

**УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО КОНВЕКТИВНОГО
ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ С ПРОДОЛЬНЫМ
ГРАДИЕНТОМ ТЕМПЕРАТУРЫ**

**Р. В. Бирих, Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий,
Р. Н. Рудаков**

(Пермь)

В работах [1-5] подробно исследована устойчивость стационарного плоскопараллельного конвективного движения между плоскостями, нагретыми до разной температуры. В предлагаемой работе исследуется устойчивость движения, возникающего между вертикальными параллельными плоскостями, когда кроме поперечной разности температур существует еще и продольный градиент температуры, направленный вверх или вниз. Наличие продольного градиента температуры существенно влияет на структуру стационарного движения (см. [6,7]), причем это влияние качественно различно в случаях подогрева снизу или сверху. Влияние подогрева сверху на устойчивость конвективного движения рассматривалось в работах [8,9], результаты которых ниже подвергнуты критике. Влияние же подогрева снизу на устойчивость движения, насколько нам известно, ранее вообще не рассматривалось.

В данной работе решение краевой задачи для амплитуд нормальных возмущений стационарного движения проведено с помощью методов Рунге — Кутты и Бубнова — Галеркина. Из полученных результатов, в частности, следует, что подогрев снизу оказывает, в общем, дестабилизирующее действие. В этом случае тесно переплетены два механизма неустойчивости — гидродинамическая неустойчивость встречных конвективных потоков и конвективная неустойчивость подогреваемой снизу жидкости. Гидродинамическая неустойчивость связана с монотонно растущими возмущениями. Конвективная же неустойчивость в зависимости от значений определяющих параметров может вызываться как монотонными, так и колебательными возмущениями. При подогреве сверху устойчивость повышается, и при достижении некоторого предельного значения продольного градиента температуры наступает полная стабилизация.

1. Стационарное движение. Рассмотрим конвективное движение жидкости в плоском слое между бесконечными вертикальными параллельными плоскостями $x = \pm h$. Температуры на плоскостях заданы и меняются с высотой вдоль каждой из плоскостей по линейному закону с градиентом A

$$T = -Az \pm \Theta \quad \text{при } x = \mp h \quad (1.1)$$

Здесь z — вертикальная координата, 2Θ — постоянная по высоте разность температур между плоскостями.

Уравнения конвекции в обычных обозначениях имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + g\beta T \gamma \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla T = \chi \Delta T, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (1.3)$$

Получим стационарное решение уравнений (1.2), (1.3), описывающее плоскопараллельное конвективное движение следующей структуры:

$$v_x = v_y = 0, \quad v_z = v_0(x), \quad T_0 = -Az + \tau_0(x), \quad p_0 = p_0(z) \quad (1.4)$$

Из формул (1.2), (1.3) получаем систему уравнений для определения v_0 , τ_0 и p_0

$$\nu v_0'' + g\beta\tau_0 = \frac{1}{\rho} \frac{dp_0}{dz} + g\beta Az = C, \quad \chi\tau_0'' + Av_0 = 0 \quad (1.5)$$

Здесь C — постоянная разделения переменных. Функции v_0 и τ_0 удовлетворяют условиям

$$v_0(\pm h) = 0, \quad \tau_0(\pm h) = \mp \Theta, \quad \int_{-h}^h v_0 dx = 0 \quad (1.6)$$

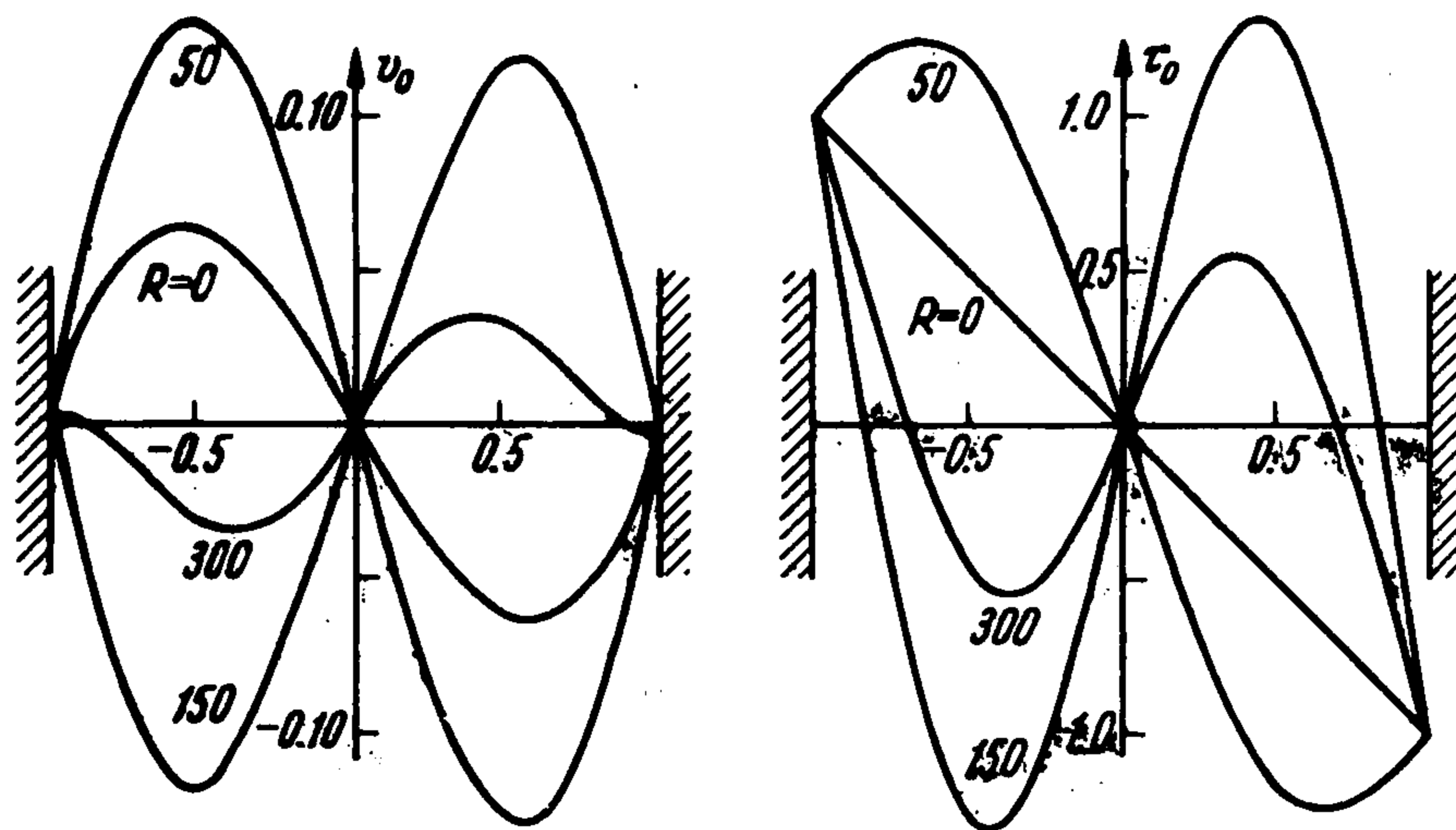
(последнее условие означает замкнутость конвективного потока).

Перепишем (1.5), (1.6) в безразмерной форме, приняв в качестве единиц расстояния, скорости, температуры и давления соответственно h , $g\beta\Theta h^2 / \nu$, Θ , $\rho g\beta\Theta h$. Тогда получим уравнения и граничные условия для безразмерных v_0 , τ_0 и p_0 (из нечетности профилей v_0 и τ_0 следует $C = 0$)

$$v_0'' + \tau_0 = 0, \quad \tau_0'' + Rv_0 = 0, \quad \frac{dp_0}{dz} = -\frac{Ah}{\Theta} z \quad (1.7)$$

$$v_0(\pm 1) = 0, \quad \tau_0(\pm 1) = \mp 1, \quad \int_{-1}^1 v_0 dx = 0 \quad \left(R = \frac{g\beta Ah^4}{\nu\chi} \right)$$

Здесь R — число Рэлея, определенное через продольный градиент температуры.



