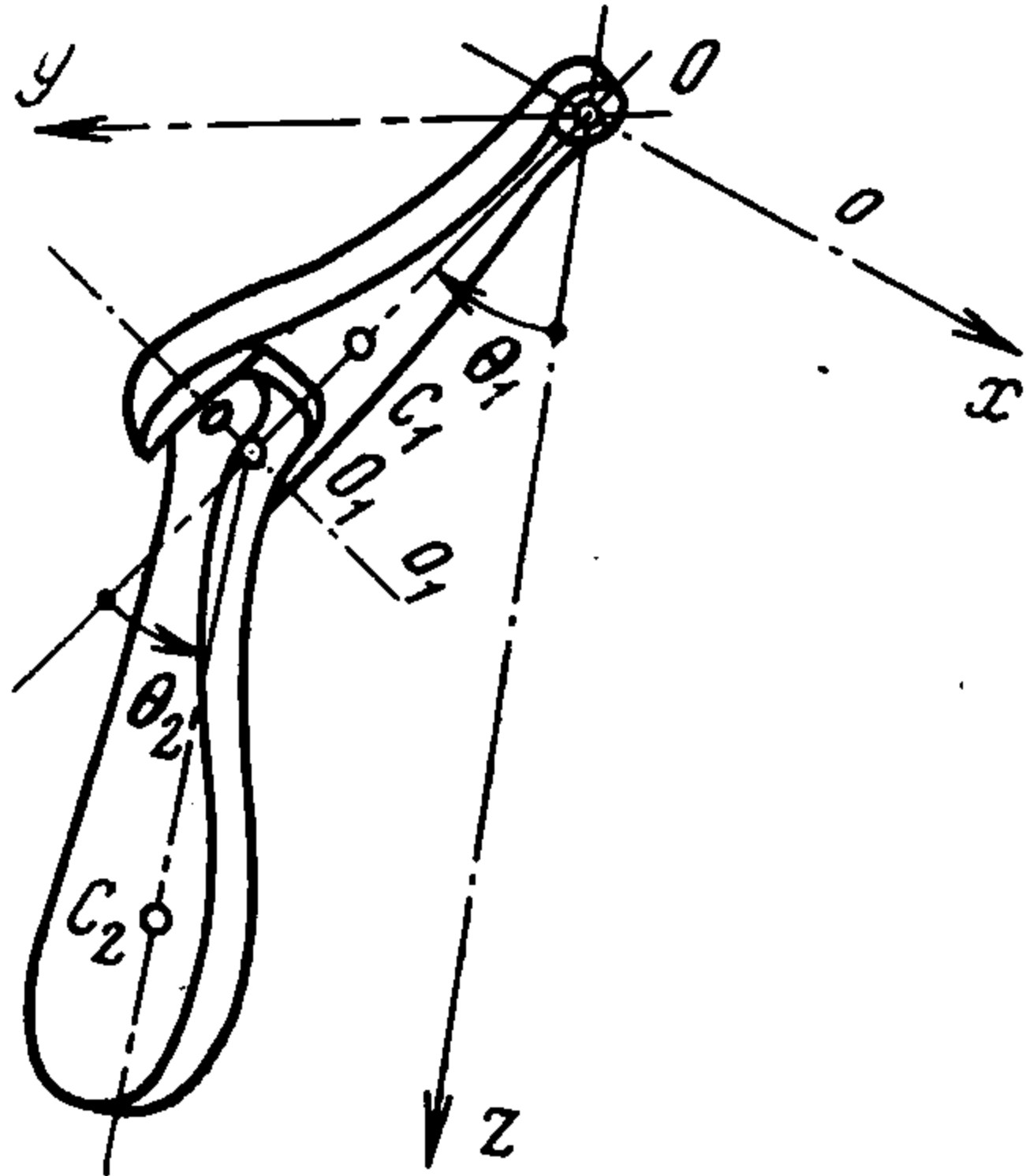


## РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ДВОЙНОГО МАЯТНИКА

Б. И. Чешанков

(София)

Исследуются резонансные колебания одной механической системы и выясняются особенности ее поведения. Колебания консервативных систем с двумя степенями свободы при внутреннем резонансе рассматривались в работах [1-5]. В последней работе Страбля предложено некоторое дополнение к существующим асимптотическим методам в теории нелинейных колебаний; результаты этой работы используются ниже.



Фиг. 1

1. Рассмотрим систему из двух последовательно связанных физических маятников (фиг. 1). Первый из них вращается около горизонтальной оси  $o$ , а второй — около оси  $o_1$ , принадлежащей первому маятнику и перпендикулярной  $o$ . В равновесном положении  $o_1$  горизонтальна. Обозначим центры тяжести двух физических маятников —  $C_1$  и  $C_2$ , их массы —  $M_1$  и  $M_2$ , точку пересечения прямой  $OC_1$  с осью  $o_1$  — буквой  $O_1$ , момент инерции первого маятника относительно оси, проходящей через  $C_1$  и параллельной  $o$  — буквой  $I_1$ , моменты инерции второго маятника относительно оси, проходящей через  $C_2$  и параллельной  $o_1$  — буквой  $I_{22}$ , проходящей через  $C_2$  и  $O_1$  — буквой  $I_{23}$ , проходящей через  $C_2$  и перпендикулярной двум другим осям —  $I_{21}$ . Будем считать, что  $I_{21}$ ,  $I_{22}$  и  $I_{23}$  — главные центральные моменты инерции второго маятника; пусть  $\theta_1$  — отклонение первого маятника от оси  $oz$ , а  $\theta_2$  — отклонение второго маятника от оси  $OC_1$ ; положим

$$OC_1 = a_1, O_1C_2 = a_2, OO_1 = b_1$$

В этих обозначениях имеем:

