О ГРАНИЦАХ ЛИБРАЦИИ СПУТНИКА НА КРУГОВОЙ ОРБИТЕ ПРИ ДЕЙСТВИИ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ВОЗМУЩАЮЩИХ СИЛ

С. Я. Степанов

(Москва)

Для удобства оценки потенциальной энергии возмущающих сил в качестве переменных выбраны параметры конечного поворота спутника относительно его положения устойчивого равновесия. Получены неравенства (3.4) и (3.6) для величины возмущающих сил и отклонений спутника, представляющие собой условия (λ, A, t_0, T)-устойчивости [1] его равновесия.

1. Предположим, что центр масс спутника движется как материальная точка по кеплеровской круговой орбите и введем правые прямоугольные системы координат $Ox_1x_2x_3$ и $Oy_1y_2y_3$. Оси первой направим по главным центральным осям инерции спутника. Вторая — орбитальная (y_1 — по скорости, y_2 — по нормали к плоскости орбиты, y_3 — по радиусу-вектору).

Потенциальная энергия действующих на спутник гравитационных сил и сил инерции в орбитальной системе координат имеет вид [2]

$$W = a\alpha_{21}^2 + b\alpha_{23}^2 + c\alpha_{31}^2 + d\alpha_{32}^2, \quad \alpha_{ij} = \cos y_ix_j \tag{1.1}$$

$$a = {}^1/_2\omega^2 (A_2 - A_1),\ b = {}^1/_2\, \omega^2(A_2 - A_3),\ c = {}^3/_2\, \omega^2 (A_1 - A_3),\ d = {}^3/_2\, \omega^2 (A_2 - A_3)$$

Здесь ω — кеплеровская орбитальная угловая скорость, A_i — главные центральные моменты инерции спутника. Коэффициенты a, b, c, d связаны очевидными соотношениями

$$d = 3b = c + 3a \tag{1.2}$$

Относительные движения спутника в орбитальной системе координат допускают интеграл энергии H

$$H = T + W = h, \quad 2T = A_1p_1^2 + A_2p_2^2 + A_3p_3^2 \tag{1.3}$$

Здесь T — кинетическая энергия относительных движений, p_i — проекции относительной угловой скорости спутника на оси x_i.

Представим таблицу косинусов α_{ij} через параметры Родрига — Гамильтона λ_0, λ_i $(i = 1, 2, 3)$ в виде

$$\begin{array}{cccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 \\
y_1 & \lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2(-\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2) & 2(\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3) \\
y_2 & 2(\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2) & \lambda_0^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2(-\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3) \\
y_3 & 2(-\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3) & 2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3) & \lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2
\end{array}$$

$$\lambda_0 = \cos {}^1/_2\, \chi, \quad \lambda_i = \gamma_i \sin {}^1/_2\, \chi \quad (i = 1, 2, 3), \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$$

Здесь γ_i — косинусы углов оси конечного поворота с осями координат (одинаковые в системах $Ox_1x_2x_3$ и $Oy_1y_2y_3$), χ — угол конечного поворота. В этих переменных будем иметь

$$W = \sin^2\chi\, F, \qquad F = [(b + d)\, \gamma_2^2\gamma_3^2 + c\gamma_3^2\gamma_1^2 + a\gamma_1^2\gamma_2^2]\, \mathrm{tg}^2\, {}^1/_2\, \chi +$$
$$+ 2(a - b - c + d)\, \gamma_1\gamma_2\gamma_3\, \mathrm{tg}\, {}^1/_2\chi + (b + d)\, \gamma_1^2 + c\gamma_2^2 + a\gamma_3^2 \tag{1.4}$$

Будем предполагать, что $A_2 > A_1 > A_3$. Тогда a, b, c, $d > 0$, и при $x_i = y_i$ спутник находится в устойчивом положении равновесия.