Фиг. 1

При подогреве снизу ($A > 0$, т. е. $R > 0$) из (1.7) находим распределения скорости и температуры по сечению канала

$$v_0 = \frac{1}{2\gamma^2} \left(\frac{\text{sh } \gamma x}{\text{sh } \gamma} - \frac{\sin \gamma x}{\sin \gamma} \right), \quad \tau_0 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\text{sh } \gamma x}{\text{sh } \gamma} + \frac{\sin \gamma x}{\sin \gamma} \right) \quad (1.8)$$

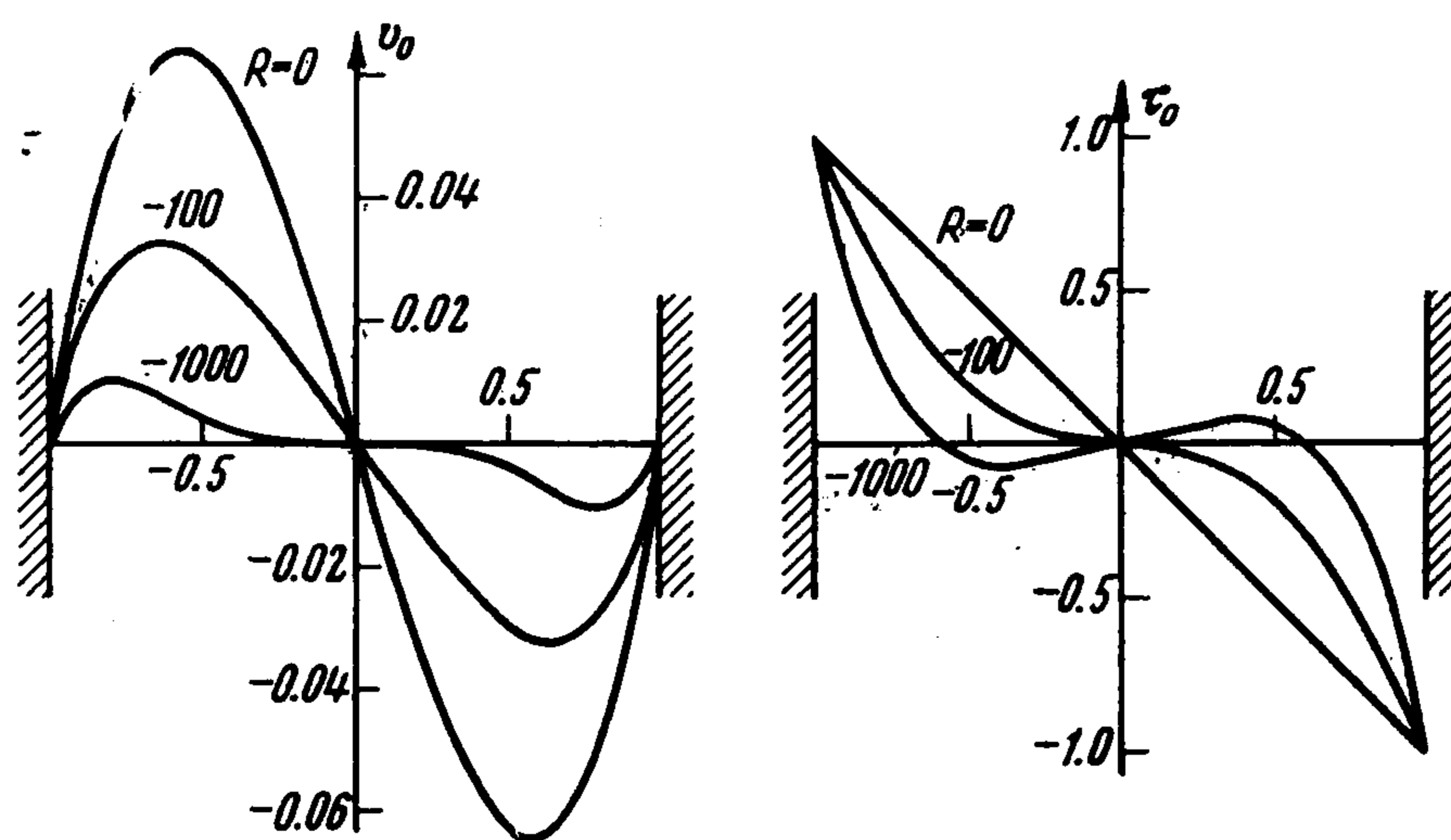
$(\gamma \equiv R^{1/4})$

С изменением параметра R профили v_0 и τ_0 деформируются сложным образом (фиг. 1). При $R = 0$ (продольный градиент отсутствует; имеется

лишь поперечная разность температур) из (1.8) получается кубический профиль скорости и линейный профиль температуры

$$v_0 = 1/6 (x^3 - x), \quad \tau_0 = -x \quad (1.9)$$

С ростом R в интервале $0 < R < \pi^4$ интенсивность движения возрастает, и при $\gamma \rightarrow \pi$ ($R \rightarrow \pi^4$) скорость становится бесконечной. При переходе через значение $R = \pi^4$ происходит «инверсия» стационарных профилей.



Фиг. 2

Далее при увеличении R появляются новые узлы в распределении скорости, а в точках $R = (2\pi)^4, (3\pi)^4, \dots$ скорость обращается в бесконечность. Эти значения как раз совпадают с критическими значениями числа Рэлея, соответствующими кризису равновесия жидкости в неподвижном вертикальном слое, подогреваемом снизу. Заранее очевидно, что в окрестностях этих критических точек стационарное течение гидродинамически неустойчиво.

При подогреве сверху ($R < 0$) решение задачи (1.7) удобно записать в виде

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{1}{2\mu^2 D} \left(\frac{\operatorname{ch} \mu x \sin \mu x}{\operatorname{ch} \mu \sin \mu} - \frac{\operatorname{sh} \mu x \cos \mu x}{\operatorname{sh} \mu \cos \mu} \right) \\ \tau_0 &= -\frac{1}{D} \left(\frac{\operatorname{ch} \mu x \sin \mu x}{\operatorname{sh} \mu \cos \mu} + \frac{\operatorname{sh} \mu x \cos \mu x}{\operatorname{ch} \mu \sin \mu} \right) \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$(D \equiv \operatorname{th} \mu \operatorname{ctg} \mu + \operatorname{cth} \mu \operatorname{tg} \mu, \quad \mu^4 \equiv -1/4 R)$$

С увеличением $|R|$ течение заметно замедляется, особенно в центральной части слоя (фиг. 2). При достаточно больших $|R|$ у границ слоя образуются пограничные слои, а в центральной части появляются слабые возвратные течения.

2. Уравнения возмущений. Методы решения. Для исследования устойчивости стационарного движения рассмотрим возмущенные поля скорости, температуры и давления $v_0 + v, T_0 + T, p_0 + p$, где v, T, p — малые возмущения. Запишем уравнения возмущений в безразмерном

виде, используя уже определенные выше единицы измерения длины, скорости, температуры и давления, а также вводя единицу времени h^2/ν . Линеаризуя по возмущениям, из (1.2), (1.3) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + G [(\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}_0] &= -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + T \boldsymbol{\gamma} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + G [\mathbf{v}_0 \nabla T + \mathbf{v} \nabla \tau_0] - \frac{R}{P} (\mathbf{v} \boldsymbol{\gamma}) &= \frac{1}{P} \Delta T \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \left(G = \frac{g\beta\theta h^3}{\nu^2}, \quad P = \frac{\nu}{\chi} \right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь G — число Грассхофа, определенное через поперечную разность температур, а P — число Прандтля.

