

## НЕКОТОРЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ГРАВИТИРУЮЩИХ ГИРОСТАТА И СФЕРОИДА И ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ

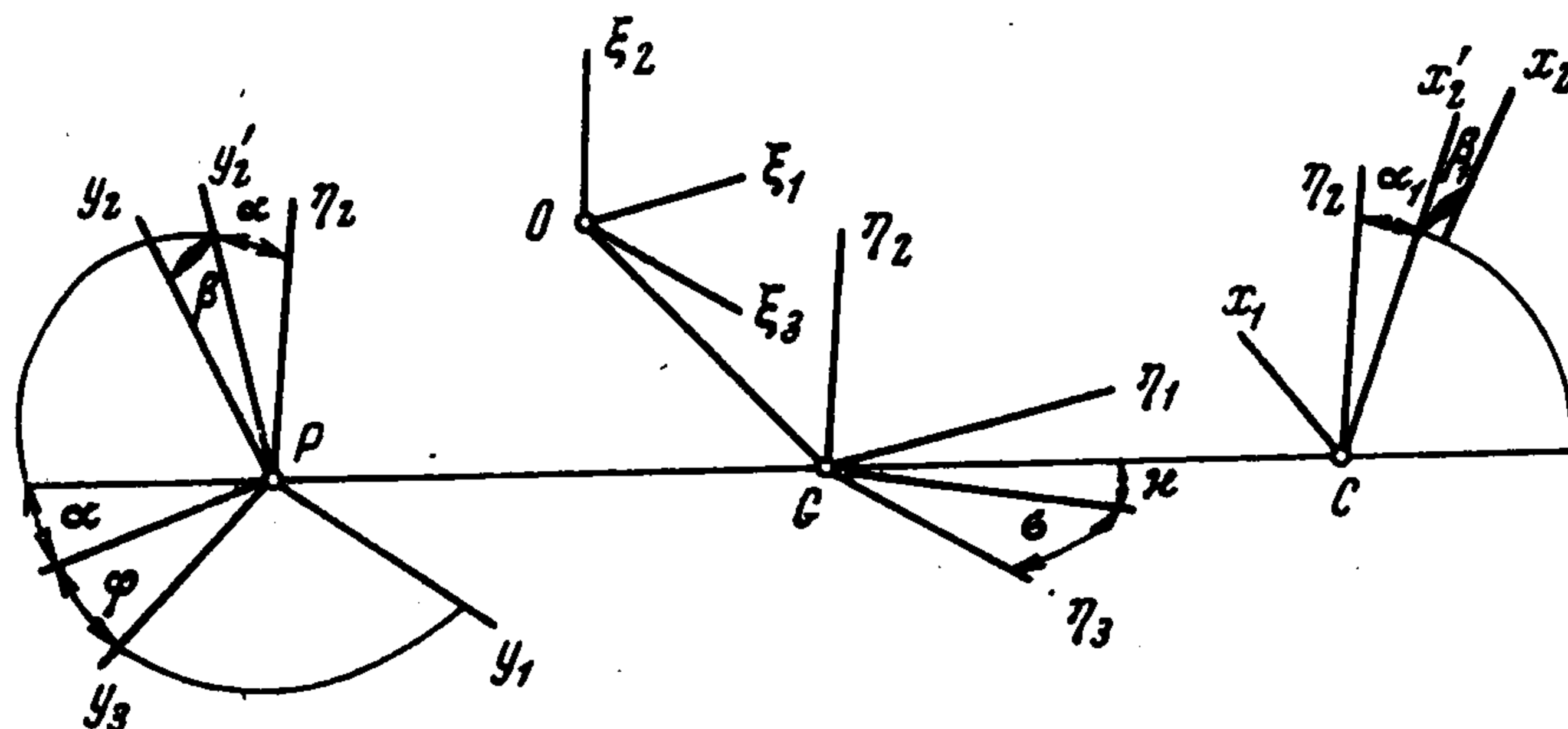
Р. С. Суликашвили

(Тбилиси)

Исследуются некоторые стационарные движения двух гравитирующих тел, одно из которых представляет собой сфероид, другое гироскат.

Рассмотрены случаи динамически несимметричного и динамически симметричного гироскатов. Получены достаточные условия устойчивости, а в случае динамически симметричного гироската — также и достаточные условия неустойчивости.

