ОБ УРАВНЕНИЯХ СОВМЕСТНОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ

В. Д. Бондарь

(Новосибирск)

В ряде случаев решение задач теории упругости удобно производить в напряжениях. Для этого к динамическим уравнениям равновесия следует добавить уравнения совместности напряжений. Последние есть следствие уравнений совместности деформаций и закона поведения среды — связи напряжений с деформациями. Для сред линейных физически и геометрически уравнениями совместности деформаций и напряжений будут соответственно уравнения Сен-Венана и Бельтрами — Митчела. Ниже устанавливаются обобщения этих уравнений на среды нелинейные геометрически.

1. Одно свойство тензора четвертого ранга специального вида. Рассмотрим трехмерное пространство, в котором расстояние между любыми двумя близкими точками определяется положительно определенной квадратичной формой

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \tag{1.1}$$

где функции координат $g_{\alpha\beta}\ (x^1,\ x^2,\ x^3)$ будут компонентами симметричного метрического тензора. Здесь и в дальнейшем изложении предполагается, что по дважды повторяющемуся индексу предполагается суммирование и что греческий индекс принимает значения 1, 2, 3.

Возьмем в этом пространстве тензор четвертого ранга $A_{\gamma\varkappa\lambda\mu}$, обладающий следующей симметрией:

$$A_{\varkappa\nu\lambda\mu} = -A_{\nu\varkappa\lambda\mu}, \qquad A_{\nu\varkappa\mu\lambda} = -A_{\nu\varkappa\lambda\mu}, \qquad A_{\lambda\mu\nu\varkappa} = A_{\nu\varkappa\lambda\mu} \tag{1.2}$$

Такой тензор в трехмерном пространстве имеет, как нетрудно видеть, только шесть независимых компонент, соответствующих, например, следующим значениям индексов:

$$\nu\varkappa\lambda\mu = 2112,\ 3223,\ 1331,\ 3121,\ 1232,\ 2313 \tag{1.3}$$

Свертыванием по двум индексам тензору четвертого ранга можно сопоставить вообще шесть сверток-тензоров второго ранга. Однако для рассматриваемого тензора ввиду симметрии (1.2) среди этих сверток независимой будет только одна, например та из них, которая получается свертыванием по крайним индексам

$$A_{\varkappa\lambda} = g^{\nu\mu} A_{\nu\varkappa\lambda\mu} \tag{1.4}$$

где

$$\|g^{\nu\mu}\| = \|g_{\nu\mu}\|^{-1}, \qquad g^{\nu\sigma} g_{\sigma\mu} = \delta_\mu{}^\nu = \begin{cases} 1, & \nu = \mu \\ 0, & \nu \neq \mu \end{cases} \tag{1.5}$$

Свертка (1.4) будет симметричным тензором. Это утверждение вытекает из свойств симметрии входящих в нее тензоров. Действительно

$$A_{\lambda\varkappa} = g^{\nu\mu} A_{\nu\lambda\varkappa\mu} = g^{\nu\mu} A_{\varkappa\mu\nu\lambda} = g^{\mu\nu} A_{\mu\varkappa\lambda\nu} = A_{\varkappa\lambda}$$

Следовательно, в (1.4) независимые равенства определяются значениями индексов

$$\varkappa\lambda = 11,\ 22,\ 33,\ 12,\ 23,\ 31 \tag{1.6}$$

Таким образом, в трехмерном пространстве тензор четвертого ранга $A_{\nu\varkappa\lambda\mu}$, обладающий симметрией (1.2), имеет столько же независимых компонент, сколько их у симметричного тензора второго ранга $A_{\varkappa\lambda}$. Тензор $A_{\varkappa\lambda}$ выражается через тензор $A_{\nu\varkappa\lambda\mu}$

по формулам (1.4). Покажем, что тензор $A_{\nu\varkappa\lambda\mu}$, в свою очередь может быть выражен через тензор $A_{\varkappa\lambda}$. Для этого возьмем некоторый симметричный тензор второго ранга $B_{\varkappa\lambda}$, составим из него и из метрического тензора $g_{\nu\mu}$ тензор четвертого ранга, обладающий симметрией (1.2), и рассмотрим равенства

$$A_{\nu\varkappa\lambda\mu}=g_{\varkappa\lambda}B_{\nu\mu}-g_{\varkappa\mu}B_{\nu\lambda}+g_{\nu\mu}B_{\varkappa\lambda}-g_{\nu\lambda}B_{\varkappa\mu} \tag{1.7}$$

в которых индексы принимают значения (1.3). Эти равенства можно рассматривать как систему шести алгебраических линейных уравнений для определения шести неизвестных величин $B_{\alpha\beta}$ ($\alpha\leqslant\beta=1,\ 2,\ 3$).