Ограничимся рассмотрением плоских нормальных возмущений

$$\begin{aligned} v_x &= -\partial\psi / \partial z, \quad v_y = 0, \quad v_z = \partial\psi / \partial x \\ \psi(x, z, t) &= \varphi(x) e^{-\lambda t + ikz}, \quad T(x, z, t) = \theta(x) e^{-\lambda t + ikz} \end{aligned} \quad (2.2)$$

где ψ — функция тока, φ и θ — амплитуды возмущений, k — вещественное волновое число, λ — декремент.

Подстановка (2.2) в (2.1) приводит к системе амплитудных уравнений

$$\begin{aligned} \Delta\Delta\varphi + ikG (v_0''\varphi - v_0\Delta\varphi) + \theta' &= -\lambda\Delta\varphi \\ \frac{1}{P} \Delta\theta + ikG (\tau_0'\varphi - v_0\theta) + \frac{R}{P} \varphi' &= -\lambda\theta \quad \left(\Delta \equiv \frac{d^2}{dx^2} - k^2 \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Из требования обращения в нуль возмущений скорости и температуры на границах слоя получаем систему граничных условий

$$\varphi = \varphi' = \theta = 0 \quad \text{при } x = \pm 1 \quad (2.4)$$

Однородная краевая задача (2.3), (2.4) определяет спектр характеристических возмущений и их декрементов. Декременты λ , вообще говоря, комплексные: $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$. Вещественная часть λ_r определяет скорость нарастания или затухания возмущений; мнимая часть λ_i связана с частотой осцилляций и фазовой скоростью возмущений. Обе части декремента λ_r и λ_i зависят от всех параметров, входящих в краевую задачу: чисел Грассхофа G , Рэлея R , Прандтля P , а также от волнового числа k . Граница устойчивости стационарного движения находится из условия $\lambda_r = 0$; этим условием определяются те значения параметров, при которых возмущения нейтральны.

Рассматриваемые течения (1.8), (1.10) обладают свойством нечетности; поэтому в спектре их возмущений важную роль играют «стоячие» возмущения, фазовая скорость которых равна нулю: $\lambda_i = 0$. Декременты λ при этом вещественны, и граница устойчивости относительно таких возмущений находится из условия $\lambda = 0$. Полагая в (2.3) $\lambda = 0$, получим краевую задачу, из которой определяются нейтральные стоячие возмущения и соответствующие критические числа Грассхофа (или Рэлея).

Из общей краевой задачи (2.3), (2.4) при $R = 0$ получается частный случай, соответствующий конвективному течению без продольного градиента температуры. Спектр декрементов и устойчивость такого течения изучены в работах [1-5]. Другой предельный случай получается при $G = 0$ (отсутствует поперечная разность температур). В этом случае краевая задача дает спектр характеристических возмущений равновесия в плоском вертикальном слое жидкости, подогреваемом снизу ($R > 0$) или сверху ($R < 0$). При $R < 0$, как известно, равновесие устойчиво, а при $R > 0$ устойчивость теряется при критических значениях числа Рэлея $R(k)$. Эти критические значения приведены в [10].

Рассматриваемый в данной работе общий случай позволяет, таким образом, выяснить влияние продольного градиента температуры на устойчивость конвективного движения, а также влияние поперечной разности температур на конвективную устойчивость.

Для определения спектров декрементов и границ устойчивости применялись методы Рунге — Кутты и Бубнова — Галеркина. Первый из этих методов использовался преимущественно для нахождения границ устойчивости относительно монотонных возмущений; второй же метод применялся для нахождения спектров декрементов и границ колебательной неустойчивости.

В методе Рунге — Кутты амплитудные уравнения записывались в виде системы 12 обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$dy / dx = f(x, y) \quad (2.5)$$

где компоненты вектора y вещественны и связаны с амплитудами φ и θ соотношениями

$$\begin{aligned} \varphi = y_1 + iy_2, \quad \varphi' = y_3 + iy_4, \quad \varphi'' = y_5 + iy_6, \quad \varphi''' = y_7 + iy_8 \\ \theta = y_9 + iy_{10}, \quad \theta' = y_{11} + iy_{12} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Правые части системы (2.5) определяются из (2.3). Граничные условия следуют из (2.4)

$$y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = y_9 = y_{10} = 0 \quad \text{при } x = \pm 1 \quad (2.7)$$

Общее решение системы строилось в виде линейной комбинации шести независимых решений, удовлетворяющих условиям четности при $x = 0$. Требование существования нетривиального решения системы (2.5), удовлетворяющего также и условиям на границе $x = 1$, приводит к характеристическому условию, которое определяет границу устойчивости. Программа численного решения задачи на ЭВМ предусматривала (в зависимости от заданной точности) автоматический выбор шага интегрирования.

В методе Бубнова — Галеркина амплитуды возмущений функции тока и температуры представлялись в виде разложений по системам базисных функций, являющихся собственными функциями краевых задач (амплитуды возмущений в покоящейся жидкости)

$$\begin{aligned} \Delta \Delta \varphi_i = -\mu_i \Delta \varphi_i, \quad \varphi_i(\pm 1) = \varphi_i'(\pm 1) = 0 \\ P^{-1} \Delta \theta_i = -\nu_i \theta_i, \quad \theta_i(\pm 1) = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

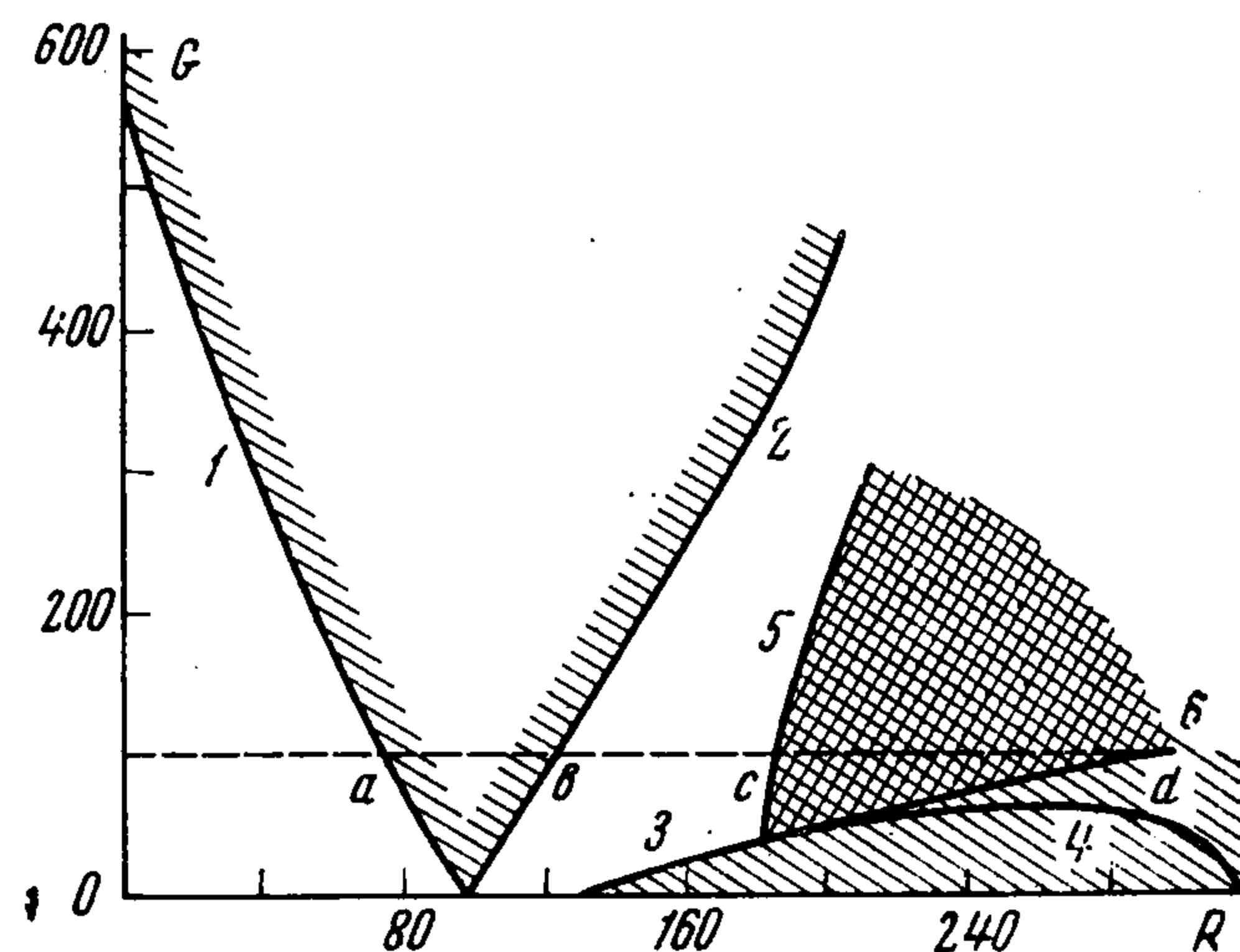
Методика расчетов спектров декрементов и критических чисел описана ранее [3,4]; отличие состояло лишь в том, что матричные элементы находились путем численного интегрирования. Границы устойчивости, как правило, связаны с нижними модами спектра возмущений, поэтому оказалось достаточным ограничиться в расчетах восемью базисными функциями.