1. Введем следующие обозначения:  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  — неподвижная система осей координат (см. фигуру),  $G\eta_1\eta_2\eta_3$  — кенигова система осей координат с началом в центре масс  $G$  системы сфероид плюс гироскат, оси которой параллельны осям неподвижной системы координат,  $Cx_1x_2x_3$  — подвижная система осей координат, оси которой направим по главным центральным осям инерции гироската,  $Pu_1u_2u_3$  — подвижная система осей



координат, оси которой направим по главным центральным осям инерции сфероида (ось  $u_2$  по оси динамической симметрии сфероида),  $R_1, \sigma, \kappa$  и  $R_2, \sigma, \kappa$ , ( $R_1 + R_2 = R$ ) — сферические координаты относительно кениговской системы центров масс гироската и сфероида соответственно,  $\sigma$  — долгота,  $\kappa$  — широта,  $\alpha, \beta, \varphi$  — углы Крылова,  $\beta$  угол отклонения оси  $u_2$  динамической симметрии сфероида от плоскости  $Q$ , проходящей через линию  $PC$  центров масс и ось  $\eta_2$ ,  $\alpha$  — угол между осью  $\eta_2$  и проекцией оси  $u_2$  на плоскость  $Q$ ,  $\varphi$  — угол собственного вращения сфероида,  $\alpha_1, \beta_1, \varphi_1$  — углы Крылова, причем  $\beta_1$  — угол отклонения оси  $x_2$  гироската от плоскости  $Q$ ,  $\alpha_1$  — угол между осью  $\eta_2$  и проекцией оси  $x_2$  на плоскость  $Q$ ,  $\varphi_1$  — угол между осью  $x_3$  и линией пересечения плоскостей  $Q$  и  $Cx_1x_3$ ,  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  — косинусы углов, образуемых осью  $\eta_2$  с осями  $x_1, x_2, x_3$  соответственно,  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  — косинусы углов, образуемых радиусом-вектором  $R_1$  центра масс гироската относительно точки  $G$  с осями  $x_1, x_2, x_3$  соответственно,  $\gamma', \gamma'', \gamma'''$  — косинусы углов, образуемых радиусом-вектором  $R_2$  центра масс сфероида относительно точки  $G$  с осями  $u_1, u_2, u_3$  соответственно,  $f$  — гравитационная постоянная,  $M_1, M_2, A_1, A_2, A_3$  и  $B_1, B_2, B_3$  ( $B_1 = B_3$ ) массы и главные центральные моменты инерции гироската и сфероида соответственно,  $k_1, k_2, k_3$  — проекции гироскатического момента на оси  $x_1, x_2, x_3$ ;  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  — проекции абсолютной угловой скорости гироската на те же оси,  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  — проекции абсолютной угловой скорости сфероида на оси  $u_1, u_2, u_3$ .

Кинетическая энергия  $T$  системы сфероид плюс гироскат имеет вид

$$T = \frac{1}{2} M_0 (R^2 + R\sigma^2 \cos^2 \kappa + R^2 \kappa^2) + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^3 A_i [\sigma \beta_i + F_i(\kappa, \beta_j, \gamma_j)]^2 + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^3 k_i [\sigma \beta_i + F_i(\kappa, \beta_j, \gamma_j)] + B_1 [\sigma^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta) + \right.$$

$$+ 2\sigma\beta' \sin \alpha - 2\sigma\alpha' \cos \alpha \sin \beta \cos \beta + \alpha'^2 \cos^2 \beta + \beta'^2) + B_2 [\sigma'^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \\ + 2\sigma'\varphi' \cos \alpha \cos \beta + 2\sigma\alpha' \cos \alpha \cos \beta \sin \beta + \varphi'^2 + 2\varphi'\alpha' \sin \beta + \alpha'^2 \sin^2 \beta] \quad (1.1)$$

$$\left( M_0 = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \right)$$

причем функции  $F_i(\kappa, \beta_j, \gamma_j)$  уничтожаются при  $\kappa = \beta_j = \gamma_j = 0$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ).