Нетрудно убедиться в том, что определитель системы (1.7) имеет значение

$$-2\det\|g_{\alpha\beta}\| \qquad (\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ 3)$$

и ввиду положительной определенности формы (1.1) отличен от нуля. Система уравнений (1.7), таким образом, разрешима. Для вычисления решения этой системы преобразуем ее к другому виду. Из свойств симметрии (1.2) тензоров, стоящих в разных частях равенства (1.7), вытекает, что рассматриваемая система уравнений эквивалентна системе (1.7), в которой каждый из индексов $\nu\varkappa\lambda\mu$ принимает значения 1, 2, 3. Помножим уравнения этой последней системы на $g^{\nu\mu}$ и просуммируем по индексам ν и μ. Тогда, учитывая формулы (1.4) и (1.5), найдем в итоге, что систему (1.7) можно представить в форме

$$A_{\varkappa\lambda}=Jg_{\varkappa\lambda}+B_{\varkappa\lambda} \qquad (J=g^{\sigma\tau}B_{\sigma\tau}) \tag{1.8}$$

Следствием уравнений (1.8) будет равенство

$$I\equiv g^{\varkappa\lambda}A_{\varkappa\lambda}=4J \tag{1.9}$$

связывающее между собой инварианты тензоров $A_{\varkappa\lambda}$ и $B_{\varkappa\lambda}$. Уравнения (1.8) и (1.9) позволяют определить искомые величины в виде

$$B_{\varkappa\lambda}=A_{\varkappa\lambda}-{}^1/_4Ig_{\varkappa\lambda}$$

Возвращаясь к соотношениям (1.7), находим, что компоненты тензора $A_{\nu\varkappa\lambda\mu}$ выражаются через компоненты тензора $A_{\varkappa\lambda}$ посредством линейных однородных зависимостей

$$A_{\nu\varkappa\lambda\mu}=g_{\varkappa\lambda}A_{\nu\mu}-g_{\varkappa\mu}A_{\nu\lambda}+g_{\nu\mu}A_{\varkappa\lambda}-g_{\nu\lambda}A_{\varkappa\mu}+{}^1/_2I\,(g_{\varkappa\mu}g_{\nu\lambda}-g_{\varkappa\lambda}g_{\nu\mu}) \tag{1.10}$$

Полученные формулы решают поставленную задачу.

Соотношения (1.4) и (1.10) позволяют утверждать, что если один из тензоров $A_{\varkappa\lambda}$, $A_{\nu\varkappa\lambda\mu}$ нулевой, то нулевым будет и другой. Таким образом, доказана следующая теорема.

Для обращения в нуль тензора $A_{\nu\varkappa\lambda\mu}$, обладающего симметрией (1.2), необходимо и достаточно равенство нулю его свертки-тензора $A_{\varkappa\lambda}$.

Теорема позволяет, например, представить в различных формах условие евклидовости пространства. Известно [1], что условием евклидовости пространства является равенство нулю тензора Римана

$$R_{\nu\varkappa\lambda\mu}=\frac{\partial\Gamma_{\mu\lambda\nu}}{\partial x^{\varkappa}}-\frac{\partial\Gamma_{\mu\lambda\varkappa}}{\partial x^{\nu}}+g^{\alpha\omega}\,(\Gamma_{\omega\lambda\varkappa}\Gamma_{\alpha\mu\nu}-\Gamma_{\omega\lambda\nu}\Gamma_{\alpha\mu\varkappa})=0 \tag{1.11}$$

Здесь

$$2\Gamma_{\alpha\beta\gamma}=\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}+\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}}$$

суть символы Кристоффеля. Тензор Римана четвертого ранга и обладает симметрией (1.2), поэтому в трехмерном пространстве он имеет шесть независимых компонент, соответствующих значениям (1.3) индексов $\nu\varkappa\lambda\mu$. Условие евклидовости пространства (1.11) представляет собою, таким образом, систему шести дифференциальных уравнений, которым должны удовлетворять шесть функций $g_{\alpha\beta}$ $(\alpha \leqslant \beta = 1, 2, 3)$.

Тензору Римана свертыванием по крайним индексам сопоставляется симметричный тензор второго ранга

$$R_{\varkappa\lambda} = g^{\nu\mu} R_{\nu\varkappa\lambda\mu}$$

называемый тензором Эйнштейна. В силу доказанной теоремы условие евклидовости пространства можно представить в форме равенства нулю тензора Эйнштейна

$$R_{\varkappa\lambda} = g^{\nu\mu}\left[\frac{\partial\Gamma_{\mu\lambda\nu}}{\partial x^{\varkappa}} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\lambda\varkappa}}{\partial x^{\nu}} + g^{\alpha\omega}(\Gamma_{\omega\lambda\varkappa}\Gamma_{\alpha\mu\nu} - \Gamma_{\omega\lambda\nu}\Gamma_{\alpha\mu\varkappa})\right] = 0$$

Это условие представляет собой другую систему шести уравнений для тех же функций $g_{\alpha\beta}$. Независимые уравнения соответствуют значениям (1.6) индексов $\varkappa\lambda$.

