**Прикладная математика и механика. Том 33, 1969**

# О ДВИЖЕНИИ И УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЬЮ, СОДЕРЖАЩЕЙ ЖИДКОСТЬ

**В. В. Румянцев**

(Москва)

Задача изучения движения и устойчивости упругого тела с полостями, содержащими жидкость, представляет определенный теоретический и прикладной интерес. Эта задача является развитием задачи о динамике твердого тела с жидкостью [1].

В работе из принципа наименьшего действия выводятся уравнения движения упругого тела с полостями, содержащими несжимаемую жидкость, и граничные условия. Указываются условия существования некоторых первых интегралов уравнений движения системы. Рассматриваются уравнения равновесий и стационарных движений и дается определение устойчивости таких движений.

Доказывается теорема, сводящая вопрос об устойчивости равновесия или стационарного движения к задаче минимума некоторого функционала.

**1.** Рассмотрим некоторое свободное упругое твердое тело, имеющее замкнутую полость, целиком или частично заполненную идеальной однородной несжимаемой жидкостью. С упругим телом в некотором его установившемся состоянии, например недеформированном состоянии, жестко свяжем прямоугольную декартову систему осей координат $Ox_1x_2x_3$, остающуюся неизменной. Области пространства $x_1x_2x_3$, занятые упругим телом и жидкостью в данный момент времени, обозначим соответственно через $\tau_1$ и $\tau_2$. Границу области $\tau_i$ обозначим через $S_i^*$.

Поверхность упругого тела $S_1^*$ состоит из внешней поверхности тела $S_1$ и поверхности стенок полости $\sigma$, т. е. $S_1^* = S_1 + \sigma$.

Поверхность жидкости $S_2^*$ состоит, вообще говоря, из ее свободной поверхности $S$ и части $\sigma_2$ поверхности $\sigma$ стенок полости, с которыми жидкость в данный момент времени соприкасается, т. е. $S_2^* = S + \sigma_2$.

Через $\sigma_1$ обозначим часть поверхности $\sigma$, с которой в данный момент времени жидкость не соприкасается, так что $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$.

Если жидкость целиком заполняет полость, то поверхность $S_2^*$ совпадает с поверхностью $\sigma$, т. е. в этом случае $S_2^* = \sigma = \sigma_2$, а поверхности $S$ и $\sigma_1$ отсутствуют. В дальнейшем теми же символами $S$, $\sigma_2$ будем обозначать площади соответствующих поверхностей. Плотности тела и жидкости обозначим через $\rho_1$ и $\rho_2$, причем в силу несжимаемости и однородности жидкости $\rho_2 = \text{const}$.

Если жидкость частично заполняет замкнутую полость, то будем считать, что остальная часть полости представляет собою вакуум с давлением $p_0 = 0$.

Упругое тело и жидкость в его полости будем рассматривать как одну механическую систему и изучать ее движение по отношению к некоторой инерциальной системе осей координат $O^*x_1^*x_2^*x_3^*$.

Вектор-радиус какой-либо точки $P_\nu$ системы относительно точки $O'$ равен

$$\mathbf{r}_\nu' = \mathbf{r}_0' + \mathbf{r}_\nu \tag{1.1}$$

где $\mathbf{r}'_0$ — вектор-радиус точки $O$, $\mathbf{r}_\nu$ — вектор-радиус точки $P_\nu$ относительно точки $O$.

По теореме о сложении скоростей вектор абсолютной скорости $\mathbf{v}_\nu$ точки $P_\nu$ можно представить в виде суммы

$$\mathbf{v}_\nu = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\nu + \mathbf{w}_\nu \tag{1.2}$$

где $\mathbf{v}_0$ — вектор скорости точки $O$, $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости подвижной системы координат $Ox_1x_2x_3$, $\mathbf{w}_\nu$ — вектор относительной скорости точки $P_\nu$.

По определению $\mathbf{w}_\nu = d\mathbf{r}_\nu/dt$, причем производная по времени $t$ берется в подвижной системе координат. Вектор перемещения точек упругого тела в результате упругой деформации обозначим через $\mathbf{u}_\nu(\mathbf{r}_\nu{}^\circ, t)$, где $\mathbf{r}_\nu{}^\circ$ — вектор-радиус точки $P_\nu$ тела в его недеформированном состоянии. Функцию $\mathbf{u}(\mathbf{r}^\circ, t)$ будем предполагать непрерывно-дифференцируемой функцией ее аргументов. Очевидно, вектор $\mathbf{u}_\nu$ представляет собой вектор относительного перемещения точки $P_\nu$ тела по отношению к подвижной системе координат $Ox_1x_2x_3$, так что для точек упругого тела

$$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu{}^0 + \mathbf{u}_\nu, \qquad d\mathbf{u}_\nu = \mathbf{w}_\nu\, dt \tag{1.3}$$