Для потенциальной энергии сил ньютоновского притяжения примем выражение [1].

$$\Pi = \frac{3M_2 f}{2R^3} \left[ A_1 \gamma_1^2 + A_2 \gamma_2^2 + A_3 \gamma_3^2 - \frac{A_1 + A_2 + A_3}{3} \right] - f \frac{M_1 M_2}{R} + \\ + \frac{3M_1 f}{2R^3} \left\{ B_1 [\sin^2(\alpha - \kappa) \sin^2 \beta + \cos^2(\alpha - \kappa)] + \right. \\ \left. + B_2 \sin^2(\alpha - \kappa) \cos^2 \beta - \frac{2B_1 + B_2}{3} \right\} \quad (1.2)$$

2. Уравнения движения системы сфероид плюс гироскат можно записать в форме уравнений Лагранжа, принимая за лагранжевы координаты  $q_i$  переменные  $R, \kappa, \sigma, \alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1, \varphi, \varphi_1$ . Эти уравнения будут допускать интеграл энергии (для движения системы относительно осей Кенига)

$$T + \Pi = h = \text{const}$$

Далее, как видно из (1.1) и (1.2), координаты  $\sigma$  и  $\varphi$  суть циклические, и им отвечают первые интегралы

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma'} = M_0 R^2 \sigma' \cos^2 \kappa + \sum_{i=1}^3 \{ A_i \beta_i [\sigma' \beta_i + F_i(\kappa, \beta_j, \gamma_j)] + k_i \beta_i \} + \\ + B_1 [\sigma' (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta) - \alpha' \cos \alpha \sin \beta \cos \beta + \beta' \sin \alpha] + \\ + B_2 [\sigma' \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \varphi' \cos \alpha \cos \beta + \alpha' \cos \alpha \cos \beta \sin \beta] = K_\sigma \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi'} = B_2 (\sigma' \cos \alpha \cos \beta + \varphi' + \alpha' \sin \beta) = K_\varphi \quad (2.2)$$

выражающие соответственно постоянство момента количества движения системы (в ее движении относительно осей Кенига) относительно оси  $n_2$  и постоянство момента количества движения сфероида (в его движении относительно системы Кенига) относительно его оси собственного вращения  $y_2$ .

Из последнего интеграла следует, что проекция угловой скорости сфероида на ось  $y_2$  постоянна.

Игнорируя циклические координаты  $\sigma$  и  $\varphi$ , построим функцию Рауса

$$R = L - \sigma' K_\sigma - \varphi' K_\varphi = R_2 + R_1 + R_0 \quad (R_0 = -W)$$

Здесь  $R_i$  — форма степени  $i$  относительно обобщенных скоростей  $R', \kappa', \alpha', \alpha_1', \beta', \beta_1', \varphi_1'$ .

Учитывая соотношения

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \\ \chi = \beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2 + \beta_3 \gamma_3 - \sin \kappa = 0$$

измененную потенциальную энергию системы сфероид плюс гироскат представим в виде

$$W(R, \kappa, \alpha, \beta, \beta_1, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2) = \frac{K^2}{2S} + \frac{K_\varphi^2}{2B_2} + \Pi$$

$$K = K_\sigma - K_\varphi \cos \alpha \cos \beta - k_1 \beta_1 - k_2 (1 - \beta_1^2 - \beta_3^2)^{1/2} - k_3 \beta_3 \\ S = M_0 R^2 \cos^2 \kappa + B_1 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta) + (A_1 - A_2) \beta_1^2 + (A_3 - A_2) \beta_3^2 + A_2$$

Стационарные движения исследуемой механической системы введением множителя Лагранжа  $\lambda$  определяются как стационарные точки функции  $W_1 = W + \lambda \chi$  из уравнения  $\delta W_1 = 0$

Это уравнение допускает следующие решения ( $z_0$  есть значение функции  $z$  на соответствующем стационарном движении):

$$R = R_0, \quad \kappa = 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \beta_1 = \sin \theta_0$$

$$\beta_3 = 0, \quad \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 0, \quad \lambda = 0 \quad (2.3)$$

$$R = R_0, \quad \kappa = 0, \quad \alpha = 1/2\pi, \quad \beta = 0, \quad K_\varphi = 0, \quad \beta_1 = \sin \theta_0$$

$$\beta_3 = 0, \quad \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 0, \quad \lambda = 0 \quad (2.4)$$

$$R = R_0, \quad \kappa = 0, \quad \alpha = 0, \quad \cos \beta = \cos \beta_0 = K_\varphi / \omega_0 B_1, \quad \beta_1 = \sin \theta_0$$

$$\beta_3 = 0, \quad \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 0, \quad \lambda = 0 \quad (2.5)$$

$$R = R_0, \quad \kappa = \kappa_0, \quad \cos \alpha = \cos \alpha_0 = \frac{\omega_0 K_\varphi}{\omega_0^2 B_1 + 3f M_1 R^{-3} (B_1 - B_2)} + \delta \quad (2.6)$$

$$\beta = 0, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_3 = \sin (\theta_0 + \kappa_0), \quad \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = -\sin \theta_0$$

$$\lambda = \frac{3f M_1}{2R^3} (A_2 - A_3) \sin \theta_0$$

Здесь  $\kappa_0$  и  $\delta$  — величины порядка  $l^2/R^2$  ( $l$  — характерный размер наименьшего из тел).