В ряде случаев (границы монотонной неустойчивости) имелась возможность сопоставить результаты вычислений, проведенных методами Рунге — Кутты и Бубнова — Галеркина. В области значений параметров, для которой были проведены вычисления, результаты практически совпадали.

3. Случай $R > 0$. Гидродинамическая и конвективная неустойчивость. Перейдем к обсуждению полученных результатов. Рассмотрим сначала случай, когда наряду с поперечной разностью температур имеется продольный градиент температуры, направленный вниз (подогрев снизу). В этом случае ожидается наличие двух видов неустойчивости стационарного состояния — гидродинамической и конвективной.

Поскольку число параметров, определяющих решение, велико, целесообразно начать с рассмотрения границ устойчивости на плоскости G, R при фиксированных значениях числа Прандтля и волнового числа. Диаграмма устойчивости для $P = 1$ и $k = 1$ представлена на фиг. 3.

При $R = 0$ (отсутствует продольный градиент) течение становится неустойчивым при критическом числе $G = 575$. При увеличении R скорость конвективного течения увеличивается (см. п. 1), и вследствие этого гидродинамическая устойчивость встреч-



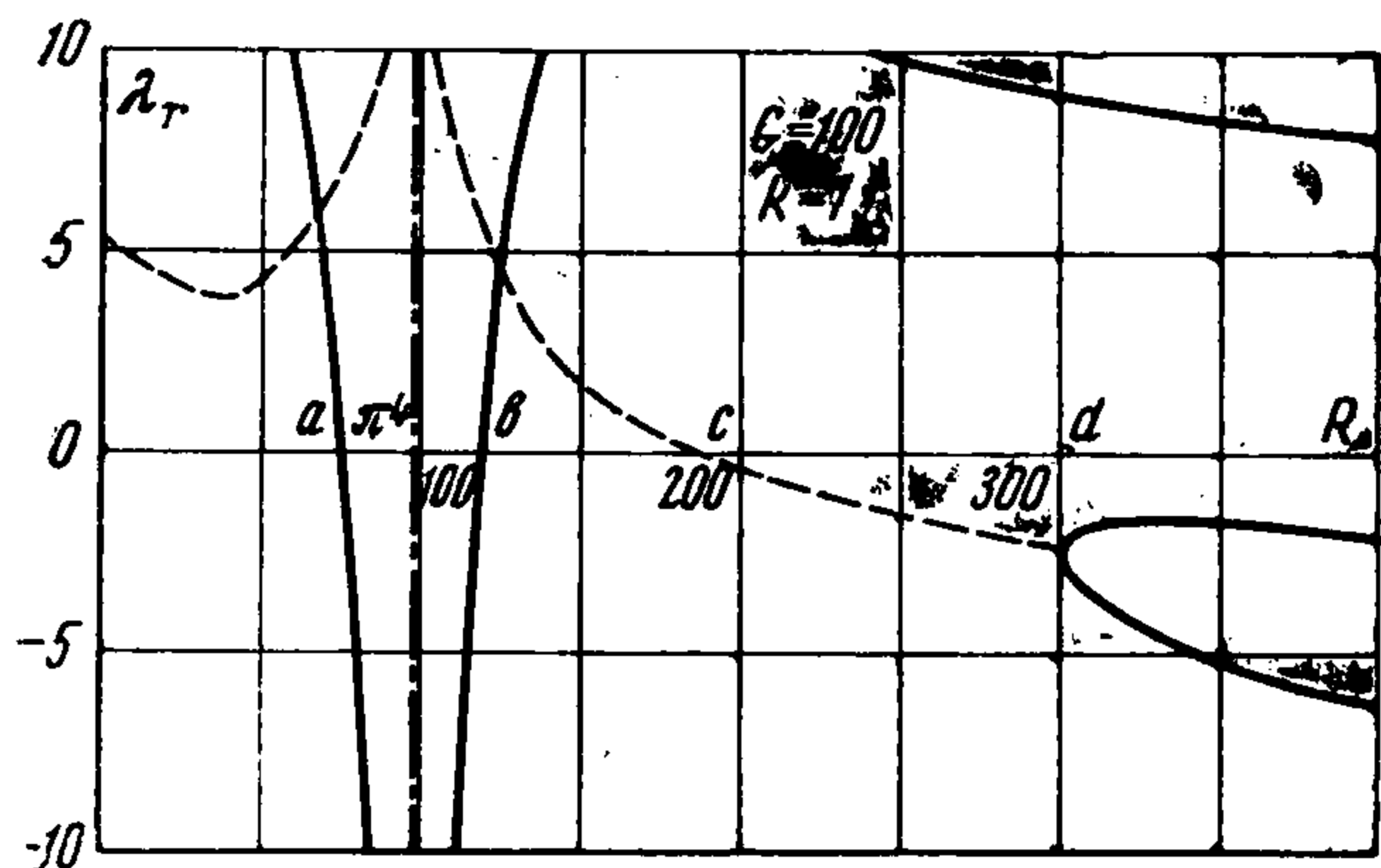
Фиг. 3

ных конвективных потоков понижается — критическое число Грассхофа уменьшается (линия 1). При $R \rightarrow \pi^4$ скорость стационарного движения стремится к бесконечности, и гидродинамическая неустойчивость наступает при сколь угодно малом G . При переходе через критическую точку $R = \pi^4$ наступает инверсия скорости, а интенсивность стационарного движения уменьшается. При этом, естественно, гидродинамическая устойчивость повышается (линия 2). Таким образом, линии 1 и 2 ограничивают на плоскости G, R полосу гидродинамической неустойчивости, ширина которой растет с увеличением G . Линии 1 и 2 будут нейтральными линиями для стоячих возмущений, фазовая скорость которых равна нулю. Поэтому в полосе гидродинамической неустойчивости возмущения нарастают монотонно.

Кроме описанной полосы гидродинамической неустойчивости имеются еще области конвективной неустойчивости, примыкающие к оси R . В самом деле, при $G = 0$ (при отсутствии поперечной разности температур) имеется спектр критических значений числа Рэлея (два нижних уровня для $k = 1$ равны $R = 132$ и $R = 319$ — точки пересечения линий 3 и 4 с осью R). При увеличении G критические числа Рэлея изменяются (линии 3 и 4), и происходит характерное «замыкание» нейтральных линий монотонных возмущений. Аналогичное замыкание уровней конвективной неустойчивости при увеличении скорости течения уже было описано авторами ранее [5], где исследовалась устойчивость конвективного течения в наклонном слое. Как и в [5], замыкание уровней монотонной конвективной неустойчивости сопровождается появлением области колебательной неустойчивости. На фиг. 3 эта область расположена между линиями 5 и 6 и отмечена двойной штриховкой (простая штриховка отмечает области монотонной неустойчивости). Линия 5 есть нейтральная для колебательных возмущений, а линия 6 отделяет области колебательной и монотонной неустойчивости.