Кинетическая энергия системы слагается из кинетических энергий упругого тела и жидкости; она равна

$$E = {}^1/_2 \sum_\nu m_\nu v_\nu{}^2 = {}^1/_2 M\mathbf{v}_0^2 + M\mathbf{v}_0 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_c) + {}^1/_2\, \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega} +$$
$$+ \mathbf{v}_0 \cdot \Big( \int_{\tau_1} \rho_1 \mathbf{w}\, d\tau + \int_{\tau_2} \rho_2 \mathbf{w}\, d\tau \Big) + \boldsymbol{\omega} \cdot \Big( \int_{\tau_1} \rho_1 \mathbf{r} \times \mathbf{w}\, d\tau + \int_{\tau_2} \rho_2 \mathbf{r} \times \mathbf{w}\, d\tau \Big) +$$
$$+ {}^1/_2 \Big( \int_{\tau_1} \rho_1 \mathbf{w}^2\, d\tau + \int_{\tau_2} \rho_2 \mathbf{w}^2\, d\tau \Big) \tag{1.4}$$
$$M = M_1 + M_2, \qquad \mathbf{r}_c = M^{-1}(M_1\mathbf{r}_1 + M_2\mathbf{r}_2), \qquad \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^{(1)} + \boldsymbol{\theta}^{(2)}$$

Здесь $M$ — масса системы, равная сумме масс $M_1$ упругого тела и $M_2$ жидкости, $\mathbf{r}_c$ — вектор-радиус относительно точки $O$ центра масс системы, причем $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ — векторы-радиусы центров масс тела и жидкости, $\boldsymbol{\theta}^{(1)}$ и $\boldsymbol{\theta}^{(2)}$ — тензоры инерции тела и жидкости, $\boldsymbol{\theta}$ — тензор инерции системы для точки $O$, индекс $\nu$ означает суммирование по всем точкам системы.

Нетрудно видеть [1], что векторы количества движения и момента относительно точки $O$ количеств движения системы равны соответственно

$$\mathbf{Q} = \sum_\nu m_\nu \mathbf{v}_\nu = \operatorname{grad}_{\mathbf{v}_0} E, \qquad \mathbf{G} = \sum_\nu \mathbf{r}_\nu \times m_\nu \mathbf{v}_\nu = \operatorname{grad}_{\boldsymbol{\omega}} E \tag{1.5}$$

Уравнения движения упругого тела с жидкостью можно вывести из принципа наименьшего действия в форме Гамильтона — Остроградского, подобно выводу уравнений движения твердого тела с жидкостью [1]. Отличие будет состоять лишь в учете относительного движения точек упругого тела по отношению к системе координат $Ox_1x_2x_3$ и возникающих в нем внутренних напряжений, плотность которых на площадке с внешней (по отношению к рассматриваемой части упругого тела) нормалью $\mathbf{n}$ обозначим через $\mathbf{p}_n$. Как известно [2], вектор $\mathbf{p}_n$ линейно выражается через напряжения $\mathbf{p}_i (i = 1,2,3)$ на взятых в той же точке упругого тела площадках, ортогональных осям $x_i$

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_1 n_1 + \mathbf{p}_2 n_2 + \mathbf{p}_3 n_3 \tag{1.6}$$

где $n_i$ — косинусы углов, образуемых единичным вектором внешней нормали $\mathbf{n}$ с осями $x_i$. Проекции вектора $\mathbf{p}_i$ на оси $x_j$ будем обозначать через $p_{ij}$, причем $p_{ij} = p_{ji}$.

С точки зрения аналитической механики внутренние напряжения представляют собою реакции связей, существующих между точками упругого тела, при условии непрерывности поля смещений $\mathbf{u}(\mathbf{r}^\circ, t)$. Воспользовавшись принципом освобождаемости, включим напряжения в число активных сил, рассматривая при этом возможные перемещения $\delta\mathbf{r}$ точек упругого тела по отношению к системе координат $Ox_1x_2x_3$ как совершенно произвольные непрерывные функции координат $x_i$ точек тела. Сумма элементарных работ внутренних поверхностных сил напряжений на возможных перемещениях $\delta\mathbf{r}$, равная [2,3]

$$-\int_{\tau_1}\left(\mathbf{p}_1\cdot\frac{\partial\delta\mathbf{r}}{\partial x_1} + \mathbf{p}_2\cdot\frac{\partial\delta\mathbf{r}}{\partial x_2} + \mathbf{p}_3\cdot\frac{\partial\delta\mathbf{r}}{\partial x_3}\right)d\tau \tag{1.7}$$

должна быть включена при этом в работу активных сил, фигурирующих в выражении принципа Гамильтона — Остроградского.

Проводя надлежащие выкладки, аналогичные приведенным на стр. 31—35 работы [1], из принципа наименьшего действия получаем следующие уравнения движения упругого тела с жидкостью в его полости

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{Q} = \mathbf{K} \qquad \left(\mathbf{K} = \sum_\nu \mathbf{F}_\nu\right) \tag{1.8}$$

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{G} + \mathbf{v}_0\times\mathbf{Q} = \mathbf{L} \qquad \left(\mathbf{L} = \sum_\nu \mathbf{r}_\nu\times\mathbf{F}_\nu\right) \tag{1.9}$$

$$\rho_1\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}\right) = \rho_1\mathbf{F} + \frac{\partial\mathbf{p}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\mathbf{p}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\mathbf{p}_3}{\partial x_3} \tag{1.10}$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho_2}\operatorname{grad} p \tag{1.11}$$

и динамические граничные условия:

$$\begin{gathered}\mathbf{p}_n = \mathbf{F}_n \text{ на } S_1,\ \mathbf{p}_n = 0 \text{ на } \sigma_1 \\ \mathbf{p}_n = (p - 2H\alpha_1)\,\mathbf{n}^{(2)} \text{ на } \sigma_2 \\ p = 2H\alpha \text{ на } S,\ \cos\theta = -\alpha_1 / \alpha \text{ на } f\end{gathered} \tag{1.12}$$

