О ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ В ТЕОРИИ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

В. Г. Немиров

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается задача о сосредоточенных воздействиях на круговую цилиндрическую оболочку из упругого изотропного материала. В двумерной постановке (основанной на гипотезах Кирхгофа — Лява) такая задача, как известно, сводится к построению функции Грина для эллиптического уравнения относительно разрешающей функции.

В работах [1,2] при помощи преобразования Фурье было получено фундаментальное решение в замкнутом виде для уравнений пологой цилиндрической оболочки. В работе [3] при построении фундаментального решения уравнений теории оболочек положительной гауссовой кривизны использован метод теории обобщенных функций [4].

Ниже строятся фундаментальные решения для наиболее распространенных вариантов теории непологой круговой цилиндрической оболочки (В. З. Власова [5], А. Л. Гольденвейзера [6], А. Лява [7], В. В. Новожилова [8]). В отличие от [1-3] используется «классический» метод плоских волн и сферических средних [9], позволяющий, можно сказать, алгоритмически и элементарными средствами строить с любой точностью фундаментальное решение для эллиптического оператора с постоянными коэффициентами.

Дается качественный анализ фундаментальных решений. Приводится способ усиления сходимости периодического фундаментального решения. Отмечается ошибочность одного представления, связанного с расчетом на сосредоточенные моментные воздействия. Вопрос о пределах применимости прикладной теории оболочек при расчете на локальные нагрузки не затрагивается.

1. Строится фундаментальное решение для оператора вида

$$\Delta^4 + f\frac{\partial^6}{\partial\alpha^6} + g\frac{\partial^6}{\partial\alpha^4\partial\beta^2} + l\frac{\partial^6}{\partial\alpha^2\partial\beta^4} + 2\frac{\partial^6}{\partial\beta^6} + \frac{1-\sigma^2}{a^2}\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} + v\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial\beta^4} \qquad \left(a^2 = \frac{h^2}{3R^2}\right) \tag{1.1}$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, R — радиус, h — полутолщина оболочки, α, β — безразмерные продольная и поперечная координаты, σ — коэффициент Пуассона.

Оператор (1.1) соответствует рассматриваемым вариантам теории круговой цилиндрической оболочки при следующих значениях коэффициентов:

	[5]	[6]	[7]	[8]
$f=$	2σ	0	0	0
$g=$	6	$8-2\sigma^2$	$7-\sigma^2$	2
$l=$	$8-2\sigma$	8	8	4
$v=$	2	4	4	0

Согласно [9], сингулярная (Φ_1) и регулярная (Φ_2) части фундаментального решения Φ ($\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$) в случае четного n и $n < m$ имеют вид

$$(2\pi i)^n \Phi_1(x, y) = -(\Delta_y)^{1/2 n}\int\limits_{\Omega} \nu(x, \xi, y\xi)\ln|(x-y)\xi|\,d\omega \tag{1.2}$$

$$(2\pi i)^n \Phi_2(x,y) = -(\Delta_y)^{1/2n}\int\limits_\Omega d\omega \int\limits_0^{(x-y)\xi} \frac{\nu(x,\xi,t+y\xi)-\nu(x,\xi,y\xi)}{t}\,dt \tag{1.3}$$

$$\nu(x,\xi,p) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{e^{(x\xi-p)\lambda'}}{\lambda P(\lambda\xi)}\,d\lambda \tag{1.4}$$

Здесь m — порядок оператора, $x\,(x_1,\ldots,x_n)$ — вектор в n-мерном пространстве; y — фиксированный вектор, направленный из начала координат в особую точку; $P(\lambda\xi)$ — полином, получающийся из эллиптического оператора символической заменой дифференцирования по $x_1,\ldots,x_n$ умножением на $\lambda\xi_1,\ldots,\lambda\xi_n$; $x\xi$ — скалярное произведение; индекс Ω у интеграла означает интегрирование по сфере единичного радиуса в пространстве $\{\xi\}$, интегрирование по λ проводится по замкнутому контуру C на комплексной λ-плоскости, который охватывает все корни $\lambda P(\lambda\xi)$.