2. Определим минимум и максимум по γ_i $(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1)$ функции W при фиксированном значении $\chi < {}^1/_2\, \pi$

$$\min W = \sin^2\chi \min F, \qquad \max W = \sin^2 \chi \max F \tag{2.1}$$

Покажем, что

$$\min F = \min \{a, c\}, \qquad \max F = b + d \tag{2.2}$$

Из (1.2) следует неравенство

$$b + d - a - c > \tag{2.3}$$

Рассматривая значения функции F при

$$\gamma_1 = \pm 1, \quad \gamma_2 = \gamma_3 = 0 \quad (123) \tag{2.4}$$

из (1.4) и (2.3) получим

$$\min F \leqslant \min\{a, c\} < b + d \leqslant \max F \tag{2.5}$$

Рассмотрим три случая

$$a - b - c + d = 0, \quad a - b - c + d > 0, \quad a - b - c + d < 0 \tag{2.6}$$

В случае (2.6.1) первое соотношение в (2.2) очевидно, а (2.2.2) следует из (2.5) и следующих соотношений, справедливых при условиях (2.3) и (2.6.1):

$$F = b + d - (b + d - \lambda a - c)\gamma_2^2 - (b + d - a - \lambda c)\gamma_3^2 + \lambda(b + d - a - c)\gamma_2^2\gamma_3^2 -$$
$$- \lambda(a\gamma_2^4 + c\gamma_3^4) \leqslant b + d - (b + d - a - c)(\gamma_2^2 + \gamma_3^2 - \gamma_2^2\gamma_3^2) \leqslant b + d$$
$$(\lambda = \operatorname{tg}^2 {}^1/_2\, \chi,\ 0 < \lambda < 1)$$

Для доказательства (2.2) в оставшихся двух случаях (2.6.2), (2.6.3) рассмотрим функции W^-, F^-, W^+, F^+, отличающиеся от W и F коэффициентами: соответственно a^-, b^-, c^-, d^- и a^+, b^+, c^+, d^+, причем

$$0 < a^- \leqslant a \leqslant a^+, \quad 0 < b^- \leqslant b \leqslant b^+, \quad 0 < c^- \leqslant c \leqslant c^+, \quad 0 < d^- \leqslant d \leqslant d^+ \tag{2.7}$$
$$a^\pm - b^\pm - c^\pm + d^\pm = 0, \qquad b^\pm + d^\pm - a^\pm - c^\pm > 0$$

Тогда, во-первых, из (1.1), (1.4.1), (2.1) получим

$$W^- \leqslant W \leqslant W^+, \quad F^- \leqslant F \leqslant F^+, \quad \min F \geqslant \min F^-, \quad \max F \leqslant \max F^+ \tag{2.8}$$

и, во-вторых, в соответствии со случаем (2.6.1)

$$\min F^\pm = \min\{a^\pm, c^\pm\}, \qquad \max F^\pm = b^\pm + d^\pm \tag{2.9}$$

На основании соотношений (1.2) нетрудно проверить, что условиям (2.7) удовлетворяют следующие значения:

в случае (2.6.2) (2.10)

$$a^- = a,\ b^- = b,\ c^- = c,\ d^- = -a + b + c,\ a^+ = a,\ b^+ = b,\ c^+ = a - b + d,\ d^+ = d$$

в случае (2.6.3) (2.11)

$$a^- = a,\ b^- = a - c + d,\ c^- = c,\ d^- = d,\ a^+ = b + c - d,\ b^+ = b,\ c^+ = c,\ d^+ = d$$

Сопоставляя (2.5) с (2.8.3), (2.8.4) при подстановке в них (2.9) со значениями (2.10) (2.11), убедимся в справедливости (2.2) и в случаях (2.6.2), (2.6.3).

Итак, (2.2) полностью доказано.

Отметим, что $\min F$ и $\max F$ не зависят от χ. Поэтому из (2.1) следует, что минимум и максимум χ при условиях

$$W = h, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$$

определяются из соотношений

$$\min \sin^2\chi = h / (b + d), \quad \max \sin^2\chi = \sin^2\chi^*(h) = h / \min\{a, c\} \tag{2.12}$$

и достигаются при значениях (2.4).

