметров не будет специально вырожденным, то множество A_0 будет пересекаться с множествами A_i ¹. Поэтому уже малая окрестность множества A_0 должна содержать набор бифуркаций и областей, соответствующих различным возможным для данной системы разбиениям фазового пространства. Возможность других бифуркаций, например, связанных с изменением числа особых точек системы, часто требует значительного, а не малого изменения параметров.

Возвратимся к уравнениям (4.1), не предполагая более параметры α и β малыми. Изменение числа состояний равновесия системы (4.1) происходит при $\alpha > 1$. Будем рассматривать область $\alpha < 1$, где число состояний равновесия не изменяется по сравнению со случаем малого μ . Простейшие бифуркации, связанные с предельным циклом, могут быть найдены и сохраняют тот же характер, что и для малых значений α и β . Появление устойчивого предельного цикла из бесконечности происходит при возрастании β от нуля (это видно из уравнения (4.1) непосредственно, так как при изменении знака β бесконечность из устойчивой становится неустойчивой). Появление неустойчивого предельного цикла из состояния равновесия происходит из кривой

$$\alpha - 3\beta \frac{\alpha\beta + \sqrt{1 + \beta^2 - \alpha^2}}{1 + \beta^2} = 0 \quad (4.6)$$

(соответствующая граница на фиг. 15 есть касательная к кривой (4.6) в начале). Величина $P_\varphi' + Q_\psi' = \alpha = k\mu$ для не малых μ не изменяет

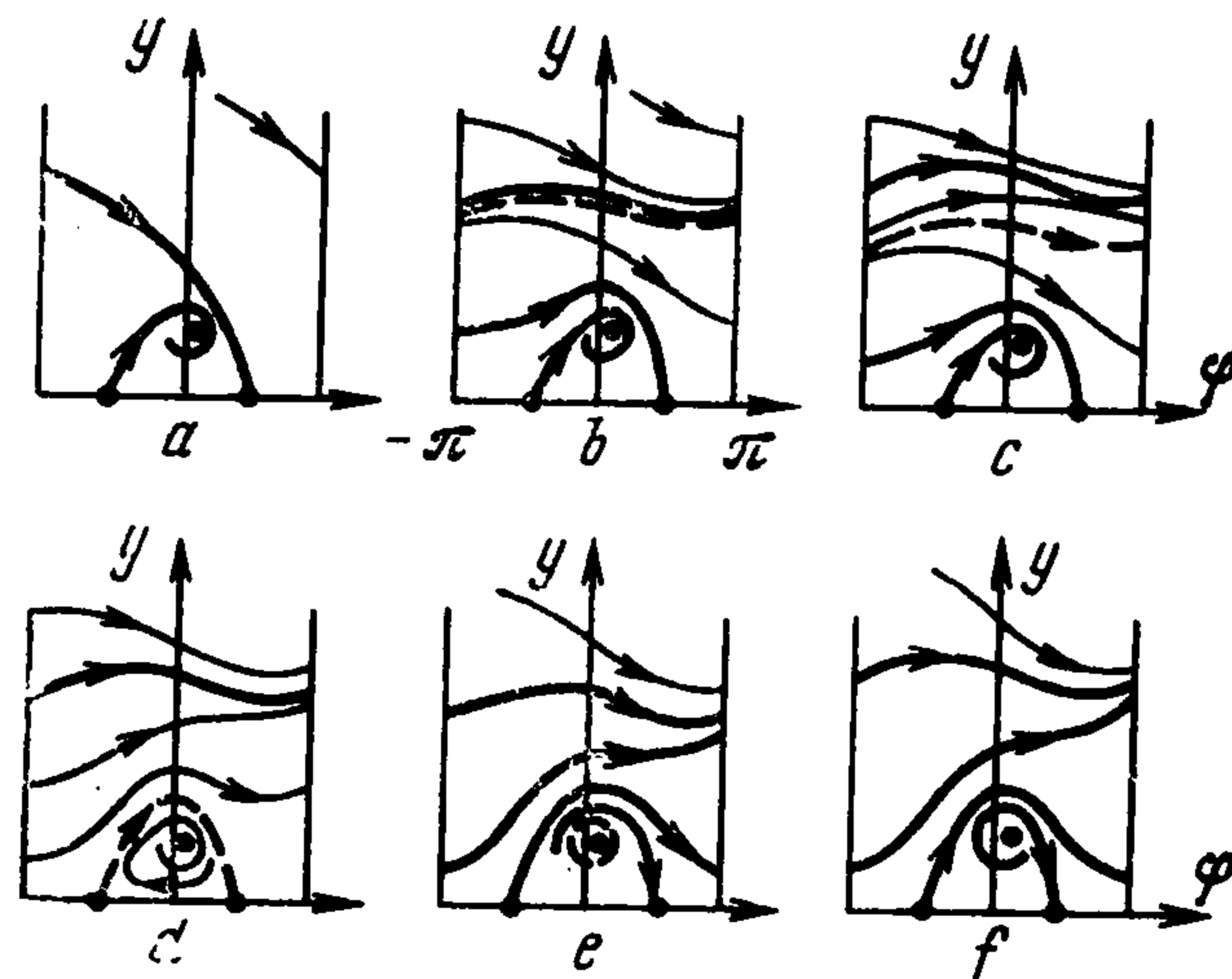
¹ Если $H(x, y) = h$ — семейство кривых, содержащее континуум замкнутых траекторий и уравнение записано в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-H_x' + q(x, y)}{H_y' + p(x, y)}$$

а пространство параметров будет полным в том смысле, что ни один из коэффициентов, входящих в $p(x, y)$ и $q(x, y)$, не будет константой, производящей сечение в полном пространстве, то это утверждение становится почти очевидным.