Простыми преобразованиями получаем для случая $n = 2$

$$\Delta_y[\nu\ln|(x-y)\xi|] = \left[\frac{\partial^2\nu}{\partial p^2}\ln|x\xi-p| - 2\frac{\partial\nu}{\partial p}\frac{1}{(x\xi-p)} - \frac{\nu}{(x\xi-p)^2}\right]_{p=y\xi} \tag{1.5}$$

$$\Delta_y\nu = \left(\frac{\partial^2\nu}{\partial p^2}\right)_{p=y\xi}, \quad \left(\frac{\partial^2\nu}{\partial p^2}\right)_{p=y\xi} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{e^{(x-y)\xi\lambda}\lambda}{P(\lambda\xi)}\,d\lambda \tag{1.6}$$

$$\left(\frac{\partial\nu}{\partial p}\right)_{p=y\xi} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{e^{(x-y)\xi\lambda}}{P(\lambda\xi)}\,d\lambda \tag{1.7}$$

Подставляя (1.5) в (1.2) и (1.6) в (1.3), получим

$$\begin{gathered}-(2\pi i)^2\Phi_1(x,y) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Omega \ln|(x-y)\xi|\,d\omega\int\limits_C \frac{e^{(x-y)\xi\lambda}\lambda}{P(\lambda\xi)}\,d\lambda + \\ + \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Omega \frac{d\omega}{(x-y)\xi}\int\limits_C \frac{e^{(x-y)\xi\lambda}}{P(\lambda\xi)}\,d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Omega \frac{d\omega}{[(x-y)\xi]^2}\int\limits_C \frac{e^{(x-y)\xi\lambda}}{\lambda P(\lambda\xi)}\,d\lambda \\ -(2\pi i)^2\Phi_2(x,y) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Omega d\omega\int\limits_0^{(x-y)\xi}\frac{dt}{t}\int\limits_0 \frac{e^{(x-y)\xi\lambda-t\lambda} - e^{(x-y)\xi\lambda}}{P(\lambda\xi)}\,\lambda d\lambda\end{gathered} \tag{1.8}$$

Отметим, что второе и третье слагаемые Φ_1 регулярны. Полином $P(\lambda\xi)$ имеет в рассматриваемой задаче следующий вид:

$$\begin{aligned}P(\lambda\xi) = \lambda^8 + (f\xi_1^6 + g\xi_1^4\xi_2^2 + l\xi_1^2\xi_2^4 + 2\xi_2^6)\lambda^6 + \\ + [(1-\sigma^2)a^{-2}\xi_1^4 + v\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_2^4]\lambda^4\end{aligned} \tag{1.9}$$

Формула (1.9) написана с учетом соотношения $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1$, так как полином $(\lambda\xi)$ будет использован на единичной окружности.

Выполняем в (1.8) интегрирование по λ при помощи вычетов и разлагаем получившиеся при этом экспоненты в ряды Тейлора; в результате имеем

$$\begin{gathered}4\pi^2\Phi_1(x,y) = \int\limits_\Omega \ln|(x-y)\xi|\left\{\frac{[(x-y)\xi]^6}{6!} + \frac{[(x-y)\xi]^8}{8!}(\lambda_1^2+\lambda_2^2) + \right. \\ \left. + \frac{[(x-y)\xi]^{10}}{10!}(\lambda_1^4+\lambda_1^2\lambda_2^2+\lambda_2^4) + \frac{[(x-y)\xi]^{12}}{12!}(\lambda_1^6+\lambda_1^4\lambda_2^2+\lambda_1^2\lambda_2^4+\lambda_2^6)+\cdots\right\}d\omega + \\ + 2\int\limits_\Omega\left\{\frac{[(x-y)\xi]^6}{7!} + \frac{[(x-y)\xi]^8}{9!}(\lambda_1^2+\lambda_2^2)+\cdots\right\}d\omega - \\ - \int\limits_\Omega\left\{\frac{[(x-y)\xi]^6}{8!} + \frac{[(x-y)\xi]^6}{10!}(\lambda_1^2+\lambda_2^2)+\cdots\right\}d\omega\end{gathered} \tag{1.10}$$

$$4\pi^2\Phi_2(x,\ y)=\int\limits_{\Omega}\left\{\int\limits_0^1\frac{(1-t)^6-1}{t}\,dt\,\frac{[(x-y)\,\xi]^6}{6!}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^1\frac{(1-t)^8-1}{t}\,dt\,\frac{[(x-y)\,\xi]^8}{8!}\,(\lambda_1^2+\lambda_2^2)+\cdots\right\}d\omega \qquad (1.11)$$

Здесь λ_1, λ_2 — ненулевые корни $P(\lambda\xi)$.