Здесь $p$ — гидродинамическое давление, $\mathbf{K}$ и $\mathbf{L}$ — главный вектор и главный момент относительно точки $O$ всех приложенных к системе внешних активных сил, $\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}_n$ — плотности массовых и внешних поверхностных сил, действующих на упругое тело и жидкость, $\alpha$ и $\alpha_1$ — коэффициенты поверхностного натяжения на поверхностях жидкость — вакуум и жидкость — упругое тело, $2H$ — средняя кривизна поверхности жидкости $S_2'$, $\theta$ — краевой угол на линии $f$ пересечения свободной поверхности $S$ жидкости со стенками $\sigma$ полости, $\mathrm{n}^{(i)}$ — единичный вектор внешней нормали к границе $S_i'$ области $\tau_i$ ($i = 1,2$). Уравнения (1.8) и (1.9) выражают общие теоремы динамики о количестве движения и о моменте количеств движения системы, уравнения (1.10) — уравнения движения сплошной среды, принимающие для идеальной жидкости вид уравнений Эйлера (1.11). К этим уравнениям надлежит добавить уравнение несжимаемости жидкости

$$div\ \mathrm{w} = 0 \tag{1.13}$$

а также определенные кинематические условия [2] на границах областей $\tau_i$. Заметим, что уравнения (1.10) и (1.11) целесообразно в ряде случаев записывать в относительных скоростях $\mathrm{w}$, выражая абсолютные скорости $\mathrm{v}$ согласно формуле (1.2).

Полученная система уравнений движения (1.8) — (1.11), (1.13 представляет незамкнутую систему нелинейных уравнений. Для ее замыкания необходимо добавить соотношения, выражающие зависимости напряжений от деформаций, что связано с выбором определенной модели сплошной среды. Примем модель твердого деформируемого тела, рассматриваемого как материальный континуум, для которого процессы деформирования обратимы. Для получения замкнутой системы уравнений в этом случае достаточно, как известно [2], задания внешнего притока тепла $dq$ и внутренней энергии $U$ или свободной энергии $A = U - Ts$, отнесенных к единице массы тела. Далее будем предполагать, что плотности внутренней энергии $U$ или свободной энергии $A$ полностью определяются деформацией и энтропией $s$ или абсолютной температурой $T$, т. е. представляют собой следующие функции:

$$U = U(\varepsilon_{ij},\ s),\ A = A(\varepsilon_{ij},\ T) \tag{1.14}$$

где

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j^\circ} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i^\circ} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_i^\circ}\frac{\partial u_k}{\partial x_j^\circ}\right) \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{1.15}$$

обозначают компоненты тензора конечной деформации.

Компоненты тензора напряжений выражаются через деформации и энтропию или температуру следующими уравнениями состояния:

$$p_{ij} = \rho_1 \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} = \rho_1 \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} \tag{1.16}$$

причем энтропию $s$ или температуру $T$ необходимо определять при помощи термодинамических уравнений

$$T = \frac{\partial U}{\partial s} \quad \text{или} \quad s = -\frac{\partial A}{\partial T} \tag{1.17}$$

и уравнения притока внешнего тепла

$$dq = T\,ds \tag{1.18}$$

выражающего второе начало термодинамики.

Правую часть этого уравнения можно выразить с учетом уравнений (1.17) либо через $U$ и $s$, либо через $A$ и $T$. При адиабатических процессах $dq = ds = 0$, вследствие чего удобно пользоваться внутренней энергией $U$. Для изотермических процессов $T = \text{const}$, ввиду чего удобно пользоваться свободной энергией $A$; при этом уравнение (1.18) служит для определения притока тепла.

Кроме того, необходимо присоединить уравнение неразрывности упругого тела

$$\partial\rho_1/\partial t + div(\rho_1 \mathbf{w}) = 0 \tag{1.19}$$

служащее для определения плотности тела $\rho_1(x_1, x_2, x_3, t)$, а также дифференциальные уравнения для некоторых переменных параметров — в случаях, когда действующие на систему силы зависят от таковых [1].

Динамические уравнения (1.8)—(1.11), уравнения неразрывности (1.13) и (1.19), уравнения состояния (1.16) с учетом (1.15) и (1.17) и уравнение притока тепла (1.18) вместе с граничными условиями и уравнениями для параметров образуют полную замкнутую систему нелинейных уравнений движения упругого тела с полостью, содержащей жидкость.

Заметим, что эта система уравнений может служить исходной для получения различных приближенных уравнений, получаемых путем линеаризации.

2. Уравнения движения упругого тела с жидкостью при определенных условиях допускают некоторые первые интегралы, из которых рассмотрим здесь интегралы энергии и площадей.

Умножим скалярно уравнения (1.8) и (1.9) соответственно на $\mathbf{v}_0$ и $\boldsymbol{\omega}$, уравнения (1.10) и (1.11) соответственно на $\mathbf{w}d\tau$ и $\rho_2\mathbf{w}d\tau$, два последних результата проинтегрируем по областям $\tau_1$ и $\tau_2$, а затем сложим полученные уравнения.