Характерные линии на диаграмме устойчивости (фиг. 3) получены обработкой спектров декрементов. Один из таких спектров, соответствующий разрезу $G = 100$,

приведен на фиг. 4. Сплошные линии изображают вещественные декременты, пунктир — общая вещественная часть пары комплексно-сопряженных декрементов. На спектре и диаграмме отмечены характерные точки; a и b — начало и конец полосы монотонной гидродинамической неустойчивости (при $R \rightarrow \pi^4$ вещественный декремент $\lambda \rightarrow -\infty$ в критической точке возмущения нарастает с бесконечно большой скоростью); c — нейтральная точка колебательных возмущений; d — граница области существования колебательных возмущений.



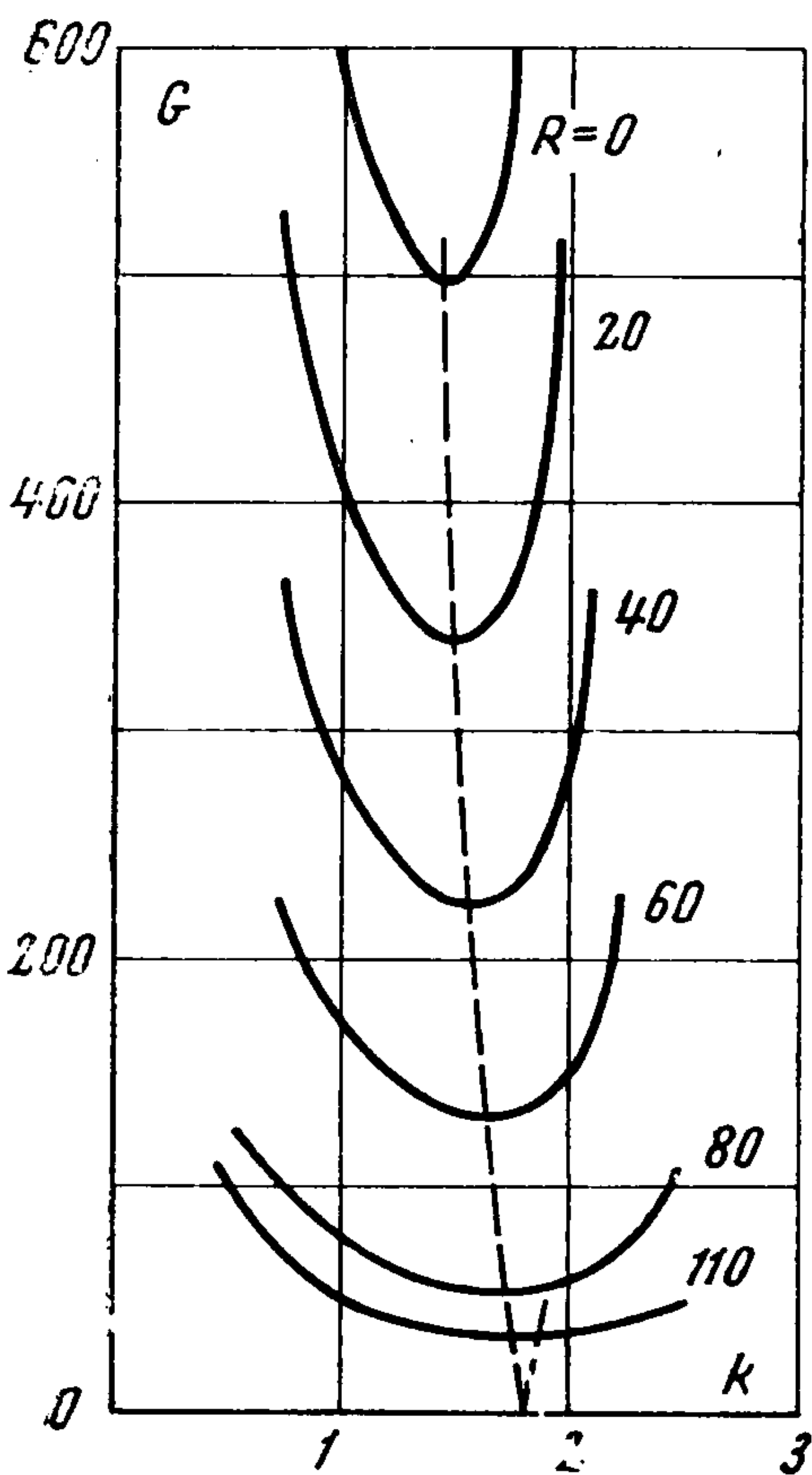
Фиг. 4

Приведенная на фиг. 3 диаграмма устойчивости относится к фиксированному значению волнового числа $k=1$. Качественно вид диаграммы сохраняется и для других значений k , а именно при всех k имеется клиновидная область монотонной гидродинамической неустойчивости (в точке $R=\pi^4$ критические числа Грассхофа для всех k обращаются в нуль, т. е. имеет место неустойчивость относительно всех нормальных возмущений) и примыкающая к оси R область конвективной неустойчивости.

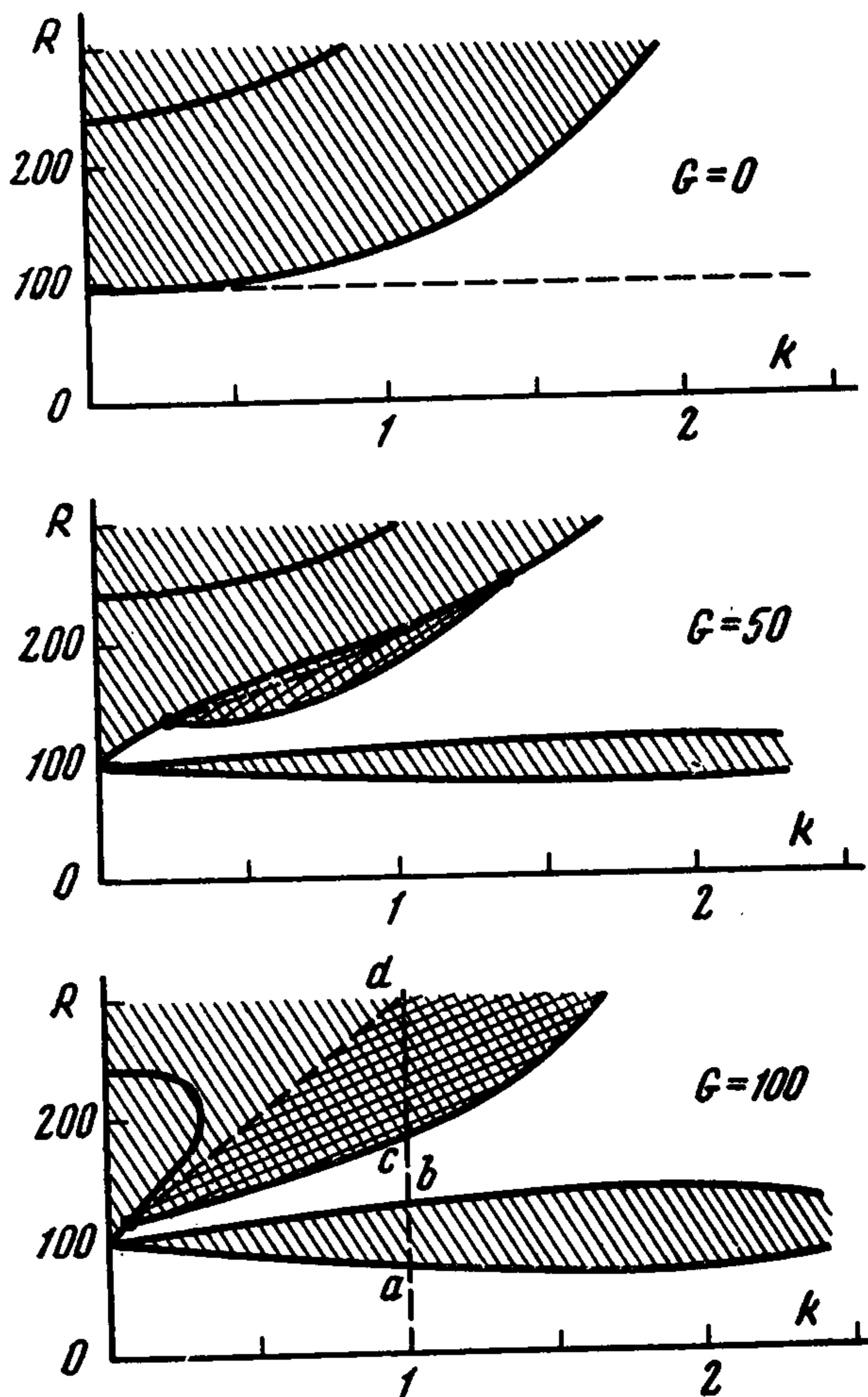
На фиг. 5 представлены нейтральные кривые $G(k)$ при $P=1$ для различных значений R . Как видно, минимальное критическое число Грассхофа G_m уменьшается с ростом R и стремится к нулю при $R \rightarrow \pi^4$. Длина волны наиболее опасных возмущений,