Переходя к полярной системе безразмерных координат $(r,\ \varphi)$ с началом в особой точке, преобразуем (1.10), (1.11) к виду

$$4\pi^2\Phi_1(r,\ \varphi)=\ln r\left[\frac{r^6}{6!}\int\limits_0^{2\pi}\cos^6(\varphi-\eta)\,d\eta+\right. \qquad (1.12)$$

$$\left.+\frac{r^8}{8!}\int\limits_0^{2\pi}\cos^8(\varphi-\eta)(\lambda_1^2+\lambda_2^2)\,d\eta+\cdots\right]+\frac{r^6}{6!}\int\limits_0^{2\pi}\ln|\cos(\varphi-\eta)|\cos^6(\varphi-\eta)\,d\eta+$$

$$+\frac{r^8}{8!}\int\limits_0^{2\pi}\ln|\cos(\varphi-\eta)|\cos^8(\varphi-\eta)(\lambda_1^2+\lambda_2^2)\,d\eta+\cdots+$$

$$+\left(\frac{2}{7!}-\frac{1}{8!}\right)r^6\int\limits_0^{2\pi}\cos^6(\varphi-\eta)\,d\eta+\left(\frac{2}{9!}-\frac{1}{10!}\right)r^8\int\limits_0^{2\pi}\cos^8(\varphi-\eta)(\lambda_1^2+\lambda_2^2)\,d\eta+\cdots$$

$$4\pi^2\Phi_2(r,\ \varphi)=\frac{r^6}{6!}\int\limits_0^1\frac{(1-t)^6-1}{t}\,dt\int\limits_0^{2\pi}\cos^6(\varphi-\eta)\,d\eta+$$

$$+\frac{r^8}{8!}\int\limits_0^1\frac{(1-t)^8-1}{t}\,dt\int\limits_0^{2\pi}\cos^8(\varphi-\eta)(\lambda_1^2+\lambda_2^2)\,d\eta+\cdots$$

При этом

$$\lambda_1^2+\lambda_2^2=-f\cos^6\eta-g\cos^4\eta\sin^2\eta-l\cos^2\eta\sin^4\eta-2\sin^6\eta \qquad (1.13)$$

$$\lambda_1^4+\lambda_1^2\lambda_2^2+\lambda_2^4=(\lambda_1^2+\lambda_2^2)^2-\lambda_1^2\lambda_2^2,\ \lambda_1^2\lambda_2^2=(1-\sigma^2)\,a^{-2}\cos^4\eta+v\cos^2\eta\sin^2\eta+\sin^4\eta$$

и т. д.

2. Рассмотрим некоторые качественные вопросы. Оценивая интегралы, фигурирующие в (1.12), убеждаемся, что среди членов полинома $P(\lambda\xi)$, которые соответствуют четвертым производным, преобладающую роль играет $(1-\sigma^2)a^{-2}\cos^4\eta$, а остальными можно пренебречь (для не очень длинных оболочек, [10], стр. 544) во всем процессе построения фундаментального решения. Вообще, из любой суммы, стоящей в подынтегральном выражении, следует оставлять только слагаемое с коэффициентом $(1-\sigma^2)a^{-2}$. Например, беря интегралы

$$\int\limits_0^{2\pi}\cos^{10}(\varphi-\eta)(\lambda_1^4+\lambda_1^2\lambda_2^2+\lambda_2^4)\,d\eta,\qquad \int\limits_0^{2\pi}\ln|\cos(\varphi-\eta)|\cos^{10}(\varphi-\eta)(\lambda_1^4+\lambda_1^2\lambda_2^2+\lambda_2^4)\,d\eta$$

можно для всех исследуемых операторов положить $(\lambda_1^4+\lambda_1^2\lambda_2^2+\lambda_2^4)$ равным $(1-\sigma^2)\,a^{-2}\cos^4\eta$, что значительно упрощает вычисления.

Легко видеть, что для нечетных членов сингулярного и регулярного рядов отмеченное упрощение эквивалентно их вычислению по теории пологих оболочек.

