К ПОСТРОЕНИЮ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ В РЕЗОНАНСНЫХ СЛУЧАЯХ

В. Г. Веретенников

(Москва)

Рассматривается система с n степенями свободы вида (0.1)

$$x_s^{\cdot} = -\lambda_s y_s + \mu X_{s1}(x, y, t) + \mu^2 X_{s2}(x, y, t) + \ldots + f_{s0}(t) + \mu f_{s1}(t) + \ldots$$
$$y_s^{\cdot} = \lambda_s x_s + \mu Y_{s1}(x, y, t) + \mu^2 Y_{s2}(x, y, t) + \ldots + \varphi_{s0}(t) + \mu\varphi_{s1}(t) + \ldots$$
$$x \equiv (x_1, \ldots, x_n), \qquad y \equiv (y_1, \ldots, y_n) \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

Здесь $X_{s1},\ldots,$ $Y_{s1},\ldots$ — многочлены сколь угодно высокого порядка по x, y с непрерывными периодическими относительно t коэффициентами общего периода 2π, а функции $f_{s0},\ldots,$ $\varphi_{s0},\ldots$ — непрерывные периодические того же периода. Число μ — малый параметр. Предполагается, что в системе имеется как внешний, так и внутренний резонансы.

Различные хорошо разработанные методы исследования колебаний квазилинейных неавтономных систем при резонансе (метод малого параметра, метод усреднения и др.) приводят задачу о построении колебаний с точностью до первой степени малого параметра к отысканию решений, так называемых уравнений основных (порождающих) амплитуд. Эти уравнения в случае системы с несколькими степенями свободы представляют собой систему нелинейных алгебраических уравнений, общего способа решения которых, как известно, не существует. Таким образом, одна задача приводится к другой не менее сложной.

В предлагаемой работе на основании результатов, полученных в [1,2], развивается метод построения как периодических, так и почти периодических решений, который позволяет определять значения основных амплитуд из системы линейных алгебраических уравнений в тех случаях, когда порядок наивысшей из форм при μ не более третьего. Если X_{s1} и Y_{s1} содержат формы выше третьего порядка, то в этом случае уравнения для нахождения основных амплитуд также нелинейные, но более простые, чем в методе малого параметра, методе усреднения и др.

В отличие от [1] не предполагается, что для системы (0.1) при $f_{s1} \equiv \ldots \equiv \varphi_{s1} \equiv \ldots \equiv 0$ имеется единственное периодическое решение с периодом 2π, стремящееся к порождающему при $\mu \to 0$.

1. Будем строить для системы (0.1) решение в виде [1]

$$x_s = x_s^* + \xi_s^*, \qquad y_s = y_s^* + \eta_s^* \tag{1.1}$$

Здесь x_s^*, y_s^* — решения системы (0.1), обращающиеся в порождающие при $\mu = 0$ и отыскиваемые, как обычно, в виде рядов

$$x_s^* = x_{s0}^*(t) + \mu x_{s1}^*(t) + \ldots, \qquad y_s^* = y_{s0}^*(t) + \mu y_{s1}^*(t) + \ldots$$

с периодическими коэффициентами, а ξ_s^* и η_s^* — ограниченные решения системы

$$\xi_s^{*\cdot} = -\lambda_s\eta_s^* + \mu\,\Xi_{s1}(\xi^*, \eta^*, M, t) + \mu^2\Xi_{s2}(\xi^*, \eta^*, N, t) + \ldots$$
$$\eta_s^{*\cdot} = \lambda_s\xi_s^* + \mu H_{s1}(\xi^*, \eta^*, M, t) + \mu^2 H_{s2}(\xi^*, \eta^*, N, t) + \ldots \tag{1.2}$$

полученной из (0.1) заменой x_s и y_s выражениями (1.1).

Произвольные постоянные M_1, $M_2,\ldots,$ N_1, $N_2,\ldots$ в правых частях системы (1.2) появились по той причине, что x_s^* и y_s^* не являются каким-либо уже найденным периодическим решением, соответствующим вполне определенным значениям произвольных постоянных. Как известно, например [2], произвольные постоянные M_1, $M_2,\ldots,$ входящие в порождающее решение $x_{s0}^*(t)$, $y_{s0}^*(t)$, число которых зависит от характера корней $\pm i\lambda_s$, а также постоянные в решениях $x_{s1}^*(t)$, $y_{s1}^*(t),\ldots$ находятся из условия существования решений для следующего приближения.

Однако даже для системы с одной степенью свободы для определения произвольных постоянных порождающего решения получаются системы нелинейных алгебраических уравнений.

Если же учесть тот факт, что от какого-либо периодического решения во многих случаях, давая конечные начальные возмущения, можно перейти к новым периодическим или почти периодическим колебаниям [1], то можно построить процесс отыскания решений иным путем, при котором значения произвольных постоянных определяются значительно проще.

Предположим, что вопрос о существовании ограниченных колебаний решается членами первого приближения по μ, в противном случае преобразования, аналогичные ниже изложенным, можно распространить на члены с μ^2 и т. д. до степени μ^α, где α — сколь угодно большое число.