2. Уравнения совместности деформаций. Деформация среды при переходе ее из некоторого начального положения, отвечающего моменту времени t°, в конечное положение, соответствующее моменту t, описывается симметричным тензором второго ранга ε — тензором деформации. Компоненты этого тензора определяются формулами [1]

$$2\varepsilon_{\alpha\beta}(x^1, x^2, x^3, t) = g_{\alpha\beta}(x^1, x^2, x^3, t) - g_{\alpha\beta^\circ}(x^1, x^2, x^3, t^\circ)] \tag{2.1}$$

где $\overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}$ являются компонентами метрического тензора в сопутствующей системе координат x^1, x^2, x^3, связанной со средою, в моменты t° и t соответственно. Шесть функций (2.1) для непрерывной деформации удовлетворяют уравнениям совместности деформаций. Эти последние есть следствие того обстоятельства, что деформируемая среда находится в трехмерном евклидовом пространстве. Получаются они следующим образом. Отождествим сопутствующую систему координат x^1, x^2, x^3 в момент t с системой отсчета, относительно которой рассматривается движение среды. Возьмем условие евклидовости пространства в форме равенства нулю тензора Римана. Тогда для моментов времени t и t° будем иметь соответственно уравнения (1.11) и уравнения

$$R^\circ{}_{\nu\varkappa\lambda\mu} = \frac{\partial\Gamma^\circ{}_{\mu\lambda\nu}}{\partial x^{\varkappa}} - \frac{\partial\Gamma^\circ{}_{\mu\lambda\varkappa}}{\partial x^{\nu}} + g_0^{\alpha\omega}(\Gamma^\circ{}_{\omega\lambda\varkappa}\Gamma^\circ{}_{\alpha\mu\nu} - \Gamma^\circ{}_{\omega\lambda\nu}\Gamma^\circ{}_{\alpha\mu\varkappa}) = 0 \tag{2.2}$$

в которых нуликом отмечены значения соответствующих величин в момент t°. При помощи формул

$$g^\circ{}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - 2\varepsilon_{\alpha\beta} \tag{2.3}$$

следующих из определения компонент тензора деформаций, можно установить связь между символами Кристоффеля для различных моментов времени в виде

$$\Gamma^\circ{}_{\alpha\beta\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta\gamma} - G_{\alpha\beta\gamma} \qquad \left(G_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial\varepsilon_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial\varepsilon_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial\varepsilon_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}}\right) \tag{2.4}$$

Подставив (2.3) и (2.4) в (2.2) и вычтя результат из равенства (1.11), получим

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{\mu\nu}}{\partial x^{\varkappa}\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial^2\varepsilon_{\lambda\varkappa}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2\varepsilon_{\lambda\nu}}{\partial x^{\varkappa}\partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2\varepsilon_{\mu\varkappa}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\lambda}} - (g_0{}^{\alpha\omega} - g^{\alpha\omega})\,\Gamma_{\omega\lambda\varkappa\alpha\mu\nu} -$$

$$- g_0{}^{\alpha\omega}(G_{\omega\lambda\varkappa\alpha\mu\nu} - B_{\omega\lambda\varkappa\alpha\mu\nu}) = 0 \tag{2.5}$$

при этом согласно значений (1.3) индексов $\nu\varkappa\lambda\mu$ будут определяться шесть уравнений, в которых

$$\Gamma_{\omega\lambda\varkappa\alpha\mu\nu}=\Gamma_{\omega\lambda\varkappa}\Gamma_{\alpha\mu\nu}-\Gamma_{\omega\lambda\nu}\Gamma_{\alpha\mu\varkappa},\qquad G_{\omega\lambda\varkappa\alpha\mu\nu}=G_{\omega\lambda\varkappa}G_{\alpha\mu\nu}-G_{\omega\lambda\nu}G_{\alpha\mu\varkappa}$$

$$B_{\omega\lambda\varkappa\alpha\mu\nu}=\Gamma_{\omega\lambda\varkappa}G_{\alpha\mu\nu}+G_{\omega\lambda\varkappa}\Gamma_{\alpha\mu\nu}-\Gamma_{\omega\lambda\nu}G_{\alpha\mu\varkappa}-G_{\omega\lambda\nu}\Gamma_{\alpha\mu\varkappa}$$

$$\| g_0^{\alpha\omega}\|=\|\overset{\circ}{g}_{\alpha\omega}\|^{-1}=\|g_{\alpha\omega}-2\varepsilon_{\alpha\omega}\|^{-1}$$

Это и есть уравнения совместности деформаций, записанные в произвольных координатах. Покажем, что левые части этих уравнений могут быть выражены через ковариантные компоненты тензора деформаций и ковариантные производные от этих компонент. Возьмем выражения первой и второй ковариантных производных от компонент тензора деформации

$$\nabla_\lambda\varepsilon_{\mu\nu}=\frac{\partial\varepsilon_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}-\varepsilon_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\lambda}-\varepsilon_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\lambda},\quad \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}=g^{\sigma\tau}\Gamma_{\tau\mu\lambda}$$

$$\nabla_\varkappa\nabla_\lambda\varepsilon_{\mu\nu}=\frac{\partial}{\partial x^\varkappa}\nabla_\lambda\varepsilon_{\mu\nu}-\nabla_\tau\varepsilon_{\mu\nu}\Gamma^\tau_{\lambda\varkappa}-\nabla_\lambda\varepsilon_{\tau\nu}\Gamma^\tau_{\mu\varkappa}-\nabla_\lambda\varepsilon_{\mu\tau}\Gamma^\tau_{\nu\varkappa}$$