Заметим, что если

$$M_2 (A_2 - A_3) \sin^2 \theta_0 = M_1 (B_1 - B_2) \sin^2 \alpha_0$$

то в решении (2.6) будет  $\kappa_0 = \delta = 0$ .

Решения (2.3) — (2.5) существуют при условиях

$$M_0 \omega_0^2 R_0^3 = f \{M_1 M_2 - 3/2 R_0^{-2} [(2A_3 - A_1 - A_2) M_2 + (B_1 - B_2) M_1]\}$$

$$k_3 = 0, \quad k_2 \sin \theta_0 - k_1 \cos \theta_0 = 1/2 (A_1 - A_2) \omega_0 \sin^2 \theta_0$$

Решение (2.6) существует при условиях

$$M_0 \omega_0^2 R_0^2 \cos^2 \kappa_0 = f \{M_1 M_2 - 3/2 M_2 R_0^{-2} [(A_2 - A_3) \sin^2 \theta_0 + 1/3 (2A_3 - A_1 - A_2)] -$$

$$- 3/2 M_1 R_0^{-2} [B_1 \cos^2 (\alpha_0 - \kappa_0) + B_2 \sin^2 (\alpha_0 - \kappa_0) - 1/3 (2B_1 + B_2)]\}$$

$$k_1 = 0, \quad \omega_0 [k_2 \sin (\theta_0 + \kappa_0) - k_3 \cos (\theta_0 + \kappa_0)] + 1/2 (A_2 - A_3) \omega_0^2 \times$$

$$\times \sin^2 (\theta_0 + \kappa_0) + 3/2 f M_1 R^{-3} (A_2 - A_3) \sin 2 \theta_0 = 0$$

$$M_0 \omega_0^2 \sin 2\kappa_0 + 3f M_2 R_0^{-5} (A_1 - A_2) \sin 2(\alpha_{10} - \kappa_0) (A_2 - A_3) \sin 2\theta_0 +$$

$$+ 3f M_1 R_0^{-5} (B_1 - B_2) \sin 2(\alpha_0 - \kappa_0) = 0$$

Решения (2.3) — (2.6) описывают вращение сфероида и гиростата вокруг их общего центра масс  $G$  с угловой скоростью  $\omega_0 = (K/S)_0$ , причем сфероид для решений (2.3), (2.5), (2.6), кроме того, вращается вокруг своей оси  $y_2$  динамической симметрии со скоростью собственного вращения

$$\varphi' = K_\varphi / B_2 - \omega_0 \cos \alpha_0 \cos \beta_0$$

а для решения (2.4)  $\varphi' = 0$ . Для решений (2.3) — (2.5) плоскости движения центров масс сфероида и гиростата совпадают, ось  $x_3$  инерции гиростата направлена по линии центров масс  $PC$ . Ось  $y_2$  собственного вращения сфероида для решения (2.3) перпендикулярна плоскости орбиты, для решения (2.4) направлена по линии центров  $PC$ , а для решения (2.5) перпендикулярна линии центров  $PC$  и составляет постоянный угол  $\beta_0$  с осью  $\eta_2$ .

Для решения (2.6) линия  $PC$  центров масс гиростата и сфероида составляет постоянный угол  $\kappa_0$  с плоскостями орбит центров масс сфероида и гиростата, которые параллельны и отстоят одна от другой на расстояние  $R_0 \sin \kappa_0$ , имеющее порядок  $l^2/R$ ; главная ось  $x_1$  инерции гиростата направлена по скорости движения его центра масс,

величина  $\theta_0$  равна углу между осями  $\eta_2$  и  $x_2$ . Для гиростата, движущегося в центральном ньютоновском поле сил, такого рода движения впервые были найдены С. Я. Степановым [2] и Р. Е. Роберсоном [3,4].

3. Достаточные условия устойчивости указанных стационарных движений сфероида и гиростата могут быть получены как условия Сильвестра определенной положительности второй вариации функции  $W_1$ .