При помощи замены $\zeta_s^* = \xi_s^* + i\eta_s^*$, $\bar{\zeta}_s^* = \xi_s^* - i\eta_s^*$ перейдем к комплексным переменным, будем иметь

$$\begin{aligned} \zeta_s^{*\cdot} &= i\lambda_s\zeta_s^* + \mu Z_{s1}^*(\zeta^*, \bar{\zeta}^*, M, t) + \mu^2 Z_{s2}^*(\zeta^*, \bar{\zeta}^*, N, t) + \ldots \\ \bar{\zeta}_s^{*\cdot} &= -i\lambda_s\bar{\zeta}_s^* + \mu \bar{Z}_{s1}^*(\zeta^*, \bar{\zeta}^*, M, t) + \mu^2 \bar{Z}_{s2}^*(\zeta^*, \bar{\zeta}^*, N, t) + \ldots \end{aligned} \tag{1.3}$$

Преобразуем далее систему (1.3), положив

$$\zeta_s^* = \zeta_s + \mu u_{s1}(\zeta^*, \bar{\zeta}^*, t), \qquad \bar{\zeta}_s^* = \bar{\zeta}_s + \mu \bar{u}_{s1}(\zeta^*, \bar{\zeta}^*, t) \tag{1.4}$$

Функции u_{s1}, $\bar{u}_{s1}$ с периодическими по t, периода 2π, коэффициентами подберем так, чтобы в новой системе

$$\zeta_s^{\cdot} = i\lambda_s\zeta_s + \mu Z_{s1}(\zeta, \bar{\zeta}, M, t) + \ldots, \quad \bar{\zeta}_s^{\cdot} = -i\lambda_s\bar{\zeta}_s + \mu\bar{Z}_{s1}(\zeta, \bar{\zeta}, M, t) + \ldots \tag{1.5}$$

выражения Z_{s1}, определяемые формулами

$$-\left[\frac{\partial u_{s1}}{\partial t} + \sum_{\beta=1}^{n}\left(\frac{\partial u_{s1}}{\partial \zeta_\beta} i\lambda_\beta\zeta_\beta - \frac{\partial u_{s1}}{\partial \bar{\zeta}_\beta} i\lambda_\beta\bar{\zeta}_\beta\right)\right] + i\lambda_s u_{s1} + Z_{s1}^* = Z_{s1} \tag{1.6}$$

не зависели от времени. Последнего можно добиться не всегда, а лишь при выполнении определенных условий, налагаемых на коэффициенты Z_{s1}^*. Произвольные постоянные $M_1, M_2, \ldots$, будем определять так, чтобы эти условия выполнялись. Тогда от исследования неавтономной системы сможем перейти к исследованию автономной до μ в первой степени включительно.

Представим функции Z_{s1}^* в виде

$$Z_{s1}^* = \sum_{k=1}^{m_s} Z_{s1}^{*(k)}(\zeta^*, \bar{\zeta}^*, M, t), \qquad Z_{s1}^{*(k)} = \sum_{p=0}^{k}\sum_{\alpha=0}^{p} Z_{s1,k-p}^{*(p-\alpha,\alpha)}\zeta_s^{*p-\alpha}\bar{\zeta}_s^{*\alpha} \tag{1.7}$$

Здесь m_s — порядок наивысшей из форм, встречающихся в Z_{s1}^*. Формы $Z_{s1,\ k-p}^{*(p-\alpha,\alpha)}$ не содержат ζ_s^*, $\bar{\zeta}_s^*$ и имеют порядок $\delta = k - p$.

Будем считать, что выражения Z_{s1} и u_{s1} представлены аналогично (1.7). Подставим эти выражения Z_{s1}^*, Z_{s1} и u_{s1} в (1.6) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $\zeta_s^{p-\alpha}\bar{\zeta}_s^{\alpha}$, получим

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial u_{s1,k-p}^{(p-\alpha,\alpha)}}{\partial t} - \sum_{\beta=1}^{n}{}'\left(\frac{\partial u_{s1,k-p}^{(p-\alpha,\alpha)}}{\partial \zeta_\beta} i\lambda_\beta\zeta_\beta - \frac{\partial u_{s1,k-p}^{(p-\alpha,\alpha)}}{\partial \bar{\zeta}_\beta} i\lambda_\beta\bar{\zeta}_\beta\right) - \\ &- i\lambda_s(p - 2\alpha - 1)\, u_{s1,k-p}^{(p-\alpha,\alpha)} + Z_{s1,k-p}^{*(p-\alpha,\alpha)} = Z_{s1,k-p}^{(p-\alpha,\alpha)} \end{aligned} \tag{1.8}$$

Штрих здесь и далее указывает на то, что в сумму не входят члены с индексом s.

Пусть теперь формы

$$Z^{*(p-\alpha,\alpha)}_{s1,k-p}, \quad Z^{(p-\alpha,\alpha)}_{s1,k-p}, \quad u^{(p-\alpha,\alpha)}_{s1,k-p}$$

имеющие порядок δ, представлены в виде

$$Z^{*(p-\alpha,\alpha)}_{s1,k-p} = \sum{}' A^{(**)}_{s1}(M,t)\,\zeta_1^{k_1}\ldots\zeta_n^{k_n}\bar\zeta_1^{q_1}\ldots\bar\zeta_n^{q_n} \tag{1.9}$$

$$Z^{(p-\alpha,\alpha)}_{s1,k-p} = \sum{}' B^{(**)}_{s1}(M,t)\,\zeta_1^{k_1}\ldots\zeta_n^{k_n}\bar\zeta_1^{q_1}\ldots\bar\zeta_n^{q_n}$$

$$u^{(p-\alpha,\alpha)}_{s1,k-p} = \sum{}' u^{(**)}_{s1}(t)\,\zeta_1^{k_1}\ldots\zeta_n^{k_n}\bar\zeta_1^{q_1}\ldots\bar\zeta_n^{q_n} \quad (k_1+\ldots+k_n+q_1+\ldots+q_n=\delta,\ \delta=0,1,\ldots,m)$$

Здесь и далее звездочки заменяют индекс $(k_1,\ldots,k_n,q_1,\ldots,q_n)$; число m равно порядку наивысшей из форм, входящих в многочлены X_{s1}, Y_{s1}.