Нетрудно проверить, что в евклидовом пространстве имеет место следующее соотношение:

$$\nabla_\varkappa\nabla_\lambda\varepsilon_{\mu\nu}+\nabla_\nu\nabla_\mu\varepsilon_{\lambda\varkappa}-\nabla_\varkappa\nabla_\mu\varepsilon_{\lambda\nu}-\nabla_\nu\nabla_\lambda\varepsilon_{\mu\varkappa}=\frac{\partial^2\varepsilon_{\mu\nu}}{\partial x^\varkappa\partial x^\lambda}+\frac{\partial^2\varepsilon_{\lambda\varkappa}}{\partial x^\nu\partial x^\mu}-$$

$$-\frac{\partial^2\varepsilon_{\lambda\nu}}{\partial x^\varkappa\partial x^\mu}-\frac{\partial^2\varepsilon_{\mu\varkappa}}{\partial x^\nu\partial x^\lambda}+g^{\alpha\omega}B_{\omega\lambda\varkappa\alpha\mu\nu}-2\varepsilon^{\alpha\omega}\Gamma_{\omega\lambda\varkappa\alpha\mu\nu},\qquad \varepsilon^{\alpha\omega}=g^{\alpha\sigma}g^{\tau\omega}\varepsilon_{\sigma\tau}\qquad(2.6)$$

Непосредственным вычислением можно также убедиться в справедливости равенства

$$C_{\omega\lambda\varkappa}\equiv\nabla_\varkappa\varepsilon_{\omega\lambda}+\nabla_\lambda\varepsilon_{\omega\varkappa}-\nabla_\omega\varepsilon_{\lambda\varkappa}=G_{\omega\lambda\varkappa}-2\varepsilon_\omega{}^\sigma\Gamma_{\sigma\lambda\varkappa}\qquad(2.7)$$

$$\varepsilon_\omega{}^\sigma=g^{\sigma\tau}\varepsilon_{\tau\omega}={}^1/_2\,(\delta_\omega{}^\sigma-g^{\sigma\tau}g^\circ{}_{\tau\omega})$$

Опираясь на формулы (2.7) и равенство

$$2g_0^{\alpha\omega}\varepsilon_\omega{}^\sigma=g_0^{\alpha\sigma}-g^{\alpha\sigma}$$

можно установить, что имеет место соотношение

$$g_0^{\alpha\omega}\,(C_{\omega\lambda\varkappa}C_{\alpha\mu\nu}-C_{\omega\lambda\nu}C_{\alpha\mu\varkappa})=g_0^{\alpha\omega}\,G_{\omega\lambda\varkappa\alpha\mu\nu}-(g_0^{\alpha\omega}-g^{\alpha\omega})\,(B_{\omega\lambda\varkappa\alpha\mu\nu}-$$

$$-\Gamma_{\omega\lambda\varkappa\alpha\mu\nu})-2\varepsilon^{\alpha\omega}\Gamma_{\omega\lambda\varkappa\alpha\mu\nu}\qquad(2.8)$$

Если вычесть почленно (2.6) и (2.8), то получим равенство, правая часть которого совпадает с левой частью уравнения (2.5) совместности деформаций. Поэтому уравнения совместности деформаций могут быть записаны в виде

$$\nabla_\varkappa\nabla_\lambda\varepsilon_{\mu\nu}+\nabla_\nu\nabla_\mu\varepsilon_{\lambda\varkappa}-\nabla_\varkappa\nabla_\mu\varepsilon_{\lambda\nu}-\nabla_\nu\nabla_\lambda\varepsilon_{\mu\varkappa}-g_0^{\alpha\omega}\,(C_{\omega\lambda\varkappa}C_{\alpha\mu\nu}-C_{\omega\lambda\nu}C_{\alpha\mu\varkappa})=0\qquad(2.9)$$

Величины $\overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}$ будут компонентами метрического тензора G_0 в сопутствующей системе координат в начальный момент времени. В текущий же момент времени метрический тензор G в сопутствующей системе координат имеет компоненты $g_{\alpha\beta}$, а величины $\overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}$ в этот момент будут компонентами некоторого тензора T, отличного от метрического. Легко видеть, что величины $g_0^{\alpha\beta}$ в текущий момент являются компонентами тензора $^{-1}$, обратного тензору T. Из тождества Гамильтона — Кели для тензора T, взятого в форме

$$T\frac{1}{I_3}\,(T^2-I_1T+I_2G)=G$$

где I_1, I_2, I_3 — основные инварианты тензора T, вытекает, что для обратного тензора справедливо представление

$$T^{-1} = \frac{I_2}{I_3} G - \frac{I_1}{I_3} T + \frac{1}{I_3} T^2$$

В силу формулы (2.3) тензор T будет функцией тензора деформации

$$T = G - 2\varepsilon$$

Простой подсчет показывает, что инварианты этого тензора выражаются через основные инварианты J_α $(\alpha = 1, 2, 3)$ тензора деформации по формулам

$$I_1 = 3 - 2J_1, \quad I_2 = 3 - 4J_1 + 4J_2, \quad I_3 = 1 - 2J_1 + 4J_2 - 8J_3$$

В произвольной криволинейной системе координат инварианты тензора деформации определяются через его ковариантные компоненты в виде

$$J_1 = g^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}, \quad J_2 = {}^1/_2 e^{\alpha\beta\gamma} e^{\omega\sigma\tau} g_{\alpha\omega}\varepsilon_{\beta\sigma}\varepsilon_{\gamma\tau}, \quad J_3 = {}^1/_6 e^{\alpha\beta\gamma} e^{\omega\sigma\tau}\varepsilon_{\alpha\omega}\varepsilon_{\beta\sigma}\varepsilon_{\gamma\tau}$$

где $e^{\alpha\beta\gamma}$ — компоненты дискриминантного тензора.