для кинетической энергии системы

$$T = \frac{1}{2} [I_1 + M_1 a_1^2 + I_{21} \cos^2 \theta_2 + I_{23} \sin^2 \theta_2 + M_2 (b_1 + a_2 \cos \theta_2)^2] \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} (I_{22} + M_2 a_2^2) \dot{\theta}_2^2 \quad (1.1)$$

для потенциальной энергии системы

$$\Pi = -g (M_1 a_1 + M_2 b_1) \cos \theta_1 - g M_2 a_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \quad (1.2)$$

Учитывая (1.1) и (1.2), находим дифференциальные уравнения движения

$$\begin{aligned} [I_1 + M_1 a_1^2 + I_{21} \cos^2 \theta_2 + I_{23} \sin^2 \theta_2 + M_2 (b_1 + a_2 \cos \theta_2)^2] \theta_1'' - \\ - [(I_{21} - I_{23} + M_2 a_2^2) \sin 2\theta_2 + 2M_2 b_1 a_2 \sin \theta_2] \theta_1' \theta_2' + \\ + g [M_1 a_1 + M_2 (b_1 + a_2 \cos \theta_2)] \sin \theta_1 = 0 \\ (I_{22} + M_2 a_2^2) \theta_2'' + [M_2 a_2 b_1 \sin \theta_2 + \frac{1}{2} (I_{21} - I_{23} + M_2 a_2^2) \sin 2\theta_2] \theta_1'^2 + \\ + g M_2 a_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2 = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Положим

$$\theta_1 = \varepsilon z_1, \quad \theta_2 = \varepsilon z_2, \quad \varepsilon — \text{малый параметр} \quad (1.4)$$

После некоторых преобразований из (1.3) получаем

$$\begin{aligned} [I_1 + M_1 a_1^2 + I_{21} + M_2 (b_1 + a_2)^2] z_1'' + g [M_1 a_1 + M_2 (b_1 + a_2)] z_1 = \varepsilon^2 F_1 \\ (I_{22} + M_2 a_2^2) z_2'' + g M_2 a_2 z_2 = \varepsilon^2 F_2 \\ F_1 = [I_{21} - I_{23} + M_2 a_2 (b_1 + a_2)] (z_1'' z_2^2 + 2z_1' z_2 z_2') + \frac{1}{6g} [M_1 a_1 + \\ + M_2 (b_1 + a_2)] z_1^3 + \frac{1}{2g} M_2 a_2 z_1 z_2^2 + \varepsilon^2 (\dots) + \dots \\ F_2 = - [I_{21} - I_{23} + M_2 a_2 (b_1 + a_2)] z_1'^2 z_2 + \frac{1}{6g} M_2 a_2 (3z_1^2 z_2 + z_2^3) + \varepsilon^2 (\dots) + \dots \end{aligned} \quad (1.5)$$

Введем безразмерное время

$$\tau = t \frac{g M_2 a_2}{I_{22} + M_2 a_2^2} \quad (1.6)$$

Тогда из (1.5) находим

$$\begin{aligned} z_1'' + \beta^2 z_1 &= \varepsilon^2 [ab(z_1'' z_2^2 + 2z_1' z_2 z_2') + 1/6 \beta^2 z_1^3 + 1/2 a z_1 z_2^2] \\ z_2'' + z_2 &= \varepsilon^2 [-b z_1'^2 z_2 + 1/6 z_2^3 + 1/2 z_1^2 z_2] \\ a &= \frac{I_{22} + M_2 a_2^2}{I_1 + I_{21} + M_1 a_1^2 + M_2 (b_1 + a_2)^2}, \quad b = \frac{I_{21} - I_{23} + M_2 a_2 (b_1 + a_2)}{I_{22} + M_2 a_2^2} \\ \beta^2 &= \frac{(I_{22} + M_2 a_2^2) [M_1 a_1 + M_2 (b_1 + a_2)]}{[I_1 + I_{21} + M_1 a_1^2 + M_2 (b_1 + a_2)^2] M_2 a_2 \theta} \end{aligned} \quad (1.7)$$

производные относительно  $\tau$  и члены, содержащие  $\varepsilon$  в степени выше второй, отброшены.

2. Рассмотрим теперь систему (1.7). Ищем решение в виде

$$\begin{aligned} z_1 &= A \cos(\beta\tau - \psi) + \varepsilon^2 z_{12} + \varepsilon^4 z_{14} + \dots \\ z_2 &= B \cos(\tau - \psi) + \varepsilon^2 z_{22} + \varepsilon^4 z_{24} + \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $A, B, \varphi, \psi$  — медленно меняющиеся функции  $\tau$ .