Подставляя выражения (1.9) в (1.8) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\zeta_1^{k_1}\ldots\zeta_n^{k_n}\bar\zeta_1^{q_1}\ldots\bar\zeta_n^{q_n}$, получим уравнения

$$-du^{(**)}_{s1}/dt - in_\nu u^{(**)}_{s1} + A^{(**)}_{s1} = B^{(**)}_{s1} \tag{1.10}$$

Здесь

$$n_\nu = \sum_{\beta=1}^{n}{}' (k_\beta - q_\beta)\lambda_\beta + \lambda_s(p-2\alpha-1)$$

различные числа. При резонансе числа n_ν, в частности, могут быть целыми или равными нулю.

Если n_ν не равно целому числу или нулю, то соответствующие коэффициенты $B^{(**)}_{s1}$ можно выбрать равными нулю и из уравнений (1.10) определить $u^{(**)}_{s1}$ в виде периодических функций периода 2π.

Когда же n_ν число целое, выбирать коэффициенты $B^{(**)}_{s1}$ равными нулю можно лишь в случае, если уравнения

$$-du^{(**)}_{s1}/dt - in_\nu u^{(**)}_{s1} + A^{(**)}_{s1}(M,t) = 0$$

имеют для $u^{(**)}_{s1}$ периодические решения периода 2π. Для этого достаточно, чтобы разложения в ряды Фурье выражений

$$A^{(**)}_{s1}(M,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A^{(**)}_{s1,n}(M)\,e^{int}$$

не содержали коэффициентов $A^{(**)}_{s1,n}$ для $n = n_\nu$.

При резонансе числа n_ν будут равны нулю не только при $k_\beta = q_\beta$, $p = 2\alpha + 1$ (тождественный резонанс), но также могут быть равны нулю и для некоторых $k_\beta \neq q_\beta$, $p \neq 2\alpha + 1$. Последнее будет зависеть от соотношений между $\pm i\lambda_s$.

На коэффициенты $A^{(**)}_{s1}$ для $n_\nu = 0$ при $k_\beta \neq q_\beta$, $p \neq 2\alpha + 1$ наложим условия

$$\int_0^{2\pi} A^{(**)}_{s1}(M,t)\,dt = 0$$

Таким образом, имеем

$$A^{(**)}_{s1,n} = 0 \quad (n = n_\nu), \qquad \int_0^{2\pi} A^{(**)}_{s1}\,dt = 0 \quad (n_\nu = 0,\ k_\beta \neq q_\beta,\ p \neq 2\alpha + 1) \tag{1.11}$$

Из уравнений (1.11) и будем определять постоянные $M_1, M_2,\ldots$ порождающего решения.

Следует заметить, что число уравнений (1.11) в общем случае будет превышать число постоянных $M_1, M_2,\ldots$ Но при существовании нескольких решений в ограниченной области, когда можно, давая ξ_{s0}^*, η_{s0}^* конечные значения, переходить от одного решения к другому, постоянные $M_1, M_2,\ldots$, удовлетворяя части системы уравнений (1.11), будут очевидно, удовлетворять всем уравнениям.

Будем предполагать, что найденные значения $M_1, M_2,\ldots$ удовлетворяют всем уравнениям (1.11) и, кроме того, будут простым решением уравнений $P_i(M) = 0$, полученным из условий существования периодического решения x_{s1}^*, y_{s1}^* для первого приближения.

При тождественном резонансе коэффициенты $B_{s1}^{(**)}$ определим равенствами

$$B_{s1}^{(**)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A_{s1}^{(**)}dt$$

Теперь выражения $Z_{s1}(\zeta, \bar{\zeta}, t)$, стоящие в (1.5), не будут зависеть от времени. Первое уравнение системы (1.5) можно представить в виде

$$\zeta_s^{\cdot} = i\lambda_s\zeta_s + \mu\zeta_s\sum B_{s1}^{(**)}(\zeta_1\bar{\zeta}_1)^{k_1}\ldots(\zeta_n\bar{\zeta}_n)^{k_n} + \mu^2(\ldots) + \ldots \tag{1.12}$$

Возвращаясь к вещественным переменным, заменим

$$\zeta_s = \xi_s + i\eta_s, \quad \bar{\zeta}_s = \xi_s - i\eta_s, \quad B_{s1}^{(k_1,\ldots,k_n,q_1,\ldots,q_n)} = a_s^{(k_1,\ldots,k_n)} + ib_s^{(k_1,\ldots,k_n)}$$