Обратный тензор выражается через тензор деформации по формуле

$$T^{-1} = K_1 G + K_2\varepsilon + K_3\varepsilon^2, \qquad K_1 = (1 - 2J_1 + 4J_2)\Delta$$

$$K_2 = 2(1 - 2J_1)\Delta \qquad K_3 = 4\Delta, \qquad \Delta = (1 - 2J_1 + 4I_2 - 8I_3)^{-1} \tag{2.10}$$

В компонентной записи полученное равенство имеет вид

$$g_0^{\alpha\omega} = K_1 g^{\alpha\omega} + K_2 g^{\alpha\sigma} g^{\tau\omega}\varepsilon_{\sigma\tau} + K_3 g^{\alpha\sigma} g^{\tau\beta} g^{\gamma\omega}\varepsilon_{\sigma\tau}\varepsilon_{\beta\gamma}$$

Соотношения (2.7) и (2.10) позволяют представить уравнения (2.9) совместности деформаций в форме

$$\begin{aligned}
&\nabla_\varkappa\nabla_\lambda\varepsilon_{\mu\nu} + \nabla_\nu\nabla_\mu\varepsilon_{\lambda\varkappa} - \nabla_\varkappa\nabla_\mu\varepsilon_{\lambda\nu} - \nabla_\nu\nabla_\lambda\varepsilon_{\mu\varkappa} - (K_1 g^{\alpha\omega} + K_2 g^{\alpha\sigma} g^{\tau\omega}\varepsilon_{\sigma\tau} + \\
&+ K_3 g^{\alpha\sigma} g^{\tau\beta} g^{\gamma\omega}\varepsilon_{\sigma\tau}\varepsilon_{\beta\gamma})\,[(\nabla_\varkappa\varepsilon_{\omega\lambda} + \nabla_\lambda\varepsilon_{\omega\varkappa} - \nabla_\omega\varepsilon_{\lambda\varkappa})(\nabla_\nu\varepsilon_{\alpha\mu} + \nabla_\mu\varepsilon_{\alpha\nu} - \nabla_\alpha\varepsilon_{\mu\nu}) - \\
&- (\nabla_\nu\varepsilon_{\omega\lambda} + \nabla_\lambda\varepsilon_{\omega\nu} - \nabla_\omega\varepsilon_{\lambda\nu})(\nabla_\varkappa\varepsilon_{\alpha\mu} + \nabla_\mu\varepsilon_{\alpha\varkappa} - \nabla_\alpha\varepsilon_{\mu\varkappa})] = 0
\end{aligned} \tag{2.11}$$

содержащей только ковариантные компоненты тензора деформации и первые и вторые ковариантные производные от этих компонент. Индексы $\nu\varkappa\lambda\mu$ принимают в этих уравнениях значения (1.3).

Уравнения (2.11) справедливы в произвольных криволинейных координатах В частном случае, когда система координат прямоугольна декартова

$$\nabla_\alpha\varepsilon_{\beta\gamma} = \frac{\partial\varepsilon_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha}, \qquad g^{\alpha\beta} = \delta_\beta^\alpha$$

и уравнения совместности деформаций (2.11) принимают вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\varepsilon_{\mu\nu}}{\partial x^\varkappa\partial x^\lambda} + \frac{\partial^2\varepsilon_{\lambda\varkappa}}{\partial x^\nu\partial x^\mu} - \frac{\partial^2\varepsilon_{\lambda\nu}}{\partial x^\varkappa\partial x^\mu} - \frac{\partial^2\varepsilon_{\mu\varkappa}}{\partial x^\nu\partial x^\lambda} - (K_1\delta_{\alpha\omega} + K_2\varepsilon_{\alpha\omega} + K_3\varepsilon_{\alpha\sigma}\varepsilon_{\sigma\omega}) \times \\
&\times \left[\left(\frac{\partial\varepsilon_{\omega\lambda}}{\partial x^\varkappa} + \frac{\partial\varepsilon_{\omega\varkappa}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial\varepsilon_{\lambda\varkappa}}{\partial x^\omega}\right)\left(\frac{\partial\varepsilon_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial\varepsilon_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial\varepsilon_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right) - \right. \\
&\left. - \left(\frac{\partial\varepsilon_{\omega\lambda}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial\varepsilon_{\omega\nu}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial\varepsilon_{\lambda\nu}}{\partial x^\omega}\right)\left(\frac{\partial\varepsilon_{\alpha\mu}}{\partial x^\varkappa} + \frac{\partial\varepsilon_{\alpha\varkappa}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial\varepsilon_{\mu\varkappa}}{\partial x^\alpha}\right)\right] = 0
\end{aligned}$$

индексы $\nu\varkappa\lambda\mu$ пробегают здесь систему значений (1.3).