обращаются в нуль, т. е. имеет место неустойчивость относительно всех нормальных возмущений) и примыкающая к оси R область конвективной неустойчивости.

На фиг. 5 представлены нейтральные кривые $G(k)$ при $P=1$ для различных значений R . Как видно, минимальное критическое число Грассхофа G_m уменьшается с ростом R и стремится к нулю при $R \rightarrow \pi^4$. Длина волны наиболее опасных возмущений,



Фиг. 5



Фиг. 6

определяемая значением волнового числа k_m в точке минимума, при этом несколько уменьшается: критическое волновое число k_m при увеличении R в интервале от 0 до π^4 растет от 1.4 до 1.8. В области $R > \pi^4$ сохраняется гидродинамическая неустойчивость (ей соответствует линия 2 на фиг. 3, однако в этой области кризис течения определяется развитием конвективных возмущений).

Структура конвективных областей неустойчивости отчетливо видна на фиг. 6, где изображены нейтральные линии на плоскости R, k для разных G ($P=1$).

При $G = 0$ (равновесие подогреваемого снизу вертикального слоя) критические числа Рэлея, определяющие порог конвекции, монотонно растут с увеличением k . Минимальное число Рэлея для всех уровней неустойчивости (на фигуре показаны два нижних уровня) соответствует плоскопараллельным конвективным возмущениям с $k = 0$. При включении поперечной разности температур появляется узкая резонансная полоса гидродинамической неустойчивости вблизи линии $R = \pi^4$ (ширина этой полосы растет с увеличением G), и, кроме того, изменяется структура области конвективной неустойчивости. В частности, при некотором G появляется зона растущих колебательных возмущений (обозначена двойной штриховкой). При достаточно больших G наступает замыкание нейтральных линий монотонных возмущений, а нижняя граница конвективной неустойчивости в широкой области значений k определяется нейтральной линией колебательных возмущений.

В интервале изменения числа Рэлея $0 < R < \pi^4$, как уже говорилось, кризис течения имеет гидродинамическую природу и связан с неустойчивостью встречных конвективных потоков. Это обстоятельство, в частности, находит свое выражение в том, что, как показывают расчеты, граница устойчивости слабо зависит от числа Прандтля. При $R = 0$, как было показано в [4], критическое число G_m во всем интервале P изменяется не более чем на 6%, а при $R \rightarrow \pi^4$ критическое число $G_m \rightarrow 0$ при всех P . Численные значения $G_m(R)$ для $P = 0.2, 1, 5$ приведены в таблице.

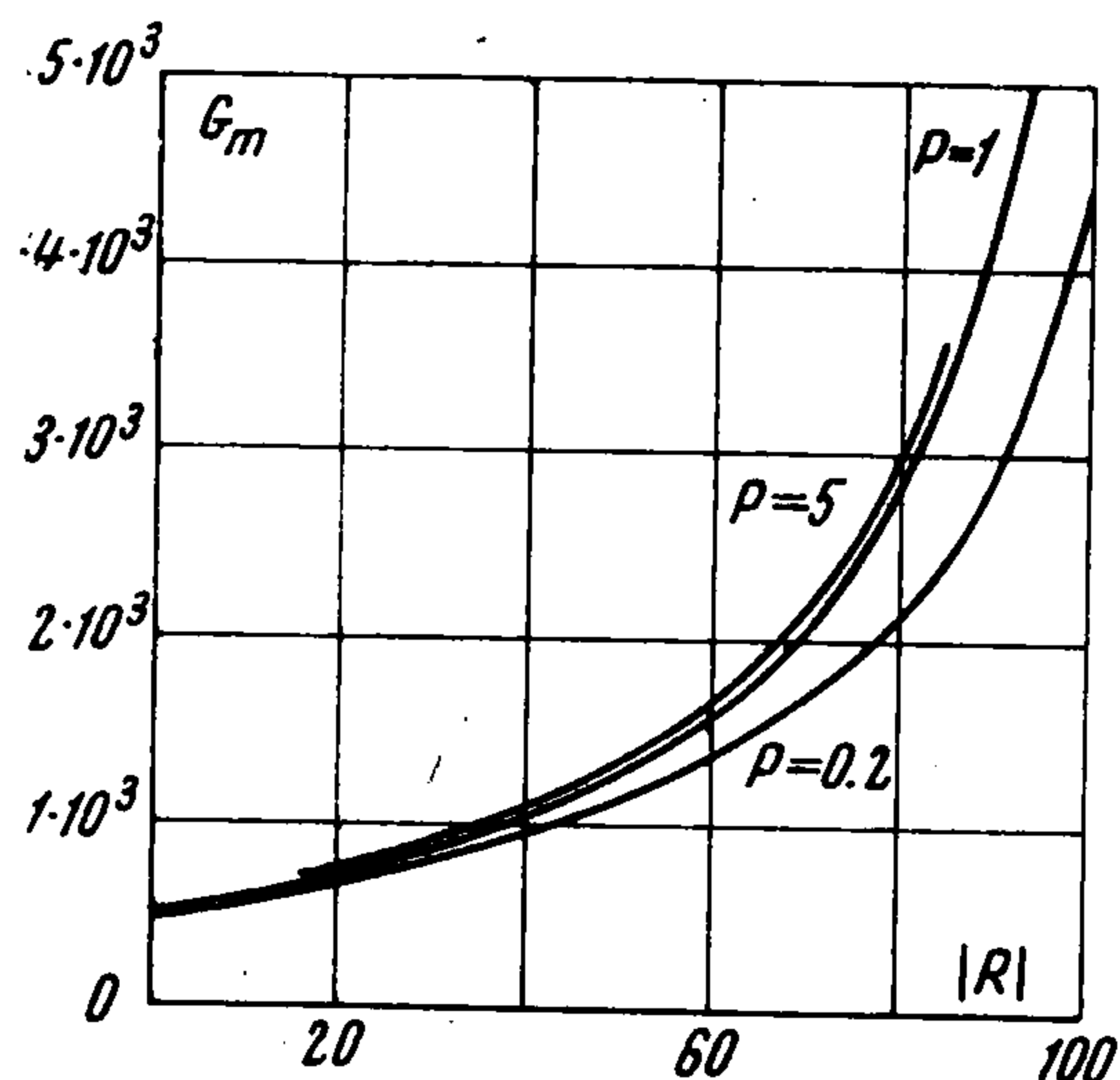
| R | $P = 0.2$ | $P = 1$ | $P = 5$ |
|-----|-----------|---------|---------|
| 0 | 470 | 497 | 490 |
| 10 | 392 | 412 | 402 |
| 20 | 325 | 341 | 326 |
| 30 | 264 | 279 | 266 |
| 40 | 211 | 223 | 211 |
| 50 | 164 | 174 | 162 |
| 60 | 121 | 130 | 119 |
| 70 | 83.8 | 91 | 82.0 |
| 80 | 50.0 | 55.2 | 48.9 |
| 90 | 20.0 | 22.6 | |

В области $R > \pi^4$, очевидно, минимальное критическое число Грассхофа $G_m = 0$ для всех P . В самом деле, при любом $R > \pi^4$ всегда найдется возмущение с таким волновым числом k , для которого критическое число Грассхофа равно нулю. Так, для $R = 132$ таким возмущением служит возмущение с $k = 1$ (фиг. 3, пересечение линии 3 с осью R). Для других значений R соответствующие k легко находятся: они определяются точками нейтральной кривой основного уровня конвективной неустойчивости $R(k)$ (фиг. 6, $G = 0$).