получим

$$\begin{aligned}
\xi_s^{\cdot} &= -\lambda_s\eta_s + \mu\Big[\xi_s\sum a_s^{(k_1,\ldots,k_n)}(\xi_1^2+\eta_1^2)^{k_1}\ldots(\xi_n^2+\eta_n^2)^{k_n} - \\
&\quad - \eta_s\sum b_s^{(k_1,\ldots,k_n)}(\xi_1^2+\eta_1^2)^{k_1}\ldots(\xi_n^2+\eta_n^2)^{k_n}\Big] + \mu^2(\ldots) + \ldots \\
\eta_s^{\cdot} &= \lambda_s\xi_s + \mu\Big[\xi_s\sum b_s^{(k_1,\ldots,k_n)}(\xi_1^2+\eta_1^2)^{k_1}\ldots(\xi_n^2+\eta_n^2)^{k_n} + \\
&\quad + \eta_s\sum a_s^{(k_1,\ldots,k_n)}(\xi_1^2+\eta_1^2)^{k_1}\ldots(\xi_n^2+\eta_n^2)^{k_n}\Big] + \mu^2(\ldots) + \ldots
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Если в (1.13) положить $\xi_s = r_s\cos\theta_s$, $\eta_s = r_s\sin\theta_s$, то будем иметь

$$\begin{aligned}
r_s^{\cdot} &= \mu r_s\sum a_s^{(k_1,\ldots,k_n)} r_1^{2k_1}\ldots r_n^{2k_n} + \mu^2(\ldots) + \ldots \\
\theta_s^{\cdot} &= \lambda_s + \mu\sum b_s^{(k_1,\ldots,k_n)} r_1^{2k_1}\ldots r_n^{2k_n} + \mu^2(\ldots) + \ldots
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Стационарные колебания, в том числе и периодические для этой системы с точностью до членов первого порядка по μ, определяются из решений алгебраических уравнений

$$r_s\sum a_s^{(k_1,\ldots,k_n)} r_1^{2k_1}\ldots r_n^{2k_n} = 0 \tag{1.15}$$

Нетрудно видеть, что система (1.15) в том случае, когда порядок наивысшей из форм в X_{s1}, Y_{s1} не более третьего, приводится к линейной системе алгебраических уравнений. Если же в X_{s1}, Y_{s1} встречаются формы выше третьего порядка, то система (1.15) и в этом случае много проще нелинейной системы $P_i(M) = 0$.

Определяя положительные решения r_{s0}^2 системы (1.15), сможем найти новые значения для постоянных $M_1, M_2, \ldots$.

Действительно, выражая переменные ξ_s, η_s в виде

$$\xi_s = r_{s0} \cos \theta_s, \quad \eta_s = r_{s0} \sin \theta_s$$

и возвращаясь к переменным ξ_s^*, η_s^*, будем иметь

$$\xi_s^* = r_{s0} \cos \theta_s + \mu (\ldots) + \ldots, \quad \eta_s^* = r_{s0} \sin \theta_s + \mu (\ldots) + \ldots$$

Выражения решений (1.1) с точностью до членов первого порядка по μ представятся в виде

$$x_s = x_{s0}^* + r_{s0} \cos \theta_s + \mu (\ldots) + \ldots, \quad y_s = y_{s0}^* + r_{s0} \sin \theta_s + \mu (\ldots) + \ldots \tag{1.16}$$

В членах без μ значения θ_s равны $\lambda_s t$.

В порождающей системе семейство периодических решений включает в себя сумму членов вида $M_s \sin \lambda_s t$ и $M_s \cos \lambda_s t$, поэтому, объединяя эти члены с соответствующими членами $r_{s0} \sin \lambda_s t$, $r_{s0} \cos \lambda_s t$, получим новые значения произвольных постоянных, равные сумме M_s и r_{s0}.

Решения (1.16) в общем случае могут быть как периодические, так и почти периодические, что определяется характером корней $\pm i\lambda_s$.

Произвольные постоянные, входящие в решения x_{s1}^*, y_{s1}^* определятся из рассмотрения следующего приближения.

Заметим также, что устойчивость полученных решений весьма просто исследуется методом, изложенным в работе [1].

2. *Примеры.* В качестве первого примера рассмотрим резонанс второго рода для регенеративного приемника. Эта задача подробно изучена Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси [3].

Уравнение колебаний имеет вид

$$x^{\cdot\cdot} + x = \mu (1 - x^2) x^{\cdot} + \lambda \sin 2t \tag{2.1}$$

Вводя $x^{\cdot} = -y$, перепишем систему (2.1) в виде

$$x^{\cdot} = -y, \quad y^{\cdot} = x + \mu (1 - x^2) y - \lambda \sin 2t \tag{2.2}$$

Порождающее решение будет иметь вид

$$x_0 = M \cos t + N \sin t - {}^1/_3\, \lambda \sin 2t, \quad y_0 = M \sin t - N \cos t + {}^2/_3\, \lambda \cos 2t$$

Составляя уравнения для определения произвольных постоянных M и N из условий существования периодических решений для первого приближения, будем иметь

$$M\, [{}^1/_{18}\, \lambda^2 - 1 + {}^1/_4\, (M^2 + N^2)] = 0, \qquad N\, [{}^1/_{18}\, \lambda^2 - 1 + {}^1/_4\, (M^2 + N^2)] = 0 \tag{2.3}$$

Не решая этих уравнений, будем определять значения M и N изложенным выше способом.

Приводя систему (2.2) к виду (1.2), получим

$$\xi^{*\cdot} = -\eta^*, \quad \eta^{*\cdot} = \xi^* - \mu\, [2x_0 y_0 \xi^* + \eta^* \, (x_0^2 - 1) + y_0 \xi^{*2} + 2x_0 \xi^* \eta^* + \xi^{*2} \eta^*]$$

Переходя далее к комплексным переменным и выписывая уравнения типа (1.10), определим значения M и N. Так, приравнивая коэффициенты при $\bar{\zeta}$, будем иметь

$$-u^{\cdot(0.1)} + 2iu^{(0.1)} + A^{(0.1)} = 0 \tag{2.4}$$

Здесь $A^{(0.1)} = {}^1/_2\, (a - ib), \quad a = x_0^2 - 1, \quad b = 2x_0 y_0$.