Отметим, что уравнения (2.11) справедливы для произвольных деформаций. Если деформации малы, так что малы сравнительно с единицей как сами компоненты тензора деформаций, так и первые и вторые производные от них по координатам, то в формулах (2.11) нелинейными членами, являющимися малыми членами более высокого порядка, можно пренебречь и писать уравнения совместности в виде

$$\nabla_\varkappa \nabla_\lambda \varepsilon_{\mu\nu} + \nabla_\nu \nabla_\mu \varepsilon_{\lambda\varkappa} - \nabla_\varkappa \nabla_\mu \varepsilon_{\lambda\nu} - \nabla_\nu \nabla_\lambda \varepsilon_{\mu\varkappa} = 0 \tag{2.12}$$

Здесь индексы принимают значения (1.3). Это — уравнения Сен-Венана совместности малых деформаций, записанные в произвольных координатах [2]. В прямоугольных декартовых координатах эти уравнения имеют вид

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{\mu\nu}}{\partial x^\varkappa \partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\lambda\varkappa}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{\lambda\nu}}{\partial x^\varkappa \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mu\varkappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} = 0$$

Заметим что форма (2.9) уравнений совместности деформаций может быть получена и из других соображений. Рассмотрим предварительно некоторые необходимые соотношения.

Элементы координатных базисов сопутствующей системы координат в начальный и текущий моменты времени определяются через радиусы-векторы точки в соответствующие моменты формулами

$$\mathfrak{э}_\rho^{(0)} = \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial x^\rho}, \qquad \mathfrak{э}_\rho = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^\rho}$$

Дифференцируя по координате x^ρ равенство

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{w} = w^\sigma \mathfrak{э}_\sigma = w_0{}^\tau \mathfrak{э}_\tau^{(0)}$$

определяющее вектор перемещения, получим формулы, которые связывают базисные векторы для различных моментов времени в виде

$$\mathfrak{э}_\rho = C_{\rho\cdot}^{(0)\gamma} \mathfrak{э}_\gamma^{(0)} = C_{\rho\beta}^{(0)} \mathfrak{э}_0{}^\beta, \qquad \mathfrak{э}_\omega^{(0)} = C_{\omega\cdot}{}^\lambda \mathfrak{э}_\lambda = C_{\omega\mu} \mathfrak{э}^\mu \tag{2.13}$$

Коэффициенты этих разложений выражаются через компоненты вектора перемещения в различных базисах по формулам

$$C_{\rho\cdot}^{(0)\gamma} = \delta_{\rho\cdot}^{\gamma} + \nabla_\rho^{(0)} w_0{}^\gamma, \qquad C_{\rho\beta}^{(0)} = C_{\rho\cdot}^{(0)\gamma} g_{\gamma\beta}^{(0)} = g_{\rho\beta}^{(0)} + \nabla_\rho^{(0)} w_\beta^{(0)}$$

$$C_{\omega\cdot}{}^\lambda = \delta_{\omega\cdot}^{\lambda} - \nabla_\omega w^\lambda, \qquad C_{\omega\mu} = C_{\omega\cdot}{}^\lambda g_{\lambda\mu} = g_{\omega\mu} - \nabla_\omega w_\mu$$

и связаны между собою очевидными соотношениями

$$C_{\rho\cdot}^{(0)\gamma} C_{\gamma\cdot}{}^\beta = \delta_{\rho\cdot}^{\beta}, \qquad C_{\omega\cdot}{}^\gamma C_{\gamma\cdot}^{(0)\beta} = \delta_{\omega\cdot}^{\beta} \tag{2.14}$$

Имеет место следующая лемма: матрицы $C_{\rho\omega}^{(0)}$ и $C_{\rho\omega}$ разложений (2.13) взаимно транспонированы

$$C_{\omega\rho} = C_{\rho\omega}^{(0)} \tag{2.15}$$

Для доказательства леммы перемножим скалярно векторные равенства (2.13), будем иметь

$$C_{\omega\mu} \mathfrak{э}^\mu \cdot \mathfrak{э}_\rho = C_{\rho\beta}^{(0)} \mathfrak{э}_0{}^\beta \cdot \mathfrak{э}_\omega^{(0)}$$

Отсюда в силу взаимности базисных векторов

$$\mathfrak{э}^\mu \cdot \mathfrak{э}_\rho = \delta_{\cdot\rho}^{\mu}, \qquad \mathfrak{э}_0{}^\beta \cdot \mathfrak{э}_\omega^{(0)} = \delta_{\cdot\omega}^{\beta}$$

приходим к равенству (2.15). Лемма, таким образом, доказана.

Соотношение (2.15) можно представить в другой эквивалентной форме. Для этого умножим обе его части на величину $g_0^{\alpha\omega}$ $g^{\sigma\rho}$ и просуммируем по индексам ω и ρ, в итоге получим

$$g_0^{\alpha\omega} C_{\omega.}^{\sigma} = g^{\sigma\rho} C^{(0)\alpha}_{\rho.} \tag{2.16}$$

Это равенство означает, что в разложениях базисных векторов

$$э_0^{\alpha} = g_0^{\alpha\omega} э_{\omega}^{(0)} = g_0^{\alpha\omega} C_{\omega.}^{\sigma} э_{\sigma}, \qquad э_{.}^{\sigma} = g^{\sigma\rho} э_{\rho} = g^{\sigma\rho} C^{(0)\alpha}_{\rho.} э_{\alpha}^{(0)}$$

матрицы также взаимно транспонированы. С учетом свойств (2.14) равенство (2.16) можно представить также в виде

$$g^{\sigma\tau} = g_0^{\alpha\omega} C_{\omega.}^{\sigma} C_{\alpha.}^{\tau} \tag{2.17}$$