	[5]	[6]	[7]	[8]
s_1	5.12—1.12σ	21.62—4.12σ²	19.56—2.06σ²	7
s_2	82.38—16.38σ	191.88—27.38σ²	178.19—13.69σ²	77
s_3	171.38—27.38σ	236.88—16.38σ²	228.69—8.19σ²	133
s_4	70.12—4.12σ	74.62—1.12σ²	74.06—0.57σ²	63
s_5	107.25	107.25	107.25	107.25
s_6	49.50	49.50	49.50	49.50
s_7	2.25	2.25	2.25	2.25
γ_1	46.06+132.34σ	56.37—10.37σ²	51.00—0.70σ²	3.60
γ_2	416.16+119.06σ	483.44—67.61σ²	449.58—33.85σ²	32.60
γ_3	557.48—22.27σ	599.38—41.90σ²	578.43—20.95σ²	54.40
γ_4	187.33—8.98σ	190.41—28.24σ²	188.90—1.51σ²	25.40
γ_5	297.56	297.56	297.56	297.56
γ_6	140.96	140.96	140.96	140.96
γ_7	6.62	6.62	6.62	6.62

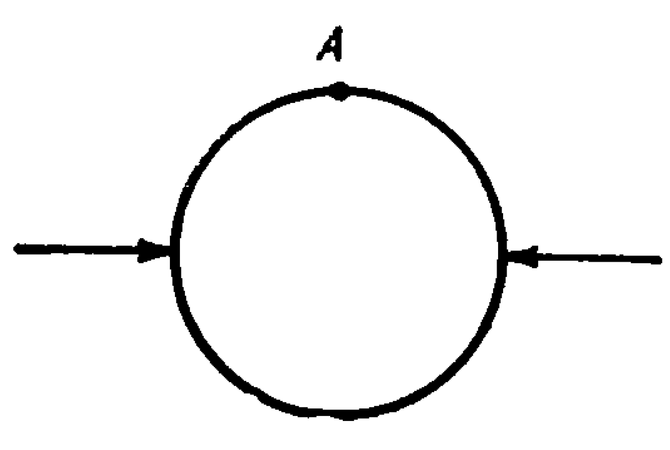
Все четные члены фундаментального решения имеют под соответствующими интегралами множитель $(\lambda_1^2+\lambda_2^2)$, обусловленный наличием в уравнении шестых производных. В связи с этим уместно коснуться следующего вопроса. В [10] (стр. 535, формула (2.8)) указывается, что слагаемым $(7-\sigma^2)k^2$ в выражении $6k^4-(7-\sigma^2)k^2+(1-\sigma^2)a^{-2}$ можно пренебречь, так как при малых k оно мало по сравнению с $(1-\sigma^2)a^{-2}$, а при больших k — по сравнению с $6k^4$ (k — номер гармоники в тригонометрическом ряде по координате β). Однако из (1.13) видно, что роль этого слагаемого в фундаментальном решении такая же, как и остальных шестых производных, поэтому, если быть последовательными, надо либо все шестые производные сохранять, либо все отбрасывать.

Отбрасывание шестых производных с учетом сказанного выше о четвертых производных означает полный переход к теории пологих оболочек, при этом все четные члены фундаментального решения обращаются в нуль.

Для рассматриваемых вариантов теории круговой цилиндрической оболочки приводим трехчленные выражения сингулярной и регулярной частей фундаментального решения (значения коэффициентов $s_1,\ldots,s_7$, $\gamma_1,\ldots,\gamma_7$ приведены в таблице)

$$\Phi(r,\varphi)=\frac{1}{\pi}\ln r\left[\frac{r^6}{576\cdot 8}-\frac{r^8}{8!\,2^8}(s_1\cos^6\varphi+s_2\cos^4\varphi\sin^2\varphi+s_3\cos^2\varphi\sin^4\varphi+s_4\sin^6\varphi)-\right.$$
$$\left.-\frac{r^{10}}{10!\,2^{10}}(1-\sigma^2)a^{-2}(s_5\cos^4\varphi+s_6\cos^2\varphi\sin^2\varphi+s_7\sin^4\varphi)\right]-$$
$$-\frac{r^6\cdot 22{,}6}{6!\,2^6\pi}+\frac{r^8}{8!\,2^8\pi}(\gamma_1\cos^6\varphi+\gamma_2\cos^4\varphi\sin^2\varphi+\gamma_3\cos^2\varphi\sin^4\varphi+\gamma_4\sin^6\varphi)+$$
$$+\frac{r^{10}}{10!\,2^{10}\pi}(1-\sigma^2)a^{-2}(\gamma_5\cos^4\varphi+\gamma_6\cos^2\varphi\sin^2\varphi+\gamma_7\sin^4\varphi)+\cdots \qquad (2.1)$$