Уравнение (2.4) будет иметь для $u^{(0.1)}$ периодическое решение, если в разложении в ряд Фурье

$$A^{(0.1)} = \sum_n A_n^{(0.1)} (M, N)\, e^{int}$$

коэффициент $A_n^{(0.1)}$ для $n = 2$ равняется нулю.

Условие $A_2^{(0.1)} = 0$ будет выполняться, если

$$^1/_4\,(N^2 - M^2) = 0, \quad NM = 0$$

Это дает $M = N = 0$. Эти значения M и N будут простым решением уравнений (2.3). Выполняя далее преобразования п. 1, вместо системы (1.15), получим

$$r\,(18 - \lambda^2 - {}^9/_2 r^2) = 0, \qquad r_{10} = 0, \; r_{20} = \sqrt{4 - {}^2/_9\lambda^2}$$

Решения (1.16) будут для нашего примера иметь вид

$$x = - {}^1/_3\,\lambda \sin 2t + r_{20}\cos t + \mu\,(\ldots) + \ldots, \; y = {}^2/_3\,\lambda \cos 2t + r_{20}\sin t + \mu\,(\ldots) + \ldots$$

Новые значения для произвольных постоянных M и N будут

$$M = r_{20} = \sqrt{4 - {}^2/_9\lambda^2}, \quad N = 0$$

а порождающее решение представится в виде

$$x_0 = - {}^1/_3\,\lambda \sin 2t + \sqrt{4 - {}^2/_9\lambda^2}\cos t, \quad y_0 = {}^2/_3\lambda \cos 2t + \sqrt{4 - {}^2/_9\lambda^2}\sin t$$

Очень просто исследуется устойчивость найденных решений способом, изложенным [1]. Для этого нужно вычислить коэффициент

$$p\,(r) = d\,[r\,(18 - \lambda^2 - {}^9/_2\,r^2)]\,/\,dr = 18 - \lambda^2 - {}^{27}/_2\,r^2$$

Для устойчивости решения $r_{10} = 0$ необходимо, чтобы

$$p\,(0) = 18 - \lambda^2 < 0, \; \lambda^2 > 18$$

а для устойчивости решения $r_{20} = \sqrt{4 - {}^2/_9\,\lambda^2}$ необходимо, чтобы

$$p\,(r_{20}) = 2\,(\lambda^2 - 18) < 0, \; \lambda^2 < 18$$

Заметим, что в рассмотренном простом примере не только определенные выше, но и все возможные значения M и N легко находятся из системы (2.3). Причем, кроме $M = N = 0$, решениями системы (2.3) будут любые M и N, удовлетворяющие равенству

$$M^2 + N^2 = 4 - {}^2/_9\,\lambda^2$$

Однако даже в случае системы с одной степенью свободы более сложного вида, чем (2.1), решение систем, аналогичных (2.3), вызывает серьезные затруднения. Затруднения могут возникнуть и при исследовании устойчивости найденных решений по уравнениям в вариациях. Например, в рассмотренном примере по уравнениям в вариациях можно получить условие $\lambda^2 > 18$ для устойчивости решения $M = N = 0$, исследование же устойчивости любого из последних решений составлением уравнений в вариациях результата не дает, так как соответствующее им характеристичное уравнение имеет один корень, равный единице. Трудности еще более возрастают для систем с большим числом степеней свободы.

Рассмотрим это на втором примере.

2) В качестве второго примера исследуем колебания электронного генератора [4] при наличии сложного внешнего воздействия (внешнее воздействие определяется набором гармоник sin и cos, резонирующих с собственными частотами колебаний генератора).

Проводя преобразования работы [4], получим такую систему уравнений

$$x_1^{\cdot} = - y_1, \; y_1^{\cdot} = x_1 + \mu\varphi\,(x_1, x_2, y_1, y_2) + P_2 \sin 2t + \mu\, Q_2 \cos t$$

$$x_2^{\cdot} = - 2y_2 + \mu\, f\,(x_1, x_2, y_1, y_2) + P_1 \sin t + \mu\, Q_1 \cos 2t, \; y_2^{\cdot} = 2x_2 \qquad (2.5)$$

В рассматриваемой системе $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ имеется как внутренний, так и внешний резонансы. Функции f и φ представляются в виде

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) = a_0 y_1 - a_1 x_1^2 y_1 - a_2 x_1 y_1 y_2 - a_3 y_1 y_2^2 - a_4 x_2 + \\ + a_5 x_1^2 x_2 + a_6 x_1 x_2 y_2 + a_7 x_2 y_2^2, \tag{2.6}$$

$$\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) = b_0 y_1 - b_1 x_1^2 y_1 - b_2 x_1 y_1 y_2 - b_3 y_1 y_2^2 - b_4 x_2 + \\ + b_5 x_1^2 x_2 + b_6 x_1 x_2 y_2 + b_7 x_2 y_2^2$$