Учитывая уравнения неразрывности, в результате будем иметь [1]

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{K}\cdot\mathbf{v}_0 + \mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\omega} + \int_{\tau_1}\left(\rho_1\mathbf{F} + \frac{\partial\mathbf{p}_1}{dx_1} + \frac{\partial\mathbf{p}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\mathbf{p}_3}{\partial x_3}\right)\cdot\mathbf{w}\,d\tau +$$
$$+ \rho_2\int_{\tau_2}\left(\mathbf{F} - \frac{1}{\rho_2}\operatorname{grad}p\right)\cdot\mathbf{w}\,d\tau \tag{2.1}$$

С учетом граничных условий и уравнений (1.13)—(1.18), (1.19) нетрудно получить

$$\int_{\tau_1}\left(\frac{\partial\mathbf{p}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\mathbf{p}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\mathbf{p}_3}{\partial x_3}\right)\cdot\mathbf{w}\,d\tau = \int_{S_1}\mathbf{F}_n\cdot\mathbf{w}\,ds - \frac{d}{dt}\int_{\tau_1}\rho_1 U\,d\tau +$$
$$+ \int_{\tau_1}\rho_1\frac{dq}{dt}\,d\tau + \int_{\sigma_2}(p - 2H\alpha_1)\,\mathbf{n}^{(2)}\cdot\mathbf{w}dS$$

$$\int_{\tau_2}\mathbf{w}\cdot\operatorname{grad}p\,d\tau = \int_{\sigma_2}p\mathbf{w}\cdot\mathbf{n}^{(2)}\,ds + \int_{S}2H\alpha\mathbf{w}\cdot\mathbf{n}dS$$

В силу этих соотношений уравнение (2.1) принимает вид

$$\frac{d}{dt}\left(E + \Pi_1 + \Pi_2\right) = \mathbf{K}\cdot\mathbf{v}_0 + \mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\omega} + \int_{\tau_1} \rho_1 \mathbf{F}\cdot\mathbf{w}\,d\tau +$$
$$+ \int_{\tau_2} \rho_2 \mathbf{F}\cdot\mathbf{w}\,d\tau + \int_{S_1} \mathbf{F}_n\cdot\mathbf{w}\,dS + \int_{\tau_1} \rho_1 \frac{dq}{dt}\,d\tau \tag{2.2}$$
$$\Pi_1 = \int_{\tau_1} \rho_1 U\,d\tau, \qquad \Pi_2 = \alpha S + \alpha_1 \sigma_2$$

Здесь $\Pi_1$ и $\Pi_2$ — потенциальные энергии деформации и сил поверхностного натяжения. Уравнение (2.2) выражает теорему о кинетической энергии системы или первый закон термодинамики.

Заметим, что в случае отсутствия в теле внутренних источников тепла полный приток тепла в единицу времени равен полному потоку тепла внутрь тела через его внешнюю поверхность, т. е.

$$\int_{\tau_1} \rho_1 \frac{dq}{dt}\,d\tau = -\int_{S_1} \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\,dS \tag{2.3}$$

где $\mathbf{q}$ означает вектор потока тепла.

Если все действующие на систему внешние силы будут потенциальными, обладающими стационарной силовой функцией, то

$$\mathbf{K}\cdot\mathbf{v}_0 + \mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\omega} + \int_{\tau_1} \rho_1 \mathbf{F}\cdot\mathbf{w}\,d\tau + \int_{\tau_2} \rho_2 \mathbf{F}\cdot\mathbf{w}\,d\tau + \int_{S_1} \mathbf{F}_n\cdot\mathbf{w}\,dS = -\frac{d\Pi}{dt} \tag{2.4}$$

В этом равенстве

$$\Pi = -\int_{\tau_1} \rho_1 U_1(q_j, x_i)\,d\tau - \int_{\tau_2} \rho_2 U_2(q_j, x_i)\,d\tau - \int_{S_1} U_3(q_j, x_i)\,dS \tag{2.5}$$

означает потенциальную энергию действующих на систе му внешних сил зависящую, в общем случае, от положения системы координат $Ox_1x_2x$- в пространстве $O'x_1'x_2'x_3'$, определяемого обобщенными координатами $q_j$ $(j = 1,\ldots, n)$ и от формы областей $\tau_1$ и $\tau_2$ и поверхности $S_1$ тела. Здесь $U_1(q_j, x_i)$ и $U_2(q_j, x_i)$ означают силовые функции сил, приложенных соответственно к частицам тела и жидкости, а $U_3(q_j, x_i)$—силовую функцию поверхностных сил, приложенных к точкам поверхности $S_1$ тела. При условиях (2.3) и (2.4) уравнение (2.2) принимает вид

$$\frac{d}{dt}(E + V) = -\int_{S_1} \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\,dS \qquad (V = \Pi + \Pi_1 + \Pi_2) \tag{2.6}$$

Здесь $V$ означает потенциальную энергию системы, равную сумме потенциальных энергий действующих на систему внешних сил, сил поверхностного натяжения и деформации.

Отметим, что уравнение вида (2.6) справедливо при указанных предположениях и для несвободного упругого тела, стесненного стационарными связями [1].

При условии, что суммарный поток тепла через поверхность тела равен нулю, т. е.

$$\int\limits_{S_1} \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\, dS = 0 \tag{2.7}$$

из уравнения (2.6) немедленно следует интеграл энергии

$$E + V = h = \mathrm{const} \tag{2.8}$$

Итак, если действующие на систему внешние силы потенциальны и выполняются условия (2.3) и (2.7), то сумма кинетической и потенциальной энергий системы остается постоянной во все время движения.