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Внутренние изгибающие моменты при действии нормальной сосредоточенной силы имеют логарифмическую особенность. Разные фундаментальные решения (определенные с точностью до регулярного решения однородного уравнения) дают разные регулярные добавки к сингулярной части, и так как логарифм — слабая особенность, эти добавки на расстояниях порядка h могут быть с ними сравнимы, что наглядно иллюстрируется асимптотическим представлением решения [2]



Фиг. 1

$$\ln r\sqrt{R/h}=\ln r+{}^1\!/_2\ln(R/h)$$

Из этого примера вытекает, что фундаментальные решения — условные критерии при оценке прочности оболочки даже в малой окрестности локального воздействия.

Изложим некоторые соображения по поводу фундаментального решения [2]. Указанное решение асимптотически затухает в поперечном направлении как

$$(\beta \sqrt{R/h})^{-0.5} e^{-\beta \sqrt{R/h}} \qquad (\alpha = 0, \quad \beta \to \infty)$$

что противоречит физической картине, так как, например, при изгибе цилиндрической оболочки двумя сосредоточенными силами (фиг. 1) зона A оказывается свободной от напряжений и деформаций. Решение [2] затухает и в продольном направлении. По-видимому, это можно объяснить [11] выбором уравнений теории пологих оболочек (для «непологих» уравнений в [10,11] получено решение, имеющее степенной рост в продольном направлении). Вопрос же, почему решение [2] затухает в поперечном направлении, остается неясным. Поэтому отказ от требования периодичности вряд ли можно мотивировать тем [1], что решение быстро затухает в окружном направлении. Кроме того, снижаются достоинства решения [2] в плане аналитически корректного описания напряженно-деформированного состояния и численной его оценки на некотором удалении от зоны локального воздействия.

3. Методами, примененными в данной работе и в [1-3], фундаментальные решения строятся в полном пространстве аргументов. Вероятно, такие решения следует использовать при расчете открытых цилиндрических оболочек. В случае же замкнутой цилиндрической оболочки характеру задачи более соответствует прием усиления сходимости, использованный в [10,11]. Этот прием можно развить в процесс, обеспечивающий сколь угодно значительное улучшение сходимости. Выкладки получаются наиболее простыми, если воспользоваться уравнениями В. В. Новожилова [8].

В [10] решение получено в виде ряда

$$\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\alpha) \cos k\beta, \qquad f_k(\alpha) \sim \frac{1}{k^7} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha k\eta}}{\Delta_k(\eta)} d\eta \tag{3.1}$$

$$\Delta_k(\eta) = [(\eta^2 + 1)^2 - k^{-2}]^2 + k^{-4}(1 - \sigma^2) a^{-2}\eta^4 \tag{3.2}$$

Усиление сходимости достигнуто в [11] преобразованием

$$f_k(\alpha) \sim f_{k1}(\alpha) + N_{k1}(\alpha) \qquad (k > 1) \tag{3.3}$$

$$f_{k1}(\alpha) = \frac{1}{k^7} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha k\eta}}{(1+\eta^2)^4} d\eta = \frac{2\pi}{3!\,2^4} \frac{1}{k^7} (k^3 |\alpha|^3 + 6k^2\alpha^2 + 15k|\alpha| + 15) e^{-k|\alpha|} \tag{3.4}$$

$$N_{k1}(\alpha) = \frac{1}{k^7} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{2}{k^2}(1+\eta^2)^2 - \frac{1}{k^4}\left(1 + \frac{1-\sigma^2}{a^2}\eta^4\right)\right] \frac{e^{i\alpha k\eta}}{(1+\eta^2)^4 \Delta_k(\eta)} d\eta \tag{3.5}$$

с последующим суммированием ряда $\Sigma f_{k1}(\alpha) \cos k\beta$ в замкнутом виде; ряд $\Sigma N_{k1}(\alpha) \cos k\beta$ сходится быстрее, нежели $\Sigma f_k(\alpha) \cos k\beta$, что легко устанавливается по порядку убывания его коэффициентов с ростом k.