Подставляя (2.1) в (1.7), находим

$$\begin{aligned} &(A'' + 2\beta A\varphi' - A\varphi'^2) \cos(\beta\tau - \varphi) + \\ &+ (A\varphi'' - 2\beta A' + 2A'\varphi') \sin(\beta\tau - \varphi) + \varepsilon^2 (z_{12}'' + \beta^2 z_{12}) = \\ &= \varepsilon^2 \{ [1/4 AB^2 a (1 - 2b\beta^2) + 1/8 \beta^2 A^3] \cos(\beta\tau - \varphi) + 1/24 \beta^2 A^3 \cos(3\beta\tau - 3\varphi) + \\ &\quad + 1/8 aAB^2 (1 + 4b\beta - 2b\beta^2) \cos[(\beta - 2)\tau - \varphi + 2\psi] + \\ &\quad + 1/8 aAB^2 (1 - 4b\beta - 2b\beta^2) \cos[(\beta + 2)\tau - \varphi - 2\psi] \} \\ &(B'' + 2B\psi' - B\psi'^2) \cos(\tau - \psi) + (B\psi'' - 2B' + 2B'\psi') \sin(\tau - \psi) + \\ &+ \varepsilon^2 (z_{22}'' + z_{22}) = \varepsilon^2 \{ [1/4 A^2 B (1 - 2b\beta^2) + 1/8 B^3] \cos(\tau - \psi) + \\ &\quad + 1/24 B^3 \cos(3\tau - 3\psi) + 1/8 A^2 B (1 + 2b\beta^2) \cos[(2\beta - 1)\tau - 2\varphi + \psi] + \\ &\quad + 1/8 A^2 B (1 + 2b\beta^2) \cos[(2\beta + 1)\tau - 2\varphi - \psi] \} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь члены, содержащие  $\varepsilon$  в степени выше второй, отброшены. Из (2.2) выводим

$$\begin{aligned} A'' + 2\beta A\varphi' - A\varphi'^2 &= \varepsilon^2 [1/4 aAB^2(1 - 2b\beta^2) + 1/8 \beta^2 A^3], \quad A\varphi'' - 2\beta A' + 2A'\varphi' = 0 \\ B'' + 2B\psi' - B\psi'^2 &= \varepsilon^2 [1/4 A^2 B (1 - 2b\beta^2) + 1/8 B^3], \quad B\psi'' - 2B' + 2B'\psi' = 0 \\ z_{12}'' + \beta^2 z_{12} &= 1/8 AB^2 a (1 + 4b\beta - 2b\beta^2) \cos[(\beta - 2)\tau - \varphi + 2\psi] + \\ &\quad + 1/24 \beta^2 A^3 \cos(3\beta\tau - 3\varphi) + 1/8 AB^2 a (1 - 4b\beta - 2b\beta^2) \cos[(\beta + 2)\tau - \varphi - 2\psi] \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$z_{22}'' + z_{22} = 1/8 A^2 B (1 + 2b\beta^2) \cos[(2\beta - 1)\tau - 2\varphi + \psi] + 1/24 B^3 \cos(3\tau - 3\psi) + 1/8 A^2 B (1 + 2b\beta^2) \cos[(2\beta + 1)\tau - 2\varphi - \psi] \quad (2.4)$$

Уравнения (2.3) называются вариационными, а (2.4) — уравнения для возмущений [2-5]. Из (2.3) легко получаем

$$\begin{aligned} d\varphi / d\tau &= 1/16 \beta^{-1} \varepsilon^2 [2a(1 - 2b\beta^2) B^2 + \beta^2 A^2], \quad dA / d\tau = 0 \\ d\psi / d\tau &= 1/16 \varepsilon^2 [2(1 - 2b\beta^2) A^2 + B^2], \quad dB / d\tau = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Решение этой системы уравнений

$$\begin{aligned} \varphi &= 1/16 \beta^{-1} [2a(1 - 2b\beta^2) B_0^2 + \beta^2 A_0^2] \varepsilon^2 \tau + \varphi_0 \\ \psi &= 1/16 [2(1 - 2b\beta^2) A_0^2 + B_0^2] \varepsilon^2 \tau + \psi_0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь  $\varphi_0, \psi_0, A_0, B_0$  — постоянные интегрирования. Из (2.4) находим при  $\beta \neq 1$

$$\begin{aligned} z_{12} &= 1/32 (\beta - 1)^{-1} aAB^2 (1 + 4b\beta - 2b\beta^2) \cos[(\beta - 2)\tau - \varphi + 2\psi] - \\ &\quad - 1/192 A^3 \cos(3\beta\tau - 3\varphi) - \\ &\quad - 1/32 (\beta + 1)^{-1} aAB^2 (1 - 4b\beta - 2b\beta^2) \cos[(\beta + 2)\tau - \varphi - 2\psi] \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} z_{22} &= 1/32 \beta^{-1} (1 - \beta)^{-1} A^2 B (1 + 2b\beta^2) \cos[(2\beta - 1)\tau - 2\varphi + \psi] - \\ &\quad - 1/192 B^3 \cos(3\tau - 3\psi) - 1/32 \beta^{-1} (1 + \beta)^{-1} A^2 B (1 + 2b\beta^2) \cos[(2\beta + 1)\tau - 2\varphi - \psi] \end{aligned}$$

Итак, при  $\beta \neq 1$  решение системы (1.7) с точностью до членов, содержащих  $\varepsilon$  в степени не выше второй, имеет вид (2.1), где  $A, B, \varphi, \psi, z_{12}, z_{22}$  определяются выражениями (2.6) и (2.7).