Допустим теперь, что действующие на свободное упругое тело с жидкостью внешние силы не дают момента относительно некоторой неподвижной оси $x_3'$. При этих условиях проекция момента количеств движения системы на эту ось остается постоянной. В самом деле, умножим уравнение (1.8) векторно слева на вектор $\mathbf{r}_0'$ и сложим с уравнением (1.9), в результате чего получим уравнение

$$d\mathbf{G}_0'/dt + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{G}_{0'} = \mathbf{L} + \mathbf{r}_0' \times \mathbf{K}, \quad \mathbf{G}_{0'} = \mathbf{G} + \mathbf{r}_0'\times\mathbf{Q} \tag{2.9}$$

выражающее теорему о моменте количеств движения для неподвижной точки $O'$. Умножим затем уравнение (2.9) скалярно на единичный вектор $\mathbf{i}_3'$ направления оси $x_3'$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{G}_{0'}\cdot\mathbf{i}_3') - \mathbf{G}_{0'}\cdot\left(\frac{d\mathbf{i}_3'}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{i}_3'\right) = 0 \tag{2.10}$$

Вектор $\mathbf{i}_3'$ удовлетворяет уравнению Пуассона [1]

$$d\mathbf{i}_3'/dt + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{i}_3' = 0$$

Отсюда немедленно получаем интеграл площадей

$$\mathbf{G}_{0'}\cdot\mathbf{i}_3' = \mathrm{const} \tag{2.11}$$

Этот интеграл имеет место и для несвободного упругого тела, если наложенные на него связи допускают вращение вокруг прямой $x_3'$.

3. В случаях, когда действующие на упругое тело и жидкость в его полости силы будут потенциальными и существует потенциальная энергия $V$ системы, положения равновесия системы можно найти, согласно принципу возможных перемещений, из условия

$$\delta V = \delta\Pi + \delta\Pi_1 + \delta\Pi_2 = \delta Q^* \qquad \left(\delta Q^* = \int\limits_{\tau_1} \rho_1 \delta q\, d\tau\right) \tag{3.1}$$

Здесь $\delta Q^*$ — полный приток тепла к упругому телу.

Будем предполагать, что упругое тело или свободно или стеснено некоторыми голономными связями, не зависящими явно от времени. Лагранжевы координаты системы отсчета $Ox_1x_2x_3$ обозначим через $q_j (j = 1, \ldots, n \leqslant 6)$. Потенциальная энергия $V$ системы есть функционал, зависящий как от координат $q_j$, так и от формы тела и жидкости, т. е. от областей $\tau_1$ и $\tau_2$ и их границ; очевидно, энергии деформации $\Pi_1$ и поверхностного натяжения $\Pi_2$ не зависят от $q_j$.

Запишем уравнение (3.1) в явном виде, вычитая из левой части член

$$\int_{\tau_2} p \operatorname{div} \delta\mathbf{r}\, d\tau = \int_{S+\sigma_2} p\mathbf{n}^{(2)}\cdot\delta\mathbf{r}\, dS - \int_{\tau_2} \operatorname{grad} p\cdot\delta\mathbf{r}\, d\tau = 0$$

В результате будем иметь

$$\delta V = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial q_j}\delta q_j - \int_{\tau_1}\left(\rho_1 \operatorname{grad} U_1 + \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbf{p}_3}{\partial x_3}\right)\cdot\delta\mathbf{r}\, d\tau -$$
$$- \int_{\tau_2} (\rho_2 \operatorname{grad} U_2 - \operatorname{grad} p)\cdot\delta\mathbf{r}\, d\tau - \int_{S_1} (\operatorname{grad} U_3 - \mathbf{p}_n)\cdot\delta\mathbf{r}\, dS -$$
$$- \int_{S} (p - 2H\alpha)\, \mathbf{n}^{(2)}\cdot\delta\mathbf{r}\, dS - \int_{\sigma_2} (p - 2H\alpha_1)\, \mathbf{n}\cdot\delta\mathbf{r}\, dS + \int_{\sigma_2} \mathbf{p}_n\cdot\delta\mathbf{r}\, dS +$$
$$+ \int_{\sigma_1} \mathbf{p}_n\cdot\delta\mathbf{r}\, dS + \int_{f} (\alpha\cos\theta + \alpha_1)\, \mathbf{n}\cdot\delta\mathbf{r}\, df + \int_{\tau_1} \rho_1 \frac{\partial U}{\partial s}\delta s\, d\tau = \delta Q^*$$

Из этого уравнения обычным путем можно получить уравнения равновесия системы

$$\partial V/\partial q_j = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

$$\rho_1 \operatorname{grad} U_1 + \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbf{p}_3}{\partial x_3} = 0 \qquad \operatorname{grad} U_2 - \frac{1}{\rho_2}\operatorname{grad} p = 0 \qquad (3.2)$$

и уравнение притока тепла

$$\delta q = T\delta s$$

вместе с граничными условиями (1.12). Из первой группы этих уравнений определяются координаты $q_j$ системы отсчета $Ox_1x_2x_3$ при равновесии, а другие группы уравнений служат для определения поля смещений упругого тела и давления в жидкости при равновесии.