Легко проверить, что из условий устойчивости стационарных движений системы сфероид плюс гиростат по отношению к переменным

$$R, \kappa, \alpha, \beta, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, R', \kappa', \sigma', \alpha', \beta', \varphi', \beta_1', \beta_2', \beta_3', \gamma_1', \gamma_2', \gamma_3'$$

следующие два  $(\partial^2 W_1 / \partial \kappa^2)_0 > 0$ ,  $(\partial^2 W_1 / \partial R^2)_0 > 0$  всегда выполняются, если размеры тел значительно меньше расстояния между их центрами масс, а остальные достаточные условия устойчивости приводятся к следующему виду.

Для решения (2.3)

$$(B_2 - B_1) \omega_0 + B_2 \varphi' > 0, \quad \omega_0 (B_2 - B_1) \frac{M_2 + 3M_0}{M_2} + B_2 \varphi' > 0 \quad (3.1)$$

$$A_1 > A_3, \quad A_2 > A_3, \quad A_2 + \frac{k_2}{\omega_0 \cos \theta_0} > A_3, \quad A_2 + \frac{k_2}{\omega_0 \cos^3 \theta_0} > A_1 + \delta$$

для решения (2.4)

$$B_1 > B_2, \quad A_1 > A_3, \quad A_2 > A_3 \quad (3.2)$$

$$A_2 + \frac{k_2}{\omega_0 \cos \theta_0} > A_3, \quad A_2 + \frac{k_2}{\omega_0 \cos^3 \theta_0} > A_1 + \delta$$

для решения (2.5)

$$B_2 > B_1, \quad A_1 > A_3, \quad A_2 > A_3$$

$$A_2 + \frac{k_2}{\omega_0 \cos \theta_0} > A_3, \quad A_2 + \frac{k_2}{\omega_0 \cos^3 \theta_0} > A_1 + \delta \quad (3.3)$$

для решения (2.6)

$$B_1 > B_2, \quad A_1 - A_2 \sin^2 \theta_0 - A_3 \cos^2 \theta_0 > 0, \quad (A_2 - A_3) (1 - \operatorname{tg}^2 \theta_0) > 0$$

$$(A_2 - A_3) \left( 1 + \frac{3M_0}{M_1} \operatorname{tg}^2 \theta_0 \right) + \frac{k_2}{\omega_0 \cos^3 \theta_0} > 0 \quad (3.4)$$

$$(A_1 - A_2 \sin^2 \theta_0 - A_3 \cos^2 \theta_0) \left( A_2 - A_1 + \frac{k_2}{\omega_0 \cos \theta_0} \right) + \frac{3M_0}{M_1} (A_1 - A_2) (A_2 - A_3) \sin^2 \theta_0 > 0$$

где

$$\delta = \frac{3f (A_1 - A_2)^2 \sin^2 \theta_0}{S_0 R_0^3 (\partial^2 W_1 / \partial R^2)_0} \left\{ M_1 M_2 - \frac{5}{2R_0^3} [(2A_3 - A_1 - A_2) M_2 + (B_1 - B_2) M_1] \right\}$$

Анализируя полученные достаточные условия устойчивости (3.1) — (3.4) стационарных движений (2.3) — (2.6) системы сфероид плюс гиростат, нетрудно видеть, что каждая из групп достаточных условий устойчивости разбивается на две части. Одна содержит только моменты инерции сфероида, другая — только гиростата. Каждая из этих групп представляет условия устойчивости, аналогичные полученным В. В. Румянцевым [5] для соответствующих движений симметричного спутника и спутника-гиростата вокруг неподвижного притягивающего центра. В нашем случае роль притягивающего центра играет центр  $G$  масс системы.

4. Рассмотрим случай динамически симметричного гиростата, когда  $A_1 = A_3 \neq A_2$  и  $k_1 = k_3 = 0$ ,  $k_2 = \text{const}$ .

Рассматриваемая система наряду с интегралами (2.1) и (2.2) допускает еще интеграл

$$\partial L / \partial \varphi_1' = A_2 (\sigma' \cos \alpha_1 \cos \beta_1 + \varphi_1' + \alpha_1' \sin \beta_1) + k_2 = K \varphi_1 \quad (4.1)$$

выражающий постоянство проекции момента количества движения гиростата на его ось  $x_2$  динамической симметрии.