Выражения коэффициентов $a_0, \ldots, a_7$, $b_0, \ldots, b_7$ через параметры системы (индуктивности, емкости, сопротивления и т. д.) определены в работе [4] и имеют вид

$$a_0 = \left(\frac{1}{n_1^2} + \frac{r}{n_2^2}\right)\frac{k_2\omega_2^2}{q}, \quad a_1 = \frac{k_2\omega_2^2}{\omega_1^2\gamma}, \quad a_2 = \frac{2k_1k_2\omega_2}{\omega_1\gamma}, \quad a_3 = \frac{k_1^2k_2}{\gamma}$$

$$a_4 = \left(\frac{k_1k_2}{n_1^2} + \frac{r}{n_2^2}\right)\frac{\omega_2^2}{q}, \quad a_5 = k_1a_1, \quad a_6 = k_1a_2, \quad a_7 = k_1a_3$$

$$b_0 = \left(\frac{1}{n_1^2} + \frac{k_1k_2r}{n_2^2}\right)\frac{\omega_1^2}{q}, \quad b_1 = \frac{1}{\gamma}, \quad b_2 = \frac{2k_1\omega_1}{\omega_2\gamma}, \quad b_3 = \frac{\omega_1^2k_1^2}{\omega_2^2\gamma}$$

$$b_4 = \left(\frac{1}{n_1^2} + \frac{r}{n_2^2}\right)\frac{k_1\omega_1^2}{q}, \quad b_5 = k_1b_1, \quad b_6 = k_1b_2, \quad b_7 = k_1b_3$$

$$\omega_1 = \lambda_1, \quad \omega_2 = \lambda_2, \quad \gamma = n_1^2q^3, \quad q = 1 - k_1k_2$$

Внешнее воздействие на систему характеризуется коэффициентами P_1, Q_1, P_2, Q_2, равными

$$P_1 = \frac{\omega_2^2A_1}{k_1n_1^2}(k_1k_2 - 1), \qquad P_2 = \frac{\omega_1^2A_2}{n_1^2}(1 - k_1k_2)$$

$$Q_1 = -\frac{8r}{3n_2^2k_1}P_2, \qquad Q_2 = \frac{k_1r}{3n_2^2}P_1$$

Величины A_1, A_2 определяются через амплитуды гармоник внешнего воздействия, а величины r, $k_1, \ldots$ — через параметры колебательной системы.

Ищем периодическое решение системы (2.5) в виде рядов Пуанкаре

$$x_1^* = x_{10} + \mu x_{11} + \ldots, \quad y_1^* = y_{10} + \mu y_{11} + \ldots$$

$$x_2^* = x_{20} + \mu x_{21} + \ldots, \quad y_2^* = y_{20} + \mu y_{21} + \ldots \tag{2.7}$$

Здесь x_{10}, x_{20}, y_{10}, y_{20} — решения порождающей системы

$$x_{10}^{\cdot} = -y_{10}, \quad x_{20}^{\cdot} = -2y_{20} + P_1 \sin t$$

$$y_{10}^{\cdot} = x_{10} + P_2 \sin 2t, \quad y_{20}^{\cdot} = 2x_{20}$$

равные

$$x_{10} = {}^1/_3\, P_2 \sin 2t + M_1 \sin t + N_1 \cos t, \quad x_{20} = {}^1/_3\, P_1 \cos t + M_2 \cos 2t - N_2 \sin 2t$$

$$y_{10} = -{}^2/_3\, P_2 \cos 2t - M_1 \cos t + N_1 \sin t, \quad y_{20} = {}^2/_3\, P_1 \sin t + M_2 \sin 2t + N_2 \cos 2t$$

Пользуясь хорошо известным приемом [2] определения M_1, N_1, M_2, N_2 должны находить их значения из условий существования периодических решений для уравнений первого приближения

$$x_{11}^{\cdot} = -y_{11}, \quad x_{21}^{\cdot} = -2y_{21} + f(x_{10}, x_{20}, y_{10}, y_{20}) + Q_1 \cos 2t$$

$$y_{11}^{\cdot} = x_{11} + \varphi(x_{10}, x_{20}, y_{10}, y_{20}) + Q_2 \cos t, \quad y_{21}^{\cdot} = 2x_{21}$$

Эти условия приводят к следующей нелинейной системе алгебраических уравнений для определения M_1, N_1, M_2, N_2:

$$27 M_1 [b_1 (M_1^2 + N_1^2) + 2b_3 (M_2^2 + N_2^2)] + 9P_1 (3b_5 - 2b_2) N_1^2 + \\ + 9P_1 (2b_2 + b_5) M_1^2 + 18b_7P_1 (M_2^2 + N_2^2) + 36 P_2 (b_2 - b_5) N_1N_2 +$$

$$
\begin{gathered}
+18b_2P_2M_1M_2+6\,[-18\,b_0+b_1P_2^2+P_1^2\,(2b_3+b_6)]\,M_1+6b_6\,P_1P_2M_2+\\
+2\,(-18\,b_4P_1+b_5P_1P_2^2+2b_7P_1^3+54\,Q_2)=0\\
-9N_1\,[b_1\,(M_1^2+N_1^2)+2b_3\,(M_2^2+N_2^2)]+6P_1M_1N_1\,(b_5-2b_2)-\\
-6b_2P_2N_1M_2+12P_2M_1N_2\,(b_2-b_5)+12b_7P_1M_2N_2+2N_1\,[18b_0-\\
-b_1P_2^2+P_1^2\,(b_6-6b_3)]+4P_1P_2N_2\,(4b_3-b_6)=0 \qquad (2.8)\\
-9N_2\,[2a_5\,(M_1^2+N_1^2)+a_7\,(M_2^2+N_2^2)]+6P_1N_1M_2\,(a_6-4a_3)+\\
+6P_2M_2N_2(2a_3-a_6)-12a_6P_1M_1N_2+4P_1P_2N_1\,(a_5-a_2)+\\
+N_2\,[36a_4+P_2^2\,(2a_2-3a_5)-8a_7P_1^2]=0\\
27M_2\,[2a_5\,(M_1^2+N_1^2)+a_7(M_2^2+N_2^2)]+36a_1P_2\,(M_1^2+N_1^2)+\\
+18P_1N_1N_2\,(a_6-4a_3)+9P_2M_2^2\,(a_6+2a_3)+9P_2N_2^2\,(6a_3-a_6)+\\
+36a_6P_1M_1M_2+24a_2P_1P_2M_1+3M_2\,[P_2^2\,(2a_2+a_5)-36\,a_4+\\
+8a_7P_1^2]+2\,(-36a_0P_2+a_1P_2^3+8a_3P_1^2P_2+54Q_1)=0
\end{gathered}
$$