Перепишем (2.12.2), (2.1) с учетом (1.1.2), (2.2.2) в виде

$$\min W = {}^1/_2\, \omega^2 \sin^2\chi \min\{(A_2 - A_1),\ 3(A_1 - A_3)\}$$
$$\max W = 2\omega^2 (A_2 - A_3)\sin^2\chi \tag{2.13}$$
$$\max \sin^2\chi = \sin^2\chi^*(h) = 2h\omega^{-1} / \min\{(A_2 - A_1),\ 3(A_1 - A_3)\}$$

3. Из (1.3), (2.13.3) следует, что если энергия спутника не превосходит h, то угол его отклонения от положения равновесия $x_i = y_i$ не превзойдет $\chi^*(h)$. Этот результат находится в согласии с оценками областей либрации спутника, полученными в работе [2] непосредственно в направляющих косинусах.

Иначе говоря, положение равновесия $x_i = y_i$ спутника будет (λ, A, t_0, ∞)-устойчиво [1], если в качестве областей (λ) и (A) выбрать области

$$H \leqslant \lambda, \quad \chi \leqslant A \qquad (A \geqslant \chi^* (\lambda))$$

Допустим, что на спутник действуют возмущающие потенциальные моменты с потенциальной энергией w. К этим моментам могут быть отнесены при определенных предположениях гиростатические моменты от вращающихся внутри спутника масс, аэродинамические моменты, реактивные моменты, обусловленные реакциями струй воздуха, вытекающего из спутника вследствие неполной герметичности, моменты от несферичности гравитационного поля в случае экваториального спутника и другие.

Если сумма всех таких возмущающих моментов не превосходит по модулю некоторого положительного числа M, то, очевидно

$$|w| \leqslant \chi M \tag{3.1}$$

Равновесие будет (λ, A, t_0, ∞)-устойчиво, если [1]

$$\max_{(\lambda)} V < \min_{[A]} V, \quad V = H + w = \text{const} \tag{3.2}$$

где через $[A]$ обозначена граница области (A).

Если в качестве областей (λ) и (A) выбрать

$$H \leqslant \lambda, \qquad H \leqslant A \tag{3.3}$$

то на основании (2.13.3), (3.1)

$$\max_{(\lambda)} V \leqslant \lambda + M\chi^* (\lambda), \ \min_{[A]} \ V \geqslant A - M\chi^* (A)$$

и неравенство (3.2) будет выполнено при

$$(A - \lambda) \,/\, (\chi^* (A) + \chi^* (\lambda)) \geqslant M \tag{3.4}$$

Если области (λ) и (A) заданы каким-либо иным способом, то в неравенство (3.4) следует вместо λ и A подставить числа λ° и A°

$$\lambda^\circ = \max_{(\lambda)} H, \quad A^\circ = \min_{[A]} H$$

Рассмотрим особо тот практически интересный случай, когда области (λ) и (A) задаются неравенствами

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \leqslant \omega^2\lambda^{(1)}, \ \chi \leqslant \lambda^{(2)}; \ p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \leqslant \omega^2 A^{(1)}, \ \chi \leqslant A^{(2)} \tag{3.5}$$

В этом случае на основании (2.13), (3.1)

$$\max_{(\lambda)} V \leqslant {}^1\!/_2\, \omega^2 A_2\, \lambda^{(1)} + 2\omega^2\, (A_2 - A_3) \sin^2 \lambda^{(2)} + M\lambda^{(2)}$$

$$\min_{[A]} V \geqslant {}^1\!/_2 \omega^2 \min \{A_3 A^{(1)}, \ (A_2 - A_1) \sin^2 A^{(2)}, \ 3\,(A_1 - A_3) \sin^2 A^{(2)}\} - MA^{(2)}$$

и условие (3.2) приводится к виду

$$\begin{gathered} {}^1\!/_2\, \omega^2 \min \{A_3 A^{(1)}, \ (A_2 - A_1) \sin^2 A^{(2)}, \ 3\,(A_1 - A_3) \sin^2 A^{(2)}\} - {}^1\!/_2\, \omega^2 A_2 \lambda^{(1)} - \\ - 2\omega^2\, (A_2 - A_3) \sin^2 \lambda^{(2)} \geqslant (A^{(2)} + \lambda^{(2)})\, M \end{gathered} \tag{3.6}$$