3. Рассмотрим теперь и резонансное решение, когда  $\beta \approx 1$  и  $\beta = 1$ . Используя тождества

$$\begin{aligned} \cos [(\beta - 2)\tau - \varphi + 2\psi] &= \cos [2(\beta - 1)\tau - 2\varphi + 2\psi] \cos (\beta\tau - \varphi) + \sin [2(\beta - 1)\tau - 2\varphi + 2\psi] \sin (\beta\tau - \varphi) \\ \cos [(2\beta - 1)\tau - 2\varphi + \psi] &= \cos [2(\beta - 1)\tau - 2\varphi + 2\psi] \cos (\tau - \psi) - \sin [2(\beta - 1)\tau - 2\varphi + 2\psi] \sin (\tau - \psi) \end{aligned} \quad (3.1)$$

из (2.2) находим вместо (2.3) и (2.4) системы

$$\begin{aligned} A'' + 2\beta A\varphi' - A\varphi'^2 &= \varepsilon^2 \left\{ \frac{1}{8} \beta^2 A^3 + \frac{1}{4} aAB^2 (1 - 2b\beta^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8} aAB^2 (1 + 4b\beta - 2b\beta^2) \cos \lambda \right\} \\ - 2\beta A' + A\varphi'' + 2A'\varphi' &= \varepsilon^2 \frac{1}{8} aAB^2 (1 + 4b\beta - 2b\beta^2) \sin \lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B'' + 2B\psi' - B\psi'^2 &= \varepsilon^2 \left\{ \frac{1}{8} B^3 + \frac{1}{4} A^2B (1 - 2b\beta^2) + \frac{1}{8} A^2B (1 + 2b\beta^2) \cos \lambda \right\} \\ - 2B' + B\psi'' + 2B'\psi' &= -\varepsilon^2 \frac{1}{8} A^2B (1 + 2b\beta^2) \sin \lambda \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\lambda = 2(\beta - 1)\tau - 2\varphi + 2\psi \quad (3.3)$$

$$z_{12}'' + \beta^2 z_{12} = \frac{1}{8} aAB^2 (1 - 4b\beta - 2b\beta^2) \cos [(\beta + 2)\tau - \varphi - 2\psi] + \frac{1}{24} \beta^2 A^3 \cos (3\beta\tau - 3\varphi) \quad (3.4)$$

$$z_{22}'' + z_{22} = \frac{1}{8} A^2B (1 + 2b\beta^2) \cos [(2\beta + 1)\tau - 2\varphi - \psi] + \frac{1}{24} B^3 \cos (3\tau - 3\psi)$$

Из (3.4) получаем

$$z_{12} = -\frac{1}{32} (\beta + 1)^{-1} aAB^2 (1 - 4b\beta - 2b\beta^2) \cos [(\beta + 2)\tau - \varphi - 2\psi] - \frac{1}{192} A^3 \cos (3\beta\tau - 3\varphi) \quad (3.5)$$

$$z_{22} = -\frac{1}{32} \beta^{-1} (\beta + 1)^{-1} A^2B (1 + 2b\beta^2) \cos [(2\beta + 1)\tau - 2\varphi - \psi] - \frac{1}{192} B^3 \cos (3\tau - 3\psi)$$

Легко проверить, что любое решение системы

$$dA/d\tau = -\frac{1}{16} \varepsilon^2 aAB^2 (1 + 4b\beta - 2b\beta^2) \sin \lambda \quad (3.6)$$

$$d\varphi/d\tau = -\frac{1}{16} \varepsilon^2 \beta^{-1} [\beta^2 A^2 + 2a(1 - 2b\beta^2) B^2] + \varepsilon^2 \frac{1}{16} \beta a(1 + 4b\beta - 2b\beta^2) B^2 \cos \lambda$$

$$dB/d\tau = \frac{1}{16} \varepsilon^2 \beta^{-1} A^2B (1 + 2b\beta^2) \sin \lambda$$

$$d\psi/d\tau = \frac{1}{16} \varepsilon^2 [B^2 + 2(1 - 2b\beta^2) A^2] + \frac{1}{16} \varepsilon^2 \beta^{-1} (1 + 2b\beta^2) A^2 \cos \lambda$$

удовлетворяет системе (3.2) с точностью до членов второго порядка по  $\varepsilon$ .

Из первого и третьего уравнений системы (3.6) после исключения  $\tau$  и интегрирования находим

$$\sigma^2 A^2 + B^2 = \kappa^2 \quad \left( \sigma^2 = \frac{1 + 2b\beta^2}{a\beta(1 + 4b\beta - 2b\beta^2)} \right) \quad (3.7)$$

а  $\kappa^2$  — постоянная интегрирования.