Обратимся теперь к выводу уравнений совместности деформаций. Известно [1], что деформации выражаются через перемещения по формулам

$$2\varepsilon_{\mu\nu} = \nabla_{\mu} w_{\nu} + \nabla_{\nu} w_{\mu} - g^{\sigma\tau} \nabla_{\mu} w_{\sigma} \nabla_{\nu} w_{\tau} \tag{2.18}$$

Уравнения совместности деформаций будут получены, если из этих уравнений исключим перемещения. Для этого вычислим первую и вторую ковариантные производные от компонент тензора деформации

$$2\nabla_{\lambda} \varepsilon_{\mu\nu} = \nabla_{\lambda} \nabla_{\mu} w_{\nu} + \nabla_{\lambda} \nabla_{\nu} w_{\mu} - g^{\sigma\tau} (\nabla_{\lambda} \nabla_{\mu} w_{\sigma} \nabla_{\nu} w_{\tau} + \nabla_{\mu} w_{\sigma} \nabla_{\lambda} \nabla_{\nu} w_{\tau}) \tag{2.19}$$

$$\begin{gathered} 2\nabla_{\varkappa} \nabla_{\lambda} \varepsilon_{\mu\nu} = \nabla_{\varkappa} \nabla_{\lambda} \nabla_{\mu} w_{\nu} + \nabla_{\varkappa} \nabla_{\lambda} \nabla_{\nu} w_{\mu} - \\ - g^{\sigma\tau} (\nabla_{\varkappa} \nabla_{\lambda} \nabla_{\mu} w_{\sigma} \nabla_{\nu} w_{\tau} + \nabla_{\lambda} \nabla_{\mu} w_{\sigma} \nabla_{\varkappa} \nabla_{\nu} w_{\tau} + \nabla_{\varkappa} \nabla_{\mu} w_{\sigma} \nabla_{\lambda} \nabla_{\nu} w_{\tau} + \nabla_{\mu} w_{\sigma} \nabla_{\varkappa} \nabla_{\lambda} \nabla_{\nu} w_{\tau}) \end{gathered} \tag{2.20}$$

Нетрудно проверить, что из (2.20) можно исключить третьи производные от перемещений, составив следующую комбинацию:

$$\begin{gathered} \nabla_{\varkappa} \nabla_{\lambda} \varepsilon_{\mu\nu} + \nabla_{\nu} \nabla_{\mu} \varepsilon_{\lambda\varkappa} - \nabla_{\varkappa} \nabla_{\mu} \varepsilon_{\lambda\nu} - \nabla_{\nu} \nabla_{\lambda} \varepsilon_{\mu\varkappa} = \\ = g^{\sigma\tau} (\nabla_{\nu} \nabla_{\mu} w_{\sigma} \nabla_{\varkappa} \nabla_{\lambda} w_{\tau} - \nabla_{\lambda} \nabla_{\mu} w_{\sigma} \nabla_{\varkappa} \nabla_{\nu} w_{\tau}) \end{gathered} \tag{2.21}$$

Полученное выражение содержит только вторые производные от перемещений. Исключить последние оказывается возможным при помощи равенств (2.19). Действительно

$$C_{\omega\lambda\varkappa} \equiv \nabla_{\varkappa} \varepsilon_{\omega\lambda} + \nabla_{\lambda} \varepsilon_{\omega\varkappa} - \nabla_{\omega} \varepsilon_{\lambda\varkappa} = \nabla_{\varkappa} \nabla_{\lambda} w_{\sigma} C_{\omega}^{\sigma}.$$

поэтому

$$C_{\omega\lambda\varkappa} C_{\alpha\mu\nu} - C_{\omega\lambda\nu} C_{\alpha\mu\varkappa} = C_{\omega.}^{\sigma} C_{\alpha.}^{\tau} (\nabla_{\nu} \nabla_{\mu} w_{\sigma} \nabla_{\varkappa} \nabla_{\lambda} w_{\tau} - \nabla_{\lambda} \nabla_{\mu} w_{\sigma} \nabla_{\varkappa} \nabla_{\nu} w_{\tau})$$

Умножим далее обе части последнего равенства на $g_0^{\alpha\omega}$, суммируя по α и ω и используя соотношение (2.17), будем иметь

$$g_0^{\alpha\omega} (C_{\omega\lambda\varkappa} C_{\alpha\mu\nu} - C_{\omega\lambda\nu} C_{\alpha\mu\varkappa}) = g^{\sigma\tau} (\nabla_{\nu} \nabla_{\mu} w_{\sigma} \nabla_{\varkappa} \nabla_{\lambda} w_{\tau} - \nabla_{\lambda} \nabla_{\mu} w_{\sigma} \nabla_{\varkappa} \nabla_{\nu} w_{\tau}) \tag{2.22}$$

Теперь легко видеть, что вычтя равенства (2.21) и (2.22), полностью исключим перемещения и тем самым получим уравнения для величин $\varepsilon_{\alpha\beta}$, которые совпадают с уравнениями совместности в форме (2.9).

Таким образом, выражения (2.18) деформаций через перемещения можно рассматривать как интегралы уравнений совместности деформаций.

Заметим, что при малых сравнительно с единицей удлинениях-сдвигах и углах поворотов можно заменить нелинейные формулы (2.18) линейными [3]

$$2\varepsilon_{\mu\nu} = \nabla_{\mu} w_{\nu} + \nabla_{\nu} w_{\mu} \tag{2.23}$$

Вычислив от них вторые ковариантные производные и составив комбинацию (2.21), получим уравнения, не содержащие перемещений и совпадающие с уравнениями Сен-Венана (2.12). Следовательно, уравнения Сен-Венана есть следствие линейных формул (2.23).