Рассмотрим случай, когда тело свободно или стеснено стационарными связями, допускающими вращение всей системы как одного твердого тела вокруг некоторой неподвижной прямой $x'_3$, а действующие на систему силы, предполагаемые потенциальными, не дают момента относительно этой прямой. При этих условиях существует интеграл площадей вида (2.11)

$$G_{x_3'} = k = \text{const} \qquad (3.3$$

Введем в рассмотрение систему осей координат $O'\xi_1\xi_2x_3'$, вращающуюся вокруг оси $x_3'$ с некоторой угловой скоростью $\omega$. Величину $\omega$ условимся выбрать так, чтобы в любой момент времени равнялась нулю проекция на ось $x_3'$ момента количеств движения системы относительно системы координат $O'\xi_1\xi_2x_3'$. При этом условии полную энергию системы можно представить в виде

$$E + V = E^{(1)} + \frac{1}{2}\frac{k^2}{J} + V \qquad (3.4)$$

Здесь $E^{(1)}$ — кинетическая энергия системы в ее движении относительно осей координат $O'\xi_1\xi_2x_3'$, а $J$ — момент инерции системы относительно оси $x_3'$.

Среди действительных движений системы имеются, при сделанных предположениях о силах и связях, равномерные вращения всей системы как одного твердого тела вокруг оси $x_3'$, определяемые из уравнения

$$\delta W = \delta Q^*, \quad W = \frac{1}{2}\frac{k_0^2}{J} + V, \quad k_0 = J_0\omega_0 \tag{3.5}$$

Здесь $W$ означает измененную потенциальную энергию системы, $k_0$ — фиксированное значение постоянной $k$ интеграла площадей для равномерного вращения всей системы с угловой скоростью $\omega_0$.

Заметим, что $W$ представляет собой функционал, зависящий от формы областей $\tau_1$ и $\tau_2$ и их границ и от координат $q_r$ $(r = 1,\ldots, n-1)$ системы отсчета $Ox_1x_2x_3$, если условиться через $q_n$ обозначить угол поворота вокруг оси $x_3'$.

Из уравнения (3.5) получаем следующие уравнения стационарного движения упругого тела с жидкостью:

$$\begin{gathered}\frac{\partial W}{\partial q_r} = -\frac{1}{2}\frac{k_0^2}{J^2}\frac{\partial J}{\partial q_r} + \frac{\partial V}{\partial q_r} = 0 \qquad (r = 1,\ldots, n-1)\\ \rho_1\left(\operatorname{grad} U_1 + \frac{k_0^2}{J^2}\mathbf{R}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p_2}{\partial x_2} + \frac{\partial p_3}{\partial x_3} = 0\\ \operatorname{grad} U_2 + \frac{k_0^2}{J^2}\mathbf{R} - \frac{1}{\rho_2}\operatorname{grad} p = 0, \qquad \delta q = \frac{\partial U}{\partial s}\delta s\end{gathered} \tag{3.6}$$

а также граничные условия (1.12). Здесь $\mathbf{R}$ означает вектор кратчайшего расстояния от оси $x_3'$ до точки тела или жидкости. Разумеется, уравнения равновесия (3.2) или стационарного движения (3.6) можно получить непосредственно из уравнений движения (1.8)—(1.11), но для нас важно, что эти уравнения представляют следствия условий (3.1) или (3.5), представляющих в случае $\delta Q^* = 0$ условия стационарности потенциальной энергии $V$ или измененной потенциальной энергии $W$ системы.

4. Упругое тело с жидкостью в его полости обладает бесконечным числом степеней свободы и нужно условиться, что понимать под устойчивостью его движения.

Прежде всего можно принять данное Ляпуновым определение устойчивости формы равновесия жидкости и распространить его на упругое тело с жидкостью. При этом устойчивые формы равновесия определяются как такие формы, для которых, после сообщения жидкости и телу достаточно малых возмущений, формы жидкости и тела остаются насколько угодно мало отличающимися от их форм равновесия, по крайней мере до тех пор, пока на поверхности жидкости и тела не образуются сколь угодно тонкие нитеобразные или листообразные выступы. Такие выступы могут быть большими по линейным размерам, но малыми по объему, и тем самым они могут нести на себе малые порции энергии.

При этом в рассмотрение вводятся удаления $l_1$ и $l_2$ и уклонения $\nabla_1$ и $\nabla_2$ тела и жидкости, определяемые аналогично [1], и наклонения $\Delta_1$ и $\Delta_2$ возмущенных поверхностей $\sigma_2$ и $S$ к невозмущенным $\sigma_2^{(0)}$ и $S^{(0)}$, определяемые как разности площадей возмущенной и невозмущенной поверхностей

$$\Delta_1 = \sigma_2 - \sigma_2^{(0)}, \quad \Delta_2 = S_2 - S^{(0)}$$

Можно принять и иное определение устойчивости невозмущенного движения, вводя в рассмотрение некоторые интегральные характеристики [1] движения сплошной среды.

Для определенности примем за таковые $L_2$-нормы полей относительных смещений и скоростей в момент времени $t$, определяя их уравнениями [4]

$$\|\mathbf{u}^{(i)}\|^2 = \frac{1}{M_i}\int\limits_{\tau_i} \rho_i \mathbf{u}^2 d\tau, \qquad \|\mathbf{w}^{(i)}\|^2 = \frac{1}{M_i}\int\limits_{\tau_i} \rho_i \mathbf{w}^2 d\tau \qquad (i = 1, 2)$$