Игнорируя циклические координаты  $\sigma$ ,  $\varphi$  и  $\varphi_1$ , для измененной потенциальной энергии  $U$  системы получим выражение

$$U(R, \kappa, \alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1) = \frac{K_1^2}{2S_1} + \frac{K_\varphi^2}{2B_2} + \frac{(K_{\varphi_1} - k_2)^2}{2A_2} + \Pi$$

где

$$\begin{aligned} \Pi = & 3f \frac{M_2}{2R^3} \left\{ A_1 [\sin^2(\alpha_1 - \kappa) \sin^2 \beta_1 + \cos^2(\alpha_1 - \kappa)] + A_2 \sin^2(\alpha_1 - \kappa) \cos^2 \beta_1 - \right. \\ & \left. - \frac{2A_1 + A_2}{3} \right\} + \frac{3fM_1}{2R^3} \left\{ B_1 [\sin^2(\alpha - \kappa) \sin^2 \beta + \cos^2(\alpha - \kappa)] + \right. \\ & \left. + B_2 \sin^2(\alpha - \kappa) \cos^2 \beta - \frac{2B_1 + B_2}{3} \right\} - f \frac{M_1 M_2}{R} \\ S_1 = & M_0 R^2 \cos^2 \kappa + A_1 (\sin^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_1 \sin^2 \beta_1) + B_1 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta) \\ K_1 = & K_\sigma - K_\varphi \cos \alpha \cos \beta - K_{\varphi_1} \cos \alpha_1 \cos \beta_1 \end{aligned}$$

Стационарные движения системы определяются из уравнения

$$\delta U = 0$$

Это уравнение допускает следующие решения:

$$R = R_0, \kappa = 0, \alpha = 0, \beta = 0, \alpha_1 = 0, \beta_1 = 0 \quad (4.2)$$

$$R = R_0, \kappa = 0, \alpha = 0, \cos \beta = K_\varphi / \omega_0 B_1, \alpha_1 = 0, \cos \beta_1 = K_{\varphi_1} / \omega_0 A_1 \quad (4.3)$$

$$R = R_0, \kappa = 0, \alpha = 0, \beta = 0, \alpha_1 = 0, \cos \beta_1 = K_{\varphi_1} / \omega_0 A_1 \quad (4.4)$$

$$R = R_0, \kappa = 0, \alpha = 0, \cos \beta = K_\varphi / \omega_0 B_1, \alpha_1 = 0, \beta_1 = 0 \quad (4.5)$$

$$R = R_0, \kappa = 0, \alpha = 0, \beta = 0, \alpha_1 = 1/2 \pi, \beta_1 = 0, K_{\varphi_1} = 0 \quad (4.6)$$

$$R = R_0, \kappa = 0, \alpha = 1/2 \pi, \beta = 0, K_\varphi = 0, \alpha_1 = 0, \beta_1 = 0 \quad (4.7)$$

$$R = R_0, \kappa = 0, \alpha = 0, \cos \beta = K_\varphi / \omega_0 B_1, \alpha_1 = 1/2 \pi, \beta_1 = 0, K_{\varphi_1} = 0 \quad (4.8)$$

$$R = R_0, \kappa = 0, \alpha = 1/2 \pi, \beta = 0, K_\varphi = 0, \alpha_1 = 0, \cos \beta_1 = K_{\varphi_1} / \omega_0 A_1 \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} R = R_0, \kappa = \kappa_0, \cos \alpha = \cos \alpha_0 = & \frac{\omega_0 K_\varphi}{\omega_0^2 B_1 - 3f M_1 R_0^{-3} (B_2 - B_1)} + \delta_2, \beta = 0 \\ [\cos \alpha_{10} = & \frac{\omega_0 K_{\varphi_1}}{\omega_0^2 A_1 - 3f M_2 R_0^{-3} (A_2 - A_1)} + \delta_3, \beta_1 = 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Решения (4.2) — (4.9) существуют при условии

$$M_0 \omega_0^2 R_0^3 = f \{ M_1 M_2 - 3/2 R_0^{-2} [(A_2 - A_1) M_2 + (B_2 - B_1) M_1] \}$$

а решение (4.10) при условии

$$\begin{aligned} M_0 \omega_0^2 R_0^2 \cos^2 \kappa_0 = & f \left\{ M_1 M_2 - \frac{9M_2}{2R_0^3} \left[ A_1 \cos^2(\alpha_{10} - \kappa_0) + A_2 \sin^2(\alpha_{10} - \kappa_0) - \frac{2A_1 + A_2}{3} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{9M_1}{2R_0^3} \left[ B_1 \cos^2(\alpha_0 - \kappa_0) + B_2 \sin^2(\alpha_0 - \kappa_0) - \frac{2B_1 + B_2}{3} \right] \right\} \\ & M_0 \omega_0^2 R_0^5 \sin 2\kappa_0 + 3f M_2 (A_1 - A_2) \sin 2(\alpha_{10} - \kappa_0) + \\ & + 3f M_1 (B_1 - B_2) \sin 2(\alpha_0 - \kappa_0) = 0 \end{aligned}$$

где  $\kappa_0$ ,  $\delta_2$  и  $\delta_3$  — величины порядка  $l^2 / R^2$ .