Из (3.3), (3.6) и (3.7) получаем относительно двух переменных  $A$  и  $\lambda$  автономную систему

$$\begin{aligned} \frac{dA}{du} &= -\frac{1}{2} A \left( \frac{\kappa^2}{\sigma^2} - A^2 \right) \sin \lambda, \quad u = \frac{1 + 2b\beta^2}{8\beta} \varepsilon^2 \tau \\ \frac{d\lambda}{du} &= m + a^\circ \left[ \frac{\kappa^2}{\sigma^2} - (1 + b^\circ) A^2 \right] - \left( \frac{\kappa^2}{\sigma^2} - A^2 \right) \cos \lambda, \quad m = \frac{16(\beta - 1)}{\varepsilon^2(1 + 2b\beta^2)} \\ a^\circ &= \frac{[\beta + 2a(2b\beta^2 - 1)] \sigma^2}{1 + 2b\beta^2}, \quad b^\circ = \frac{\beta(4b\beta^2 + \beta - 2)}{[\beta + 2a(2b\beta^2 - 1)] \sigma^2} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Из (3.8) находим

$$\begin{aligned} \left\{ m + a^\circ \left[ \frac{\kappa^2}{\sigma^2} - (1 + b^\circ) A^2 \right] - \left( \frac{\kappa^2}{\sigma^2} - 2A^2 \right) \cos \lambda \right\} dA + \\ + \frac{1}{2} A \left( \frac{\kappa^2}{\sigma^2} - A^2 \right) \sin \lambda d\lambda = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Это уравнение имеет интеграл (3.10)

$$\frac{1}{2}mA^2 + \frac{1}{2}a^\circ \kappa^2 \sigma^{-2} A^2 - \frac{1}{4}a^\circ (1 + b^\circ) A^4 - \frac{1}{2}A^2 (\kappa^2 \sigma^{-2} - A^2) \cos \lambda = -\frac{1}{2}c_0$$

Здесь  $c_0$  — постоянная интегрирования. Интеграл (3.10) можно записать еще в виде

$$(a^* - \cos \lambda) A^4 - (b^* - e \cos \lambda) A^2 = c_0 \quad (3.11)$$

$$(a^* = \frac{1}{2} a^\circ (1 + b^\circ), b^* = m + a^\circ e, e = \kappa^2 \sigma^{-2})$$

4. Исследуем фазовые траектории для автономной системы (3.8) в плоскости  $XU$ , для которой  $X = A \cos \lambda$ ,  $Y = A \sin \lambda$ , т. е.  $A$  и  $\lambda$  будут естественными полярными координатами. Фазовые траектории определяются выражением (3.10) или (3.11) и все они симметричны относительно оси  $X$ . Ввиду (3.7) все реальные траектории лежат на границе или внутри круга  $X^2 + Y^2 = e$ . Определим в первую очередь особые точки системы (3.8). Из условий

$$dA / du = 0, \quad d\lambda / du = 0$$

находим особые точки

$$(a) \lambda_1 = 0, \quad A_1 = \left( \frac{m + e(a^\circ - 1)}{a^\circ(1 + b^\circ) - 2} \right)^{1/2} \quad (4.1)$$

$$(б) \lambda_2 = \pi, \quad A_2 = \left( \frac{e(1 + a^\circ) + m}{2 + a^\circ(1 + b^\circ)} \right)^{1/2} \quad (4.2)$$

$$(в) A_3 = \kappa/\sigma, \quad \cos \lambda_3 = a^\circ b^\circ - m/e \quad (4.3)$$

Величина  $m$  пропорциональна резонансной «расстройке»  $\beta - 1$ . В зависимости от  $m$  покажем различные случаи фазовых траекторий. Они связаны с особыми точками (а), (б) и (в), для которых значение  $m$  находится соответственно в интервалах

$$(a) \quad e(1 - a^\circ) < m < e(a^\circ b^\circ - 1)$$

$$(б) \quad e(1 + a^\circ) < m < e(a^\circ b^\circ - 1) \quad (e = \kappa^2 / \sigma^2)$$

$$(в) \quad e(a^\circ b^\circ - 1) < m < e(a^\circ b^\circ + 1)$$

На самом деле точка (в) — две точки на граничной окружности, расположенные симметрично относительно  $OX$ . Начало отсчета тоже особая точка, так как  $dA / du = 0$  при  $A = 0$ .

Таким образом можно установить следующие основные случаи.

$$1^\circ. \quad m < -e(1 + a^\circ)$$

В этом случае существует только одна особая точка — начало отсчета, которая является центром (фиг. 2), при этом амплитуда изменяется незначительно

$$2^\circ. \quad -e(1 + a^\circ) < m < e(1 - a^\circ)$$

Здесь существуют две особые точки — начало отсчета и точка (б). В этом случае можно выделить три различные картины поведения фазовых траекторий

$$2^\circ.1. \quad -e(1 + a^\circ) < m < -ea^\circ$$

$$2^\circ.2. \quad m = -ea^\circ$$

$$2^\circ.3. \quad -ea^\circ < m < e(1 - a^\circ)$$

которые показаны соответственно на фиг. 2.2—2.4

$$3^\circ. \quad e(1 - a^\circ) < m < e(a^\circ b^\circ - 1)$$

В этом случае имеются три особые точки — точка (б) и начало отсчета, которые будут центрами и точка (а), которая будет седлом. Фазовые траектории для этого случая показаны на фиг. 2.5