знак и обуславливает неизменность характера бифуркаций, связанных с сепаратрисами седел. Только для суждений о бифуркациях, связанных с двойным предельным циклом, нет полной информации. Знание других бифуркаций позволяет сделать ограниченные высказывания об области существования систем с двумя предельными циклами.

Для больших значений параметра β расположение сепаратрис седел будет таким, как на фиг. 16, *a* (это непосредственно следует из расположения главных изоклин для достаточно больших β). Не существует предельных циклов, охватывающих цилиндр. При малых β расположение сепаратрис будет, как на фиг. 16, *f* (при $\beta = 0$ α -сепаратриса седла идет в бесконечность — это устанавливается аналогично [15]; при малых β появляется устойчивый предельный цикл из бесконечности). При убывании β векторное поле поворачивается монотонно, поэтому существует единственное при любом фиксированном α_0 значение β_0 , при котором α - и ω -сепаратрисы седел образуют петлю. Множество точек α_0, β_0 образует непрерывную кривую, пересекающую полосу $0 < \alpha < 1$.



Фиг. 16

От петли, однако, не может появиться устойчивый предельный цикл, охватывающий цилиндр, так как в седле $P_\varphi' + Q_\psi' = \alpha > 0$.

Из петли может появиться или к ней стянутся лишь неустойчивый предельный цикл; чтобы это оказалось возможным при убывании β до значения $\beta = \beta_0$, из сгущения траекторий необходимо должен возникнуть двойной предельный цикл, охватывающий цилиндр.

Этот предельный цикл затем разделяется на два (верхний — устойчивый, нижний — неустойчивый), и неустойчивый предельный цикл может превратиться в петлю сепаратрисы, исчезающую при дальнейшем убывании β и порождающую неустойчивый предельный цикл, который охватывает состояние равновесия. При значении β , удовлетворяющем условию (4.6), неустойчивый предельный цикл стягивается к состоянию равновесия и исчезает.

Описание изменений качественной структуры разбиения фазового пространства на траектории при изменении β позволяет утверждать необходимость появления области с фазовым пространством, содержащим два предельных цикла, которые охватывают цилиндр, и позволяет проследить такую же последовательность бифуркаций в зависимости от β , что и для случая малого μ . Однако последовательность структур разбиения фазового пространства на траектории, представленная на фиг. 16 и строго доказанная для случая малого μ , может быть отождествлена с соответствующими структурами, относящимися к случаю не малого μ , лишь с точностью до четного числа предельных циклов.

Логическая возможность такого расхождения остается неустранимой и грубость пространства параметров здесь нужно понимать в том ограниченном смысле, о котором было сказано вначале. В этом смысле приведенное описание доказывает грубость пространства параметров по отношению к переходу от малых μ к не малым в довольно широкой полосе $0 < \alpha < 1$ пространства параметров α, β .

Поступила 10 V 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М., «Наука», 1967.
2. Giger A. Ein Grenzproblem einer technisch wichtigen nichtlinearen Differentialgleichung. Z. angew. Math. Phys., 1956, vol. 7, Fasc. 2.
3. Tricomi F. Integrazione di una equazione differenziale presentatasi in elettrotecnica. Ann. Scuola Norm. Super., Pisa, Ser. 2, 1933, vol. 2, No 1.
4. Капранов М. В. Приближенный метод вычисления полосы захвата фазовой автоподстройки частоты. 2-я Всесоюз. межвуз. конф. по теор. и методам расчета нелинейных электрических цепей, сб. № 2, Ташкент, 1963.
5. Dulac H. Recherche des cycles limites. C. R. Acad. Sci., 1937, t. 204, No 23.
6. Терникова Н. П. К исследованию одного дифференциального уравнения фазовой автоподстройки частоты. Тр. Горьковск. ин-та инж. водн. трансп., 1968, вып. 94.
7. Dreyfus L. Einführung in die Theorie der selbsterregten Schwingungen synchroner Maschinen. Electrotechnik und Maschinenbau. 1911, Jg. 29, H. 16, s. 323—342.
8. Власов Н. П. Автоколебания синхронного мотора. Уч. зап. Горьковск. ун-та, 1939, т. 12, вып. 3.
9. Poincaré L. S. Über Autoschwingungssysteme, die den Hamiltonschen nahe liegen. Phys. Zeit. Sowjetunion, 1934, Bd. 6, H. 1—2, S. 25—28.
10. Серебрякова Н. Н. О периодических решениях динамических систем второго порядка, близких к кусочно-гамильтоновым. ПММ, 1969, т. 33, вып. 5.
11. Гершт Е. Н. Качественное исследование одного дифференциального уравнения теории электрических машин. Изв. АН СССР, Механ. и машиностр., 1964, № 1.
12. Minorsky N. Introduction to Non-Linear Mechanics, USA, Ann. Arbor. J. W. Edwards, 1947.
13. Баутин Н. Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. Л.—М., Гостехиздат, 1949.
14. Баутин Н. Н. О продольных движениях самолета, близких к фугоидным движениям. Уч. зап. Горьковск. ун-та, 1947, вып. 13.
15. Ikonnikov E. On the Dynamics of Symmetrical flight of an aeroplane. Technical Physics of the USSR. 1937, vol. 4, No 6, pp. 433—437.