*Определение*. Если при всяких произвольно задаваемых положительных числах $A_1$ и $A_2$, сколь бы малы они ни были, можно выбрать положительные числа $\lambda_1$, $\lambda_2$ и $\lambda_3$ так, чтобы при всяких начальных значениях $q_{j0}$, $\dot{q}_{j0}$, $\mathbf{w}_0$, $\Delta_{i0}$, $\mathbf{u}_0$ (или $l_{i0}$), удовлетворяющих условиям

$$\begin{gathered} |q_{j0}| \leqslant \lambda_1, \qquad |\dot{q}_{j0}| \leqslant \lambda_2, \qquad \|\mathbf{w}_0^{(i)}\| \leqslant \lambda_2 \qquad \|\mathbf{u}_0^{(i)}\| \leqslant \lambda_1 \\ (|l_{i0}| \leqslant \lambda_1, \ \nabla_{i0} \geqslant \varepsilon l_{i0}), \qquad |\Delta_{i0}| \leqslant \lambda_1, \qquad |W_0| \leqslant \lambda_3 \end{gathered} \tag{4.1}$$

и при всяком $t \geqslant t_0$ (или по крайней мере до тех пор, пока $\nabla_i \geqslant \varepsilon l_i$) выполнялись неравенства

$$\begin{gathered} |q_j| < A_1, \quad |\dot{q}_j| < A_2, \quad \|\mathbf{u}^{(i)}\| < A_1 \quad (|l_i| < A_1) \\ |\Delta_i| < A_1, \quad \|\mathbf{w}^{(i)}\| < A_2 \end{gathered} \tag{4.2}$$

то невозмущенное стационарное движение (или равновесие) упругого тела с жидкостью устойчиво; в противном случае — неустойчиво.

Здесь $\varepsilon$ означает некоторое достаточно малое положительное число, а $\varepsilon l_i$ можно рассматривать как возможные уклонения [1] тела и жидкости; для невозмущенного движения $q_j = 0$ ($j = 1, \ldots, n-1$ — для случая стационарного движения, $j = 1, \ldots, n$ — для случая равновесия); $x_i = x_i^0$ ($i = 1, 2, 3$).

Понятие минимума функционала $W$ примем, как в [1], что эквивалентно понятию определенной положительности [4] функционала $W - W^{(0)}$, где $W^{(0)} = 0$ — значение $W$ для невозмущенного движения.

Рассмотрим сначала адиабатические процессы деформирования упругого тела, для которых $\delta Q^* = \delta s = 0$, $s = \mathrm{const}$.

*Теорема* 1. Если для стационарного движения (равновесия) упругого тела с полостью, наполненной жидкостью, выражение

$$W = \frac{1}{2}\frac{k_0^2}{J} + V \quad (V)$$

имеет минимум $W^{(0)}$ ($V^{(0)}$), то стационарное движение (равновесие) устойчиво для адиабатических процессов деформирования упругого тела.

Доказательство этой теоремы аналогично приводимому ниже доказательству теоремы 2. Заметим, что в случае $k_0 = 0$ получаем теорему Лагранжа.

Рассмотрим теперь случаи, когда для невозмущенного стационарного движения или равновесия упругого тела с жидкостью вектор потока тепла $\mathbf{q} = 0$ и температура имеет постоянное значение $T_1$. Будем предполагать, что граничные тепловые условия таковы, что местное увеличение температуры на поверхности тела есть результат направленного наружу потока тепла, т. е. справедливо следующее условие на поверхности упругого тела $S_1$:

$$(T - T_1)\mathbf{q}\cdot\mathbf{n} \geqslant 0 \tag{4.3}$$

Это условие включает в себя, очевидно, предельные случаи как полной тепловой изоляции упругого тела, когда $\mathbf{q} = 0$, так и удержания поверхности тела при постоянной температуре $T = T_1$.

На основании неравенства Клаузиуса — Дюгема и дополнительного неравенства Фурье для теплопроводности нетрудно преобразовать уравнение живых сил (2.6) при условии (4.3) к виду уравнения

$$\frac{d}{dt}\left(E + \Pi + \int_{\tau_1} \rho_1 (U - T_1 s)\, d\tau + \Pi_2\right) = \int_{\tau_1} \left(\frac{T_1}{T} - 1\right)\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\, dS +$$

$$+ T_1 \int_{\tau_1} \frac{1}{T^2}\, \mathbf{q}\cdot \operatorname{grad} T\, d\tau - T_1 \int_{\tau_1} \rho_1 \bar{s}^{\cdot}\, d\tau \leqslant 0 \tag{4.4}$$

правая часть которого неположительна [4]. Как показал Койтер

$$U(\varepsilon_{ij}, s) - T_1 s = A(\varepsilon_{ij}, T_1) + \frac{1}{2}\frac{C_\gamma^*}{T^*}(T_1 - T)^2 \tag{4.5}$$

$$T^* = T + \theta(T_1 - T) \quad (0 < \theta < 1), \qquad C_\gamma^* = -T^*\left(\frac{\partial^2 A}{\partial T^2}\right)^*$$

причем $C_\gamma^*$ означает теплоемкость тела при постоянной деформации и температуре $T^*$.