Эти решения описывают стационарные движения сфероида и динамически симметричного гиростата вокруг их общего центра масс  $G$  с угловой скоростью  $\omega_0 = (K_1/S_1)_0$ .

причем, кроме того, сфероид вращается вокруг своей оси симметрии  $y_2$  со скоростью собственного вращения

$$\dot{\varphi} = K_{\varphi}/B_2 - \omega_0 \cos \alpha \cos \beta$$

а динамически симметричный гиростат вращается вокруг своей оси симметрии  $x_2$  со скоростью собственного вращения

$$\dot{\varphi}_1 = K_{\varphi_1}/A_2 - \omega_0 \cos \alpha_1 \cos \beta_1$$

В решениях (4.2) — (4.9) плоскости движения центров масс сфероида и динамически симметричного гиростата совпадают. В решении (4.10) плоскости этих орбит параллельны и отстоят одна от другой на расстояние  $R_0 \sin \kappa_0$ , имеющее порядок  $l^2/R$ .

Для решения (4.2) оси собственного вращения сфероида  $y_2$  и симметричного гиростата  $x_2$  перпендикулярны плоскости орбиты. Отметим, что это решение впервые было указано В. Т. Кондурарем [6,7].

Для решения (4.3) оси собственного вращения сфероида  $y_2$  и симметричного гиростата  $x_2$  перпендикулярны линии центров  $PC$  и соответственно составляют постоянные углы  $\beta_0$  и  $\beta_{10}$  с осью  $\eta_2$ .

Для решения (4.4) ось собственного вращения  $y_2$  сфероида перпендикулярна плоскости орбиты, а ось собственного вращения симметричного гиростата  $x_2$  перпендикулярна линии центров  $PC$  и составляет постоянный угол  $\beta_{10}$  с осью  $\eta_2$ .

Для решения (4.5) ось собственного вращения  $y_2$  сфероида перпендикулярна линии центров  $PC$  и составляет постоянный угол  $\beta_0$  с осью  $\eta_2$ , а ось собственного вращения  $x_2$  симметричного гиростата перпендикулярна плоскости орбиты.

Для решения (4.6) ось собственного вращения  $y_2$  сфероида перпендикулярна плоскости орбиты, а ось собственного вращения  $x_2$  симметричного гиростата направлена по линии центров  $PC$ , причем в этом случае гиростат не вращается относительно оси  $x_2$ .

Для решения (4.7) ось собственного вращения  $y_2$  сфероида направлена по линии центров  $PC$ , причем сфероид не вращается относительно оси  $y_2$ , ось собственного вращения  $x_2$  симметричного гиростата перпендикулярна плоскости орбиты.

Для решения (4.8) ось собственного вращения  $y_2$  сфероида перпендикулярна линии центров  $PC$  и составляет постоянный угол  $\beta_0$  с осью  $\eta_2$ , а ось собственного вращения  $x_2$  симметричного гиростата направлена по линии центров, причем в этом случае гиростат не вращается относительно оси  $x_2$ .

Для решения (4.9) ось собственного вращения  $y_2$  сфероида направлена по линии центров, причем сфероид не вращается относительно оси  $y_2$ , а ось собственного вращения  $x_2$  симметричного гиростата перпендикулярна линии центров и составляет постоянный угол  $\beta_{10}$  с осью  $\eta_2$ .

Для решения (4.10) линия  $PC$  центров составляет постоянный угол  $\kappa_0$  с плоскостями орбит центров масс сфероида и симметричного гиростата; оси симметрии  $y_2$  сфероида и  $x_2$  гиростата лежат в плоскости  $Q$  и составляют постоянные углы  $\alpha_0$  и  $\alpha_{10}$  с осью  $\eta_2$  соответственно.