$$4^\circ. \quad e(a^\circ b^\circ - 1) < m < e(a^\circ b^\circ + 1)$$

Существуют четыре особые точки — (б) и начало координат, которые являются центрами и две точки (в) на граничной окружности, которые являются седлами. Фазовые траектории для этого случая показаны на фиг. 2.6

$$5^\circ. \quad e(a^\circ b^\circ + 1) < m$$

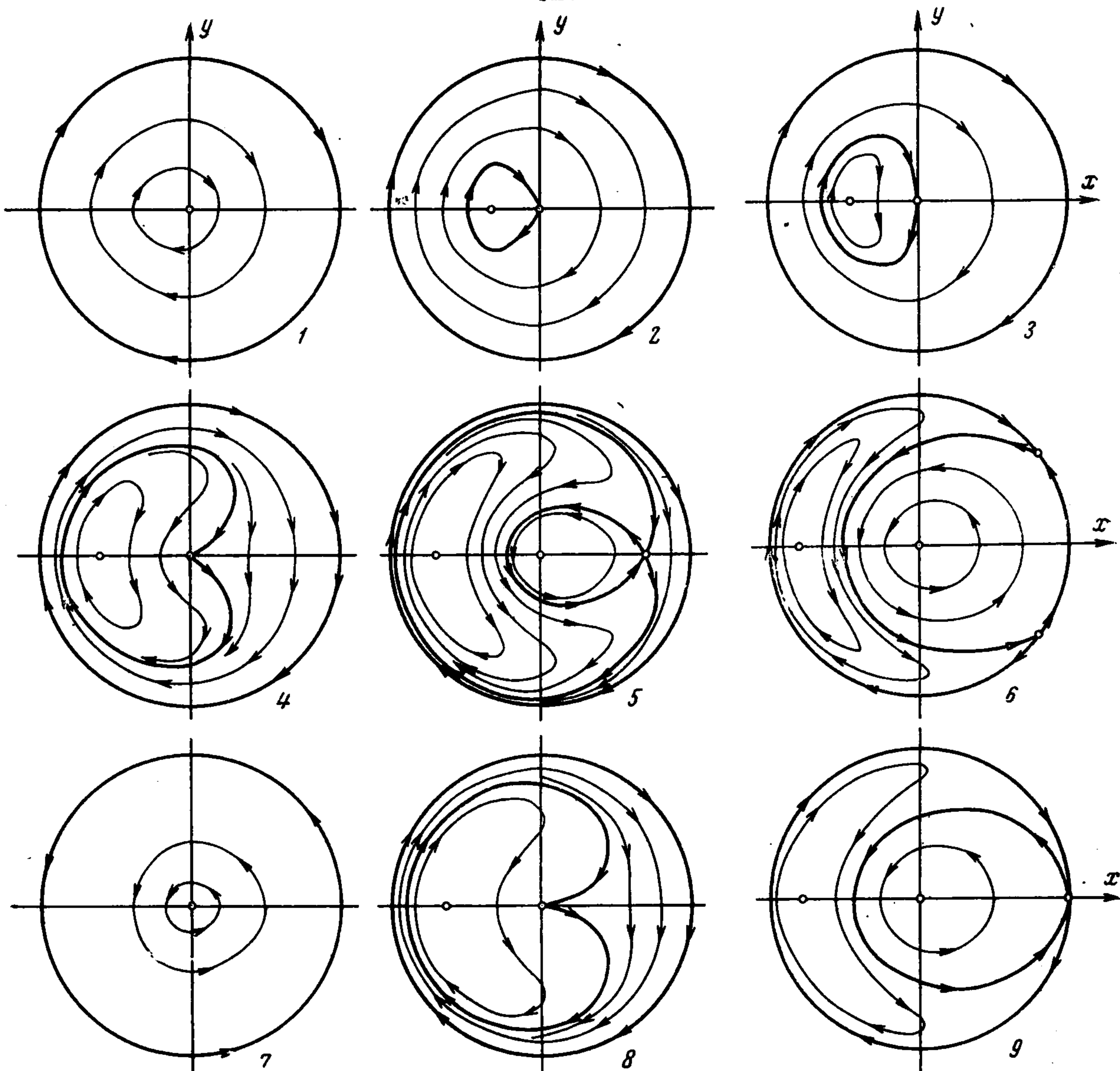
Так же, как и в первом случае, имеем только одну особую точку — начало отсчета, которая является центром. Фазовые траектории для этого случая показаны на фиг. 2.7.

Переходы от случая 2° к случаю 3° и от случая 3° к случаю 4° особо четко проявляются для предельных значений

$$m = e(1 - a^\circ), \quad m = e(a^\circ b^\circ - 1)$$

которые показаны на фиг. 2.8 и 2.9.