Выражение $N_{k1}(\alpha)$ в свою очередь можно представить в виде

$$N_{k1}(\alpha) = f_{k2}(\alpha) + N_{k2}(\alpha) \tag{3.6}$$

---

[1] В. П. Шевченко. Напряженно-деформированное состояние оболочек в окрестности сосредоточенных воздействий. Автореферат диссертации. Днепропетровский госуниверситет, 1966.

$$f_{k2}(\alpha)=\frac{2}{k^9}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\alpha k\eta}}{(1+\eta^2)^6}d\eta-\frac{1}{k^{11}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\frac{1-\sigma^2}{a^2}\eta^4\right)\frac{e^{i\alpha k\eta}}{(1+\eta^2)^8}d\eta=$$

$$=\frac{4\pi}{2^6 5!\,k^9}(k^5|\alpha|^5+15k^4\alpha^4+105k^3|\alpha|^3+420k^2\alpha^2+945k|\alpha|+945)\,e^{-k|\alpha|}-$$

$$-\frac{1}{k^{11}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\frac{1-\sigma^2}{a^2}\eta^4\right)\frac{e^{i\alpha k\eta}}{(1+\eta^2)^8}d\eta \qquad (3.7)$$

$$N_{k2}(\alpha)=\frac{1}{k^7}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{2}{k^2}(1+\eta^2)^2-\frac{1}{k^4}\left(1+\frac{1-\sigma^2}{a^2}\eta^4\right)\right]^2\frac{e^{i\alpha k\eta}}{(1+\eta^2)^8\Delta_k(\eta)}d\eta \qquad (3.8)$$

и т. д. Этот процесс (с числом шагов q) можно записать следующим образом

$$f_k(\alpha)\sim\frac{1}{k^7}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\alpha k\eta}}{\Delta_k(\eta)}d\eta=$$

$$=\frac{1}{k^7}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\alpha k\eta}}{(1+\eta^2)^4}\left\{1-\frac{1}{(1+\eta^2)^4}\left[\frac{2}{k^2}(1+\eta^2)^2-\frac{1}{k^4}\left(1+\frac{1-\sigma^2}{a^2}\eta^4\right)\right]\right\}^{-1}d\eta=$$

$$=\frac{1}{k^7}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\alpha k\eta}}{(1+\eta^2)^4}\sum_{j=1}^{q}\left[\frac{2}{k^2}(1+\eta^2)^2-\frac{1}{k^4}\left(1+\frac{1-\sigma^2}{a^2}\eta^4\right)\right]^{j-1}\frac{d\eta}{(1+\eta^2)^{4(j-1)}}+R_{kq}(\alpha)=$$

$$=\sum_{j=1}^{q}f_{kj}(\alpha)+R_{kq}(\alpha) \qquad (3.9)$$

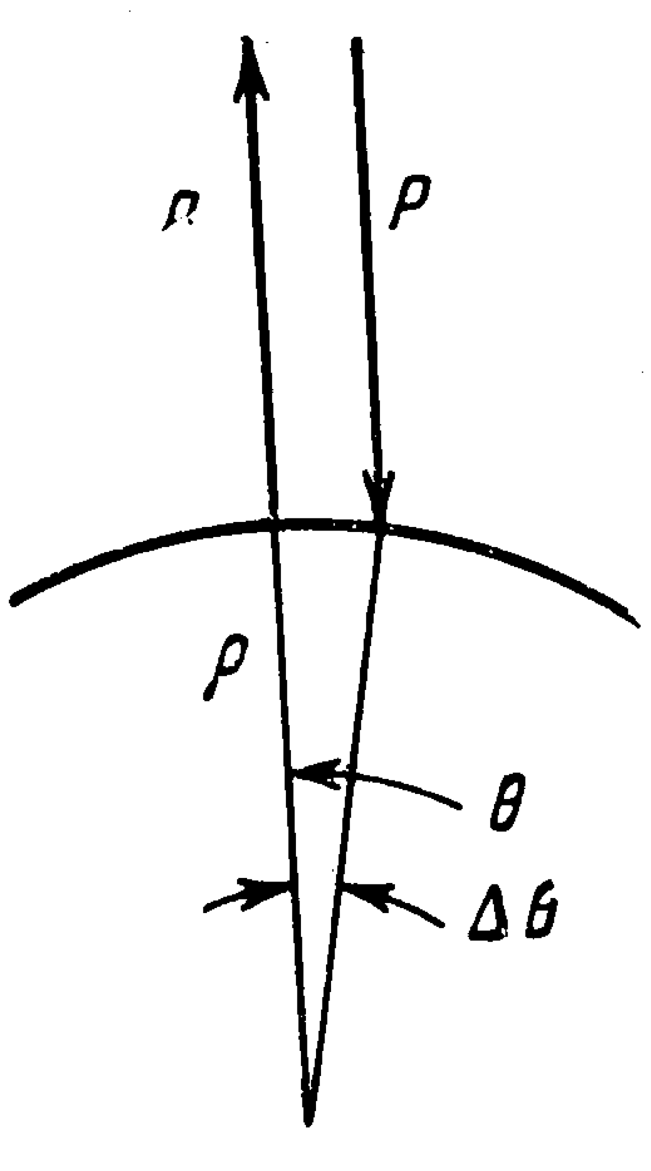
Взяв интегралы $f_{kj}(\alpha)$, после несложных преобразований получим