5. Достаточные условия устойчивости указанных стационарных движений сфероида и симметричного гиростата могут быть получены как условия Сильвестра определенной положительности второй вариации функции  $U$ . Эти условия приводятся к следующему виду:

для решения (4.2)

$$\begin{aligned} K_{\varphi} > B_1 \omega_0, & \quad K_{\varphi} - B_1 \omega_0 + 3M_0 \omega_0 M_2^{-1} (B_2 - B_1) > 0 \\ K_{\varphi_1} > A_1 \omega_0, & \quad K_{\varphi_1} - A_1 \omega_0 + 3M_0 \omega_0 M_1^{-1} (A_2 - A_1) > 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

для решения (4.3)

$$B_2 > B_1, \quad A_2 > A_1 \quad (5.2)$$

для решения (4.4)

$$K_{\varphi} > B_1 \omega_0, \quad K_{\varphi} - \omega_0 B_1 + 3M_0 \omega_0 M_2^{-1} (B_2 - B_1) > 0, \quad A_2 > A_1 \quad (5.3)$$

для решения (4.5)

$$B_2 > B_1, \quad K_{\varphi_1} > A_1 \omega_0, \quad K_{\varphi_1} - A_1 \omega_0 + 3M_0 \omega_0 M_1^{-1} (A_2 - A_1) > 0 \quad (5.4)$$

для решения (4.6)

$$K_{\varphi} > B_1 \omega_0, \quad K_{\varphi} - B_1 \omega_0 + 3M_0 \omega_0 M_2^{-1} (B_2 - B_1) > 0, \quad A_1 > A_2 \quad (5.5)$$

для решения (4.7)

$$B_1 > B_2, \quad K_{\varphi_1} > A_1 \omega_0, \quad K_{\varphi_1} - A_1 \omega_0 + 3M_0 \omega_0 M_1^{-1} (A_2 - A_1) > 0 \quad (5.6)$$

для решения (4.8)

$$B_2 > B_1, \quad A_1 > A_2 \quad (5.7)$$

для решения (4.9)

$$B_1 > B_2, \quad A_1 > A_2 \quad (5.8)$$

для решения (4.10)

$$B_1 > B_2, \quad A_1 > A_2 \quad (5.9)$$

Условия (5.1) — (5.9) представляют достаточные условия устойчивости стационарных движений (4.2) — (4.10) по отношению к переменным

$$R, \kappa, \alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1, R', \kappa', \sigma', \alpha', \beta', \varphi', \alpha_1', \beta_1', \varphi_1'$$

На основании теоремы Кельвина [8] стационарные движения (4.2) — (4.10) будут неустойчивы, если в условиях (5.1) — (5.9) одно из неравенств заменить противоположным по знаку. Стационарные движения (4.4) — (4.7) будут неустойчивы также и в том случае, когда в условиях (5.3) — (5.6) одновременно заменить противоположными по знаку все три неравенства. Стационарное движение (4.2) будет неустойчиво, если одновременно заменить противоположными по знаку какие-либо три неравенства из условия (5.1).

Автор благодарит В. В. Румянцева за обсуждение работы.

Поступила 25 VII 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Д у б о ш и н Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М., Физматгиз, 1963.
2. С т е п а н о в С. Я. О стандартных движениях спутника-гиростата. ПММ, 1969, т. 33, вып. 1.
3. R o b e r s o n R. E. Circular orbits of noninfinitesimal material bodies in inverse square fields. J. Astron. Sci., 1968, vol. 15, No. 2.
4. R o b e r s o n R. E. Equilibria of orbiting Girostats. J. Astron. Sci., 1968, vol. 15, No. 5.
5. Р у м я н ц е в В. В. Об устойчивости стационарных движений спутников. М., ВЦ АН СССР, 1967.
6. К о н д у р а р ь В. Т. Проблема движения двух эллипсоидов под действием взаимного притяжения. Ч. 1, Астроном. ж., 1936, т. 13, вып. 6; ч. 2, Тр. Гос. астроном. ин-та им. Штернберга, 1939, т. 9, вып. 2; ч. 3—4, Тр. Гос. астроном. ин-та им. Штернберга, 1952, т. 21; ч. 5, Тр. Гос. астроном. ин-та им. Штернберга, 1954, т. 24.
7. К о н д у р а р ь В. Т. Частные решения общей задачи о поступательно-вращательном движении сфероида под действием притяжений шара. Астроном. ж., 1959, т. 36, вып. 5.
8. Ч е т а е в Н. Т. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике М., Изд-во АН СССР, 1962.