Будем искать решение согласно изложенной выше методике. Преобразовывая систему (2.5) к виду (1.2), получим

$$
\begin{gathered}
\xi_1^{*\cdot}=-\eta_1^*,\quad \xi_2^{*\cdot}=-2\eta_2^*+\mu\;\Xi_{21}\,(\xi_1^*,\ \xi_2^*,\ \eta_1^*,\ \eta_2^*,\ M_1,\ M_2,\ N_1,\ N_2,\ \ t)+\ldots\\
\eta_1^{*\cdot}=\xi_1^*+\mu H_{11}\,(\xi_1^*,\ \eta_1^*,\ \xi_2^*,\ \eta_2^*,\ M_1,\ M_2,\ N_1,\ N_2,\ t)+\ldots,\ \eta_2^{*\cdot}=2\xi_2^* \qquad (2.9)\\
\Xi_{21}=\xi_1^*\,(2a_5x_{10}x_{20}+a_6x_{20}y_{20}-2a_1x_{10}y_{10}-a_2y_{10}y_{20})+\\
+\xi_2^*\,(a_5x_{10}^2+a_6x_{10}y_{20}+a_7y_{20}^2-a_4)+\eta_1^*\,(a_0-a_1x_{10}^2-\\
-a_2x_{10}y_{20}-a_3y_{20}^2)+\eta_2^*\,(a_6x_{10}x_{20}+2a_7x_{20}y_{20}-a_2x_{10}y_{10}-\\
-2a_3y_{10}y_{20})+\xi_1^{*2}\,(a_5x_{20}-a_1y_{10})+\eta_2^{*2}\,(a_7x_{20}-a_3y_{10})-\\
-\xi_1^*\eta_1^*\,(2a_1x_{10}+a_2y_{20})+\xi_1^*\eta_2^*\,(a_6x_{20}-a_2y_{10})-\\
-\eta_1^*\eta_2^*\,(a_2x_{10}+2a_3y_{20})+\xi_1^*\xi_2^*\,(2a_5x_{10}+a_6y_{20})+\\
+\xi_2^*\eta_2^*\,(a_6x_{10}+2a_7y_{20})-a_1\xi_1^{*2}\eta_1^*-a_2\xi_1^*\eta_1^*\eta_2^*-a_3\eta_1^*\eta_2^{*2}+\\
+a_5\xi_1^{*2}\xi_2^*+a_6\,\xi_1^*\xi_2^*\eta_2^*+a_7\eta_2^{*2}\xi_2^*
\end{gathered}
$$

Функция H_{11} может быть получена из Ξ_{21} заменой коэффициентов $a_0,\ldots,a_7$ на $b_0,\ldots$ $\ldots,b_7$, соответственно.

Преобразовывая далее систему (2.9) согласно п. 1, придем к уравнениям вида (1.10), причем в рассматриваемом случае все n_ν будут или равны нулю, или целым числам. Так, одно из таких уравнений (для $k=2$ при $\zeta_1\bar{\zeta}_1$) будет

$$
\begin{gathered}
-u_{11.0}^{\cdot(1.1)}+iu_{11.0}^{(1.1)}+Z_{11.0}^{*(1.1)}=0,\quad Z_{11.0}^{*(1.1)}\Big|_{n=1}=-{}^1\!/_2ib_1N_1\sin t+\\
+{}^1\!/_8 i\cos t\,(3b_1M_1+b_5P_1)
\end{gathered}
$$

Из условия существования периодического решения для $u_{11.0}^{(1.1)}$ будем иметь

$$
N_1=0,\qquad {}^1\!/_8\,(3b_1M_1+b_5P_1)=0
$$

Учитывая, что $b_1=1\,/\,n_1^2q^3$, $b_5=k_1\,/\,n_1^2q^3$, определим $M_1=-{}^1\!/_3\,k_1P_1$. Для $k=2$ при $\zeta_1\zeta_2$ получим уравнение

$$
-u_{11}^{\cdot(0.1.0.0)}-2iu_{11}^{(0.1.0.0)}+A_{11}^{*(0.1.0.0)}=0
$$

$$
\begin{gathered}
A_{11}^{*(0.1.0.0)}\Big|_{n=2}=-{}^1\!/_4\,b_6N_2\sin 2t+({}^1\!/_6\,b_2P_2+{}^1\!/_4\,b_6M_2\,)\cos 2t+\\
+({}^1\!/_{12}\,b_2P_2+{}^1\!/_2\,b_3M_2+{}^1\!/_6\,b_5P_2+{}^1\!/_4\,b_6M_2)\,i\sin 2t+\\
+({}^1\!/_2b_3N_2+{}^1\!/_4\,b_6N_2)\,i\cos 2t
\end{gathered}
$$

Из условия существования периодического решения для $u_{11}^{(0.1.0.0)}$ будем иметь

$$
N_2=0,\qquad M_2=-{}^2\!/_3\,P_2\,/\,k_1
$$

так как $b_5=k_1\,/\,n_1^2q^3$, $\quad b_3={}^1\!/_4\,k_1^2\,/\,n_1^2q^3$.