$$\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=2}^{\infty}f_{kj}(\alpha)\cos k\beta$$

в виде суммы замкнутых выражений и ряда, сходящегося так же быстро, как ряд с общим членом $R_{kq}(\alpha)\cos k\beta$.

4. В ряде работ высказывается ошибочное представление о возможности получения фундаментальной функции, соответствующей сосредоточенному моменту M, дифференцированием фундаментального решения случая сосредоточенной нормальной силы. Верная формула использована в [12]. Приведем ее краткий вывод.

Рассмотрим пару сил, приложенных к оболочке в точках линии кривизны с координатами θ, $\theta-\Delta\theta$ (фиг. 2). Обозначая фундаментальные функции случаев нормальной и касательной сосредоточенных сил $\Phi^*(\theta)$, $\Phi^{**}(\theta)$, запишем фундаментальное решение для рассматриваемой пары сил в виде



Фиг. 2

$$\Phi=P\Phi^*(\theta)-P\cos\Delta\theta\,\Phi^*(\theta-\Delta\theta)-P\sin\Delta\theta\Phi^{**}(\theta) \qquad (4.1)$$

По определению

$$M=\lim\,\rho\Delta\theta P \quad \text{при } \Delta\theta\to0,\ P\to\infty \qquad (4.2)$$

Здесь ρ — радиус рассматриваемой линии кривизны. Выполняя очевидные преобразования и переходя в (4.1) к пределу, получаем

$$\lim\Phi=\frac{M}{\rho}\left(\frac{\partial\Phi^*}{\partial\theta}-\Phi^{**}\right),\quad \Delta\theta\to0,\quad P\to\infty \qquad (4.3)$$

Для цилиндрической оболочки указанную поправку необходимо учитывать при расчете на поперечный изгибающий момент. В случае продольного изгибающего момента она равна нулю.

Автор благодарит И. И. Воровича за советы по работе.

Поступила 20 XI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Шевляков Ю. А., Шевченко В. П. К вопросу о действии сосредоточенных воздействий на пологие оболочки. В сб. «Концентрация напряжений», Киев, «Наукова думка», 1965, вып. 1, стр. 326.
2. Шевляков Ю. А., Шевченко В. П. О действии сосредоточенных сил и изгибающих моментов на пологую цилиндрическую оболочку. Прикл. механ., 1966, т. 2, вып. 1.
3. Чернышев Г. Н. Асимптотические методы в теории оболочек (сосредоточенные нагрузки). Тр. VI Всес. конф. по теории оболочек и пластинок. М., «Наука», 1966, стр. 799.
4. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1958.
5. Власов В. З. Общая теория оболочек и ее приложение в технике. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
6. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М., Гостехиздат, 1953.
7. Ляв А. Математическая теория упругости. М.—Л, ОНТИ, 1935.
8. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Изд. 2. Л., Судпромгиз, 1962.
9. Йон Ф. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
10. Даревский В. М. К теории цилиндрических оболочек. ПММ, 1951, т. 15, вып. 5.
11. Даревский В. М. Решение некоторых вопросов теории цилиндрической оболочки. ПММ, 1952, т. 16, вып. 2.
12. Ворович И. И., Сафронов Ю. В., Устинов Ю. А. Прочность колес сложной конструкции. Исследование и расчет. М., «Машиностроение», 1967.