Из фиг. 2 вытекает, что для  $m < e(1 + a^\circ)$  картина фазовых траекторий не имеет особенностей, для  $m > -e(1 + a^\circ)$  сперва из начала отсчета выделяется точка (б) и



Фиг. 2

двигается влево (фиг. 2.2—2.4). Точка (б) будет центром, а начало отсчета из центра становится седловой точкой. После  $m = e(1 - a^\circ)$  из начала отсчета выделяется точка (а), которая движется вправо. Начало отсчета опять становится центром, а точка (а) будет седлом (фиг. 2.5). При  $m = e(a^\circ b^\circ - 1)$  точка (а) достигает граничной окружности и совпадает с точками (в) (фиг. 2.9). При  $m > e(a^\circ b^\circ + 1)$  точки (в) двигаются по граничной окружности справа влево и при  $m = e(a^\circ b^\circ + 1)$  снова совпадают в этот раз с точкой (б). Дальше при  $m > e(a^\circ b^\circ + 1)$  картина фазовых траекторий снова не имеет особенностей.

Фазовые траектории дают очень наглядную картину движений системы. Видно, что возможны движения с постоянной амплитудой — им отвечают точки типа центра, возможны движения с периодическими колебаниями амплитуды — им отвечают замкнутые фазовые траектории. Сепаратрисы и особые седловые точки соответствуют переходным (непериодическим) изменениям амплитуды.

В случаях 2—4° можно наблюдать перебрасывание энергии с одного маятника на другой — амплитуда колебания одного из маятников значительно уменьшается, в то время как амплитуда колебания другого маятника тоже значительно возрастает ввиду зависимости (3.7).

5. Найдем амплитуду  $A$  как функцию безразмерного времени  $\tau$ . Из (3.8) и (3.11) получаем

$$\frac{d\mu}{\pm \sqrt{(e - \mu)^2 \mu^2 - (c_0 + b^* \mu - a^* \mu^2)^2}} = d\tau \quad (\mu = A^2) \quad (5.1)$$

Рассмотрим полином

$$G(\mu) = (e - \mu)^2 \mu^2 - (c_0 + b^* \mu - a^* \mu^2)^2 \quad (5.2)$$

Корни полинома (5.2) совпадают с положительными корнями (для  $A^2$ ) уравнения (3.11) при  $\cos \lambda = 1$  и  $\cos \lambda = -1$ . Полином (5.2) для различных значений  $c_0$  и  $m$  имеет четыре реальных корня или два реальных и два комплексных корня, т. е. его можно записать как

$$G(\mu) = (1 - a^*) (\mu - \mu_1) (\mu - \mu_2) (\mu - \mu_3) (\mu - \mu_4) \quad (5.3)$$

$$1 - a^* < 0, \quad \mu_1 > \mu_2 > \mu_3 > \mu_4 > 0 \quad (5.4)$$

или как

$$G(\mu) = (1 - a^*) (\mu - \mu_1) (\mu - \mu_2) [(\mu - \nu)^2 + \omega^2]$$

$$\mu_1 > \mu_2 > 0, \quad \nu = \frac{a^* b^* - e}{a^* - 1} - \frac{1}{2} (\mu_1 + \mu_2)$$

$$\omega^2 = \frac{c_0^2}{\mu_1 \mu_2 (a^* - 1)} - \left[ \frac{a^* b^* - e}{a^* - 1} - \frac{1}{2} (\mu_1 + \mu_2) \right]^2 \quad (\omega > 0)$$

( $\nu$  и  $\omega$  можно получить и еще как комплексные корни (3.11) при  $\cos \lambda = \pm 1$ ).

Для некоторого значения  $c_0$  полином (5.2) будет иметь вид (5.4), если для этого значения  $c_0$  существует только одна фазовая траектория, которая пересекает оси  $X$  в точках с полярными радиусами  $A_1 = \sqrt{\mu_1}$  и  $A_2 = \sqrt{\mu_2}$ . Полином (5.2) будет иметь вид (5.3), если для некоторого значения  $c_0$  существуют две фазовые траектории, которые пересекают оси  $X$  — первая в точках с полярными радиусами  $A_3 = \sqrt{\mu_3}$  и  $A_4 = \sqrt{\mu_4}$  и вторая — в точках с полярными радиусами  $A_1 = \sqrt{\mu_1}$  и  $A_2 = \sqrt{\mu_2}$ .

Действительные корни находятся непосредственно при построении соответствующей фазовой траектории. В некоторых случаях, когда действительные корни больше  $e$ , им не отвечают действительные траектории.

Легко показать, что  $G(\mu)$  имеет вид (5.4) в случаях 1° и 2° для всех фазовых траекторий и в случае 4° для фазовых траекторий, которые замыкаются около центра (б), а также, что полином  $G(\mu)$  имеет вид (5.3) в случае 5° для всех фазовых траекторий в случае 4° для фазовых траекторий, которые замыкаются около начала отсчета. При этом  $\mu_1 > \mu_2 > e$ .

Для случая 3° дело несколько усложняется. Здесь важную роль имеет фазовая траектория  $\Phi_0$ , которая получается для  $c_0 = 0$ . При  $m = m^0 = \frac{1}{2} e a^0 (b^0 - 1)$  она совпадает с граничной окружностью, при  $m < m^0$  она находится внутри нее, при  $m > m^0$  она находится за пределами этой окружности.

Полином  $G(\mu)$  имеет вид (5.4) для фазовых траекторий, которые замыкаются около центра (б) и для тех, которые располагаются между граничной окружностью и  $\Phi_0$  (если последняя находится внутри граничной окружности).