4. Случай $R < 0$. Стабилизация стационарного движения. Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда продольный градиент температуры направлен вверх (подогрев сверху). Создаваемая таким подогревом стратификация плотности по вертикали устойчива, и потому конвективный механизм неустойчивости в данном случае не действует. Кризис стационарного движения может вызываться лишь гидродинамической неустойчивостью течения, возникающего благодаря наличию поперечной разности температур.

При достаточно больших значениях продольного градиента температуры, как видно из формул (1.10) и фиг. 2, течение замедляется, и в центральной части слоя образуется застойная зона, которая разделяет восходящий и нисходящий потоки. За счет этого происходит ослабление взаимодействия встречных конвективных потоков. К тому же, с увеличением продольного градиента уменьшаются максимальная скорость v_m и толщина пограничного слоя δ : $v_m \sim g\beta\Theta h^2/\nu\mu^2$, $\delta \sim h/\mu$. Поэтому эффективное число Рейнольдса при больших $|R|$ убывает с ростом $|R|$ по закону $Re_{эф} \sim G/|R|^{3/4}$. Эти факторы приводят к стабилизации конвективного течения с увеличением $|R|$.

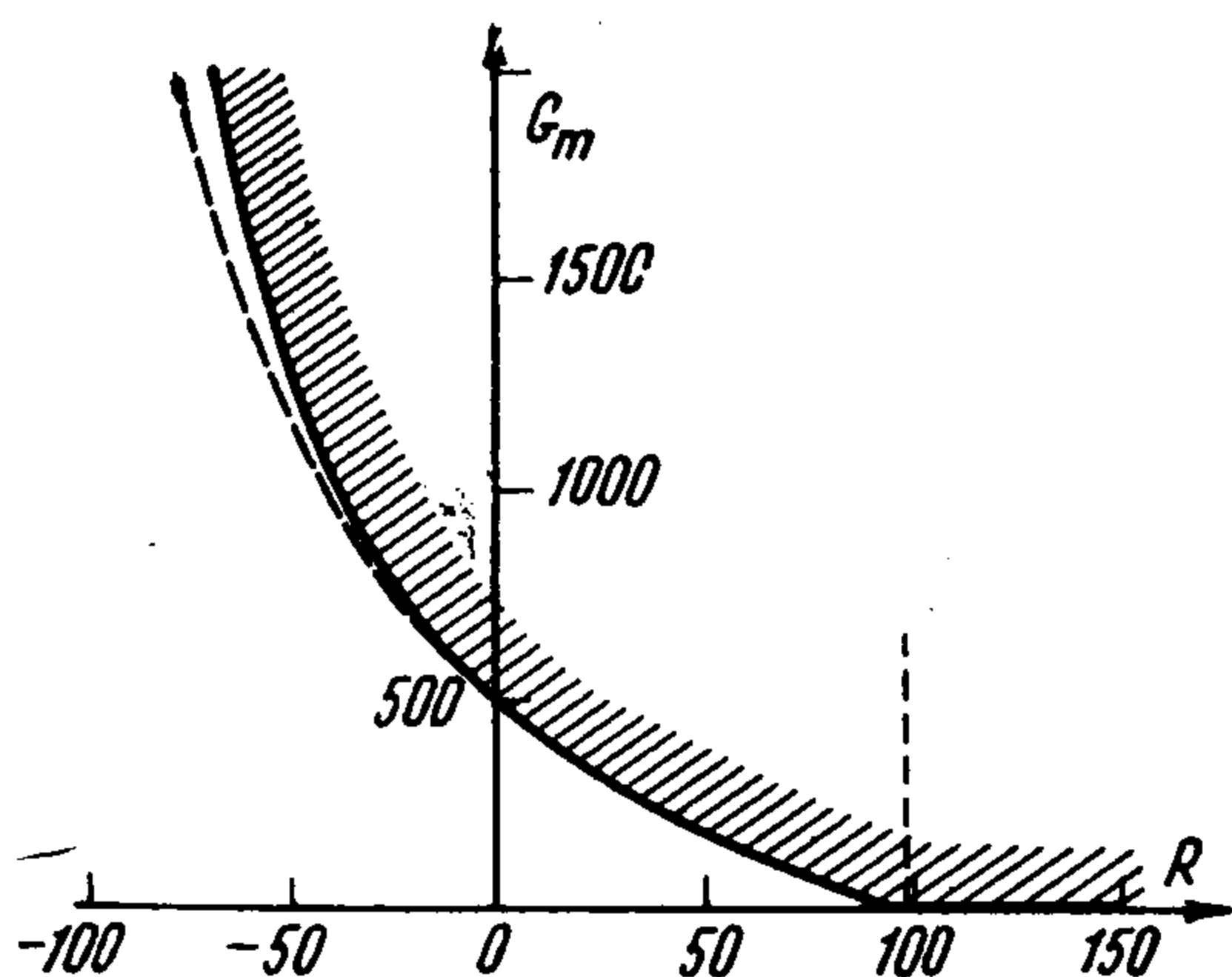
Нейтральные кривые $G(k)$ при $R < 0$ вполне подобны изображенным на фиг. 5. Они имеют минимум при некотором k_m и правую асимптоту, ограничивающую область опасных возмущений со стороны коротких волн.