Вводя в рассмотрение вращающуюся систему координат $O'\xi_1\xi_2 x_3'$ раздела 3 и учитывая равенство (4.5), из уравнения (4.4) получаем неравенство

$$\frac{d}{dt}\left(E^{(1)} + \frac{1}{2}\frac{k^2}{J} + V_1\right) \leqslant 0$$

Отсюда следует, что

$$E^{(1)} + \frac{1}{2}\frac{k^2}{J} + V_1 \leqslant \left(E^{(1)} + \frac{1}{2}\frac{k^2}{J} + V_1\right)_0 \tag{4.6}$$

Здесь индекс 0 означает начальное значение соответствующей величины, $V_1$ — потенциальную энергию системы

$$V_1 = \Pi + \Pi_1 + \Pi_2 + \frac{1}{2}\int_{\tau_1} \frac{C_\gamma^*}{T^*}(T_1 - T)^2 \rho_1\, d\tau$$

в которой в отличие от выражения для $V$ потенциальная энергия деформации упругого тела взята в виде

$$\Pi_1 = \int_{\tau_1} \rho_1 A(\varepsilon_{ij}, T_1)\, d\tau$$

т. е. представляет собою полную свободную энергию тела для изотермических деформаций при постоянной температуре $T_1$.

*Теорема* 2. Если для стационарного движения (равновесия) упругого тела с полостью, содержащей жидкость, выражение

$$W = \frac{1}{2}\frac{k_0^2}{J} + V_1 \quad (V_1)$$

имеет минимум, то стационарное движение (равновесие) устойчиво.

*Доказательство.* Выведем систему из рассматриваемого стационарного движения (равновесия), сообщая ее точкам некоторые достаточно малые начальные отклонения и скорости так, чтобы начальное значение энергии $W$ было достаточно малым. Предоставленная самой себе, система будет далее двигаться в соответствии с неравенством (4.6), которое перепишем в виде

$$E^{(1)} + W + \frac{1}{2}\frac{k^2 - k_0^2}{J} \leqslant \left(E^{(1)} + W + \frac{1}{2}\frac{k^2 - k_0^2}{J}\right)_0 \tag{4.7}$$

Напомним, что $k$ означает значение постоянной площадей для возмущенного движения, $k_0$ — для невозмущенного. В случае, когда невозмущенное движение представляет собой равновесие, $k = k_0 = 0$.

Пусть $A_1$ есть некоторое произвольно малое положительное число. Обозначим через $W_1$ наименьшее возможное значение, какое может принять функционал $W$, если одна из координат $q_j$ ($j = 1,\ldots,n-1$), наклонение $\Delta_i$ и норма $\| \mathbf{u}^{(i)} \|$ (или удаление $l_i$) по абсолютной величине равны $A_1$, а остальные из этих величин (и уклонения $\nabla_i$) удовлетворяют условиям

$$|q_j| \leqslant A_1, \quad |\Delta_i| \leqslant A_1, \quad \|\mathbf{u}^{(i)}\| \leqslant A_1 \quad (|l_i| \leqslant A_1, \quad \nabla_i \geqslant \varepsilon l_i) \tag{4.8}$$

Выберем число $A_1$ настолько малым, чтобы было удовлетворено неравенство

$$|W_1 - W^{(0)}| < A_2 \tag{4.9}$$

где $A_2$ — произвольно заданное положительное число. Начальные значения $q_j$, $\Delta_i$, $\| \mathbf{u}^{(i)} \|$ (или $l_i$) возьмем столь малыми, чтобы они удовлетворяли условиям (4.8) со знаками неравенств, так чтобы начальное значение $W_0$ было меньше величины $W_1$, а начальные скорости $\mathbf{w}$ точек системы — такими, чтобы соблюдалось неравенство

$$\frac{1}{2}(k^2 - k_0^2)\left(\frac{1}{J_0} - \frac{1}{J}\right) + E_0^{(1)} + W_0 < W_1 \tag{4.10}$$

для всех значений, которые может иметь $J$ при выполнении условий

$$|q_j| \leqslant A_1, \quad \|\mathbf{u}^{(i)}\| \leqslant A_1 \quad (|l_i| \leqslant A_1) \tag{4.11}$$

При таком выборе начальных условий во все последующее время движения, пока выполняются неравенства (4.11), будем, согласно (4.7), иметь неравенство

$$E^{(1)} + W < W_1 \tag{4.12}$$

откуда следует, что $W < W_1$. Это неравенство будет удовлетворено по крайней мере до тех пор, пока $|q_j|$, $|\Delta_i|$, $\| \mathbf{u}^{(i)} \|$ (или $|l_i|$) остаются не превосходящими $A_1$. Но начальные значения этих величин по условию меньше $A_1$, и так как они меняются непрерывно, то они не могут стать превосходящими $A_1$, не сделавшись предварительно равными $A_1$. Но последнее в силу (4.12) невозможно (при условии $\nabla_i > \varepsilon l_i$). Из неравенства (4.12) с учетом (4.9) следует, что $|E^{(1)}| < A_2$, на основании чего заключаем о выполнении всех условий (4.2). Теорема доказана.

Заметим, что теоремы 1 и 2 остаются справедливыми и в случае, когда жидкость в полости обладает вязкостью [1], а на упругое тело действуют диссипативные силы, зависящие от $\dot{q}_i$ ($j = 1,\ldots, n-1$). Более того, в этом случае можно доказать справедливость теорем, аналогичных теоремам VI и VII работы [1] (стр. 184, 185).

Для упругого тела с жидкостью можно распространить также данное Н. Г. Четаевым [5] обращение теоремы Лагранжа, аналогично доказательству теоремы III работы [1] (стр. 178).

Поступила 3 VII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М., «Наука», 1965.
2. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
3. Новожилов В. В. Теория упругости. Л., Судпромгиз, 1958.
4. Koiter W. T. On the thermodynamic background of elastic stability theory (В сб.: Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды. М., «Наука», 1969.)
5. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Изд. 2-е, М., Гостехиздат, 1955.