Полином  $G(\mu)$  имеет вид (5.3). Для фазовых траекторий, которые замыкаются около начала отсчета и для тех, которые располагаются между внешней сепаратрисой через точки (а) и  $\Phi_0$ . Если  $\Phi_0$  находится вне граничной окружности, может оказаться, что  $\mu_1 > \mu_2 > e$ .

В первую очередь рассмотрим случай, когда  $G(\mu)$  имеет вид (5.3). Положим

$$k^2 = \frac{(\mu_3 - \mu_4)(\mu_2 - \mu_1)}{(\mu_3 - \mu_1)(\mu_2 - \mu_4)}, \quad l^2 = \frac{4}{(\mu_1 - \mu_3)(\mu_2 - \mu_4)} \quad (5.5)$$

Тогда, пользуясь [6] стр. 19—21 из (5.1), получим для  $\mu$  в интервале  $\mu_4 \leq \mu \leq \mu_3$

$$\mu = A^2 = \frac{\mu_4 (\mu_1 - \mu_3) + \mu_1 (\mu_3 - \mu_4) \operatorname{sn}^2 U}{\mu_1 - \mu_3 - (\mu_1 - \mu_2) \operatorname{sn}^2 U} \quad \left( U = \frac{\sqrt{a^* - 1} (u - u_0)}{l} \right) \quad (5.6)$$

где модуль эллиптической функции Якоби  $k$  определяется выражением (5.5), а  $u_0$  есть значение параметра  $u$  для  $\mu = \mu_4$ .

Для  $\mu$  в интервале  $\mu_2 \leq \mu \leq \mu_1$  имеем

$$\mu = \frac{\mu_2 (\mu_1 - \mu_3) - \mu_3 (\mu_1 - \mu_2) \operatorname{sn}^2 U}{\mu_1 - \mu_3 + (\mu_3 - \mu_4) \operatorname{sn}^2 U} \quad (5.7)$$

где модуль  $k$  имеет то же значение, как и в (5.6), а  $u_0$  есть значение параметра  $u$  для  $\mu = \mu_2$ .

Период долгопериодических колебаний амплитуды  $A$  по отношению времени  $\tau$  определяется формулой

$$\varepsilon^2 T = \frac{16\beta l}{(1 + 2b\beta^2) \sqrt{a^* - 1}} K(k) \quad (5.8)$$

Здесь  $K(k)$  есть полный эллиптический интеграл первого рода в форме Лежандра с модулем  $k$ . Выражение (5.8) явно подтверждает медленное изменение амплитуды  $A$  (респективно амплитуды  $B$  и фаз  $\varphi$  и  $\psi$ ). Видно еще, что период изменения  $A$  для двух случаев (5.6) и (5.7) один и тот же, хотя сами движения совершенно различны.

Рассмотрим и случай, когда  $G(\mu)$  имеет вид (5.4). Здесь обозначим ([6], стр. 19—21)

$$\operatorname{tg} p = \frac{\mu_1 - \nu}{\omega}, \quad \operatorname{tg} q = \frac{\mu_2 - \nu}{\omega} \quad (5.9)$$

Для  $\mu$  в интервале  $\mu_2 \leq \mu \leq \mu_1$  получаем

$$\mu = \frac{\mu_1 \cos p + \mu_2 \cos q + (\mu_1 \cos p - \mu_2 \cos q) \operatorname{cn} U}{\cos p + \cos q + (\cos p - \cos q) \operatorname{cn} U} \quad (5.10)$$

где модуль эллиптической функции Якоби  $k$  и величина  $l$  определяются выражениями

$$k^2 = \sin^2 \frac{p - q}{2}, \quad l = - \frac{(\cos p \cos q)^{1/2}}{\omega} \quad (5.11)$$

и  $u_0$  есть значение параметра  $u$  для  $\mu = \mu_1$ .

Период колебаний амплитуды  $A$  в этом случае определяется опять выражением (5.8), с той разницей, что  $k$  и  $l$  имеют значения (5.11).

После определения  $A$  как функции  $\tau$ , используя (3.7), можно определить в  $B$  как функции  $\tau$ .

Надо отметить, что полученное резонансное решение системы (1.7) справедливо и для нерезонансного случая  $\beta \neq 1$ .

Поступила 7 III 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В и т т А., Г о р е л и к Г. Колебания упругого маятника как пример колебаний двух параметрически связанных линейных систем. Ж. техн. физ., 1933, т. 3, вып. 2—3, стр. 294.
2. S t r u b l e R. A., H e i n b o c k e l J. H. Resonant oscillations of a beam — pendulum system. Transactions of the ASME, E. J. Appl. Mech., 1963, vol. 30, No 2, pp. 181—188.
3. H e i n b o c k e l J. H., S t r u b l e R. A. Resonant oscillations of extensible pendulum. Z. angew. Math. und. Phys., 1963, vol. 14, No 3, pp. 262—269.
4. S t r u b l e R. A., W a r m b r o d G. K. Free resonant oscillations of a conservative two — degree — of — freedom system. J. Franklin Inst., 1964, vol. 278, No 3, pp. 195—209.
5. S t r u b l e R. A. Nonlinear differential equations, McGraw — Hill book Co., New York, 1962, chap. 8.
6. В е й т м е н Г., Э р д е й и А. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье, М., «Наука», 1967.