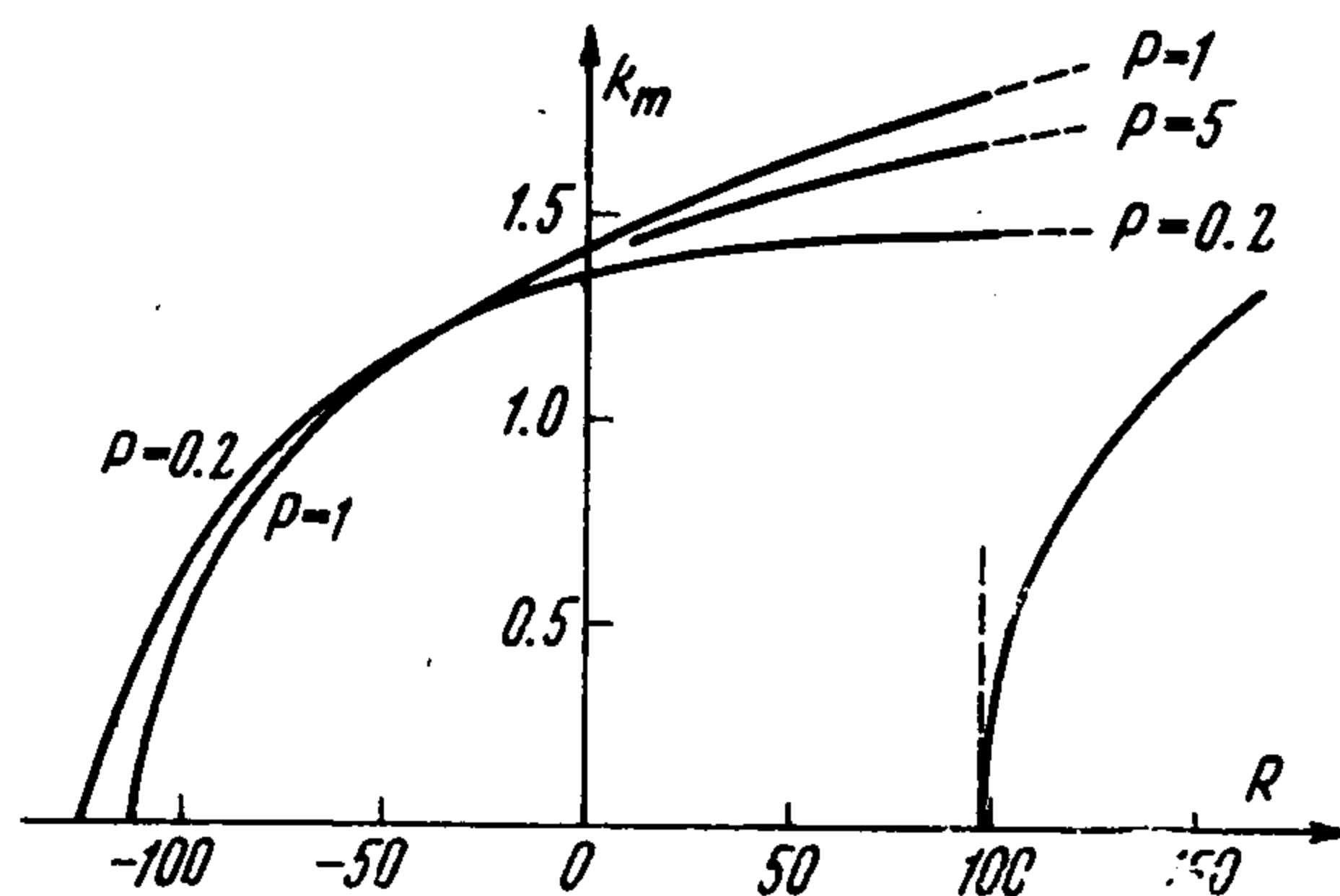
Фиг. 7

С увеличением $|R|$ минимальное значение G_m быстро возрастает (фиг. 7) и стремится к бесконечности при достижении числом Рэлея некоторого предельного значения $|R| = R_\infty$. Для $P = 1$ и $P = 0.2$ предельные значения соответственно равны $R_\infty = 112$ и $R_\infty = 125$. При $|R| > R_\infty$ течение устойчиво для всех значений числа Грассхофа по отношению к нормальным возмущениям произвольной длины волны. Длина волны наиболее опасных возмущений растет с увеличением $|R|$. При $|R| \rightarrow R_\infty$ волновое число k_m монотонно уменьшаясь, стремится к нулю.

На фиг. 8 и 9 представлены зависимости от R минимального значения числа Грассхофа $G_m(R)$ и критического волнового числа $k_m(R)$ (на фиг. 8 сплошная линия и пунктир соответствуют $P = 1$ и $P = 0.2$). Следует подчеркнуть, что хотя в случае подогрева снизу ($R > 0$) при определенных значениях параметров возможна колебательная неустойчивость, нижняя



Фиг. 8



Фиг. 9

граница области неустойчивости, определяемая минимизацией по k , связана с монотонными возмущениями. Таким образом, согласно результатам проведенного расчета, при всех R кризис стационарного движения должен приводить к возникновению стационарных вторичных движений (для $R = 0$ такие вторичные движения численно исследованы в [11])¹.

Случай подогрева сверху ($R < 0$) представляет особый интерес в связи с проблемой устойчивости конвективного движения в вертикальной

¹ Не исключено, впрочем, что при подогреве сверху в области стабилизации ($|R| > R_\infty$) и при весьма высоких значениях числа Грассхофа возможна неустойчивость восходящего и нисходящего пограничных потоков относительно мелкоструктурных возмущений типа волн Толмина — Шлихтинга.

щели конечной высоты. Конвективное течение, обусловленное поперечной разностью температур, сопровождается продольным конвективным потоком тепла вверх. Если канал закрыт сверху и снизу пробками конечной теплопроводности, то происходит накопление тепла сверху, и вследствие этого автоматически устанавливается продольный (направленный вверх) градиент температуры. Этот градиент определяется значением поперечной разности температур, отношением высоты щели к ширине, а также, вообще говоря, условиями теплоотдачи на концах (некоторые оценочные и экспериментальные результаты относительно продольного градиента можно найти в [12, 13]). Таким образом, профили скорости и температуры (1.10) моделируют конвективное течение в вертикальном слое конечной высоты (разумеется, лишь в удаленной от концов части), а результаты п. 4 позволяют, в частности, делать заключения об устойчивости такого течения.

Как уже указывалось, рассмотрению устойчивости конвективного движения при подогреве сверху посвящены работы [8, 9]. В работе [8], впервые содержавшей постановку этой задачи, для решения амплитудных уравнений применялся метод Бубнова — Галеркина с простейшими аппроксимациями (функция тока содержала одну, а температура — две базисных функции). В этом приближении получается вывод о неустойчивости относительно «бегущих» возмущений. Как было показано в [4], этот вывод ошибочный: он не подтверждается при рассмотрении более высоких приближений метода. В действительности неустойчивость вызывается стоячими возмущениями; приближение же, использованное в [8], их не дает.

В работе [9] также использовался метод Бубнова — Галеркина, с отличным от (2.6) базисом (разложения содержали до 16 базисных функций). В результате расчетов сделаны выводы о неустойчивости относительно стоячих возмущений и найдены критические числа для $P = 25$ и $P = 1000$. Однако амплитудная краевая задача содержит ошибку: в уравнении теплопроводности пропущен член, содержащий продольный градиент температуры (в принятых здесь обозначениях — член $(R/P) \varphi'$ в (2.3)). Это в сущности означает, что учитывается влияние продольного градиента температуры лишь на стационарное течение, но не на поведение возмущений. К численным результатам [9] следует относиться с осторожностью еще и потому, что при достаточно больших числах Прандтля ($P > 10$) нижняя часть спектра декрементов занята тепловыми уровнями (см. [4]), и, следовательно, для уверенного расчета границы устойчивости требуются более высокие приближения.

Поступила 22 VII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З. Об устойчивости плоского конвективного движения жидкости. Ж. техн. физ., 1953, т. 23, вып. 10.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О двух типах неустойчивости конвективного движения между параллельными вертикальными плоскостями. Изв. вузов, Физика, 1958, № 4.
3. Бирих Р. В. О малых возмущениях плоскопараллельного течения с кубическим профилем скорости. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.

4. Рудakov Р. Н. Спектр возмущений и устойчивость конвективного движения между вертикальными плоскостями. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
 5. Бирих Р. В., Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Рудakov Р. Н. Гидродинамическая и тепловая неустойчивость стационарного конвективного движения. ПММ, 1968, т. 32, вып. 2.
 6. Остроумов Г. А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. М.—Л., Гостехиздат, 1952.
 7. Ostrach S. On the flow, heat transfer, and stability of viscous fluids subject to body forces and heated from below in vertical channels. 50 Jahre Grenzschichtforsch., Berlin, Acad. Verl., 1956.
 8. Зайцев В. М., Сорокин М. П. К вопросу об устойчивости теплового конвективного движения жидкости в вертикальной щели. Уч. зап. Перм. ун-та, 1961, т. 19, № 3.
 9. Vest C. M., Agrasi V. S. Stability of natural convection in a vertical slot. J. Fluid Mech., 1969, vol. 36, p. 1.
 10. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Рудakov Р. Н. К теории релеевской неустойчивости. ПММ, 1967, т. 31, вып. 5.
 11. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Тарунин Е. Л. Вторичные стационарные конвективные движения в плоском вертикальном слое жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5.
 12. Batchelor G. K. Heat transfer by free convection across a closed cavity between vertical boundaries at different temperatures. Quart. Appl. Math., 1954, vol. 12, p. 3.
 13. Elder J. W. Laminar free convection in a vertical slot. J. Fluid Mech., 1965, vol. 23, p. 1.
-