Полученные значения M_1, M_2, N_1, N_2 удовлетворяют уравнениям (2.8).

В результате дальнейших преобразований придем к системе вида (1.12), которая в рассматриваемом случае будет иметь вид

$$\zeta_1^{\cdot} = i\zeta_1 + \mu\zeta_1 (a_{10} + a_{11}\zeta_1\overline{\zeta}_1 + a_{12}\zeta_2\overline{\zeta}_2) + \mu^2 (\ldots) + \ldots$$
$$\zeta_2^{\cdot} = 2i\zeta_2 + \mu\zeta_2 (a_{20} + a_{21}\zeta_1\overline{\zeta}_1 + a_{22}\zeta_2\overline{\zeta}_2) + \mu^2 (\ldots) + \ldots \qquad (2.10)$$
$$a_{10} = {}^1/_2\, b_0, \quad a_{11} = -{}^1/_8 b_1, \quad a_{12} = -{}^1/_4\, b_3, \quad a_{20} = -{}^1/_2 a_4, \quad a_{21} = {}^1/_4 a_5, \quad a_{22} = {}^1/_8\, a_7$$

а система (1.14) будет

$$r_1^{\cdot} = \mu r_1 (a_{10} + a_{11}r_1^2 + a_{12}r_2^2) + \mu^2 (\ldots) + \ldots, \quad \theta_1^{\cdot} = 1 + \mu^2 (\ldots) + \ldots$$
$$r_2^{\cdot} = \mu r_2 (a_{20} + a_{21}r_1^2 + a_{22}r_2^2) + \mu^2 (\ldots) + \ldots, \quad \theta_2^{\cdot} = 2 + \mu^2 (\ldots) + \ldots \qquad (2.11)$$

Уравнения

$$r_1 (a_{10} + a_{11}r_1^2 + a_{12}r_2^2) = 0, \qquad r_2 (a_{20} + a_{21}r_1^2 + a_{22}r_2^2) = 0$$

заменой $r_1^2 = \gamma_1$, $r_2^2 = \gamma_2$ приводятся к линейным алгебраическим и имеют решения

$$(1)\quad r_1 = 0, r_2 = 0 \qquad (2)\quad r_2 = 0, r_1 = 2\sqrt{b_0/b_1}, \qquad (3)\quad r_1 = 0, r_2 = 2\sqrt{a_4/a_7}$$
$$(4)\quad r_1 = \sqrt{4(2a_4b_3 - a_7b_0)/(4a_5b_3 - a_7b_1)}, \; r_2 = \sqrt{4(2a_5b_0 - a_4b_1)/(4a_5b_3 - a_7b_1)}$$

При $r_1 = r_2 = 0$ приходим к уже найденным значениям произвольных постоянных порождающего решения, а используя второе, третье и четвертое решения, получим новые значения для M_1, M_2, N_1, N_2, соответственно, равные

$$(1)\quad M_1 = -{}^1/_3 k_1P_1, \quad M_2 = -{}^2/_3 P_2/k_1, \quad N_1 = 0, \quad N_2 = 0$$
$$(2)\quad M_1 = -{}^1/_3 k_1P_1, \quad M_2 = -{}^2/_3 P_2/k_1, \quad N_1 = 2\sqrt{b_0/b_1}, \quad N_2 = 0$$
$$(3)\quad M_1 = -{}^1/_3 k_1P_1, \quad M_2 = -{}^2/_3 P_2/k_1 + 2\sqrt{a_4/a_7}, \quad N_1 = 0, \quad N_2 = 0$$
$$(4)\quad M_1 = -{}^1/_3 k_1P_1, \quad M_2 = \sqrt{4(2a_5b_0 - a_4b_1)/(4a_5b_3 - a_7b_1)} - {}^2/_3 P_2/k_1$$
$$N_1 = \sqrt{4(2a_4b_3 - a_7b_0)/(4a_5b_3 - a_7b_1)}, \quad N_2 = 0$$

Устойчивость найденных новых решений просто исследуется способом, развитым в работе [1].

В заключение отметим, что применяя изложенный в п. 1 метод, получаем значения произвольных постоянных порождающего решения как функции параметров системы и внешних воздействий, что особенно важно для анализа колебательных систем.

Поступила 30 X 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Каменков Г. В. Исследование нелинейных колебаний с помощью функций Ляпунова. Тр. Ун-та дружбы народов им. П. Лумумбы, сер. теорет. механ., 1966, т. 15, вып. 3.
2. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
3. Мандельштам Л. И., Папалекси Н. Д. О явлениях резонанса n-го рода. Ж. техн. физ., 1932, т. 2, вып. 7—8.
4. Веретенников В. Г. К исследованию вынужденных колебаний нелинейной системы с двумя степенями свободы. Тр. Ун-та дружбы народов им. П. Лумумбы, сер. теорет. механ., 1966, т. 15, вып. 3.