Для сравнения рассмотрим случай непотенциальных возмущающих моментов, по модулю не превосходящих M. Например, возмущения от эллиптичности орбиты. Тогда ввиду очевидного соотношения

$$dH \,/\, dt \leqslant M\, (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^{1/2} \leqslant M\, (2H \,/\, A_3)^{1/2}$$

рассматриваемое положение равновесия будет (λ, A, t_0, T)-устойчиво с областями (λ) и (A) в виде (3.3), (3.5) соответственно при условиях

$$M\,(T - t_0) \leqslant \sqrt{2A_3}\,(\sqrt{A} - \sqrt{\lambda})$$

$$\begin{gathered} \sqrt{A_3}\,\omega\, [(\min \{A_3 A^{(1)}, (A_2 - A_1) \sin^2 A^{(2)}, 3\,(A_1 - A_3) \sin^2 A^{(2)}\})^{1/2} - \\ - (A_2 \lambda^{(1)} + 4\,(A_2 - A_3) \ \sin^2 \ \lambda^{(2)})^{1/2}] \geqslant M\,(T - t_0) \end{gathered} \tag{3.7}$$

Пусть, например, $A_1 = 4 \cdot 10^{10}$ *г·см²*, $A_2 = 6 \cdot 10^{10}$ *г·см²*, $A_3 = 3 \cdot 10^{10}$ *г·см²*, $\omega = 0.001$ *сек*$^{-1}$, $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = 0$, $A^{(1)} = \infty$, $A^{(2)} = 0.1$. Тогда на основании (3.6) положение равновесия будет $(\lambda, A, t_0, \infty)$-устойчиво, если потенциальные возмущающие моменты не превосходят по модулю 1000 *г·см²·сек*$^{-2}$. При такой же величине непотенциальных возмущающих моментов условие (3.7.2) гарантирует устойчивость лишь на интервале $T - t_0 \leqslant 2450$ *сек*. За такое время центр масс спутника делает меньше половины оборота по орбите.

Автор благодарит В. В. Румянцева за обсуждение работы и полезные замечания.

Поступила 24 VI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. О некоторых вопросах, относящихся к задаче об устойчивости неустановившихся движений. ПММ, 1960, т. 24, вып. 1.
2. Белецкий В. В. Границы либраций трехосного спутника в гравитационном поле. ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.

ЗАМЕЧАНИЕ К ЗАМЕТКЕ С. К. ПЕРСИДСКОГО «ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ».

ПММ, 1968, т. 32, вып. 6, стр. 1122—1125

В выше указанной заметке С. К. Персидский предлагает ряд теорем относительно устойчивости движения. Формулировка, а также доказательство теоремы 4, представляются неудовлетворительными.

Например пусть

$$x^{\cdot} = \varphi_1 + R_1 = (y - x^3) + (y - x^3)^2 + y^4 + R_1, \quad R_1 = O(x^7)$$
$$y^{\cdot} = \varphi_2 + R_2 = -(y - x^3) + (y - x^3)^2 + y^4 + R_2, \quad R_2 = O(y^7)$$

Тогда условия теоремы очевидно будут удовлетворяться

$$u = \varphi_1 + \varphi_2 = 2(y - x^3)^2 + 2y^4$$
$$v = x + y, \qquad v^{\cdot} = u + R_1 + R_2$$

Но известно, что эта производная может быть бесконечной (см. И. Г. Малкин, Теория устойчивости движения. М.—Л., Гостехиздат, 1952). А это будет противоречить доказательству.

Действительно, полагая $R_1 = -x^7$, $R_2 = 0$, легко показать устойчивость приведенного примера.

Э. Дальберг (Стокгольм)

Поступила 13 II 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Персидский С. К. Исследование устойчивости решений некоторых нелинейных систем дифференциальных уравнений. ПММ, 1968, т. 32, вып. 6.
2. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.—Л., Гостехиздат, 1952.