Уравнения (2.9) совместности деформаций представляют собою равенство нулю некоторого тензора четвертого ранга. Нетрудно проверить, что этот тензор обладает симметрией (1.2). Поэтому в силу теоремы первого параграфа уравнения (2.9) эквивалентны уравнениям, получающимся из них свертыванием по индексам ν и μ. Эти последние имеют вид

$$\Delta\varepsilon_{\varkappa\lambda}+\nabla_\varkappa\nabla_\lambda J_1-\nabla_\varkappa\nabla^\mu\varepsilon_{\lambda\mu}-\nabla_\lambda\nabla^\mu\varepsilon_{\varkappa\mu}-g_0^{\alpha\omega}g^{\mu\nu}(C_{\omega\lambda\varkappa}C_{\alpha\mu\nu}-C_{\omega\lambda\nu}C_{\alpha\mu\varkappa})=0 \quad (2.24)$$

где ∇^μ — оператор контравариантного дифференцирования, Δ — оператор Лапласа, а индексы $\varkappa\lambda$ имеют значение (1.6). В подробной записи уравнения (2.24) имеют выражения

$$\Delta\varepsilon_{\varkappa\lambda}+\nabla_\varkappa\nabla_\lambda J_1-\nabla_\varkappa\nabla^\mu\varepsilon_{\lambda\mu}-\nabla_\lambda\nabla^\mu\varepsilon_{\varkappa\mu}-(K_1g^{\alpha\omega}+K_2g^{\alpha\sigma}g^{\tau\omega}\varepsilon_{\sigma\tau}+$$
$$+K_3g^{\alpha\sigma}g^{\tau\beta}g^{\gamma\omega}\varepsilon_{\sigma\tau}\varepsilon_{\beta\gamma})\,[(\nabla_\varkappa\varepsilon_{\omega\lambda}+\nabla_\lambda\varepsilon_{\omega\varkappa}-\nabla_\omega\varepsilon_{\lambda\varkappa})(2\nabla^\mu\varepsilon_{\alpha\mu}-\nabla_\alpha J_1)-$$
$$-g^{\mu\nu}(\nabla_\nu\varepsilon_{\omega\lambda}+\nabla_\lambda\varepsilon_{\omega\nu}-\nabla_\omega\varepsilon_{\lambda\nu})(\nabla_\varkappa\varepsilon_{\alpha\mu}+\nabla_\mu\varepsilon_{\alpha\varkappa}-\nabla_\alpha\varepsilon_{\mu\varkappa})]=0$$

Полученные уравнения представляют собою специальную форму уравнений совместности деформаций; они эквивалентны уравнениям (2.11). В прямоугольной декартовой системе координат эти уравнения будут вида

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{\varkappa\lambda}}{\partial x^\mu\,\partial x^\mu}+\frac{\partial^2J_1}{\partial x^\varkappa\,\partial x^\lambda}-\frac{\partial^2\varepsilon_{\lambda\mu}}{\partial x^\varkappa\,\partial x^\mu}-\frac{\partial^2\varepsilon_{\varkappa\mu}}{\partial x^\lambda\,\partial x^\mu}-(K_1\delta_{\alpha\omega}+K_2\varepsilon_{\alpha\omega}+K_3\varepsilon_{\alpha\sigma}\varepsilon_{\sigma\omega})\times$$
$$\times\Bigg[\left(\frac{\partial\varepsilon_{\omega\lambda}}{\partial x^\varkappa}+\frac{\partial\varepsilon_{\omega\varkappa}}{\partial x^\lambda}-\frac{\partial\varepsilon_{\lambda\varkappa}}{\partial x^\omega}\right)\left(2\frac{\partial\varepsilon_{\alpha\mu}}{\partial x^\mu}-\frac{\partial J_1}{\partial x^\alpha}\right)-$$
$$-\left(\frac{\partial\varepsilon_{\omega\lambda}}{\partial x^\mu}+\frac{\partial\varepsilon_{\omega\mu}}{\partial x^\lambda}-\frac{\partial\varepsilon_{\lambda\mu}}{\partial x^\omega}\right)\left(\frac{\partial\varepsilon_{\alpha\mu}}{\partial x^\varkappa}+\frac{\partial\varepsilon_{\alpha\varkappa}}{\partial x^\mu}-\frac{\partial\varepsilon_{\mu\varkappa}}{\partial x^\alpha}\right)\Bigg]=0$$

При малых деформациях нелинейными членами в (2.24) допустимо пренебречь и писать эти уравнения в виде

$$\Delta\varepsilon_{\varkappa\lambda}+\nabla_\varkappa\nabla_\lambda J_1-\nabla_\varkappa\nabla^\mu\varepsilon_{\lambda\mu}-\nabla_\lambda\nabla^\mu\varepsilon_{\varkappa\mu}=0 \quad (2.25)$$

Это специальная форма уравнений Сен-Венана совместности малых деформаций, представленных в произвольных координатах [4]. В декартовых координатах они имеют форму

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{\varkappa\lambda}}{\partial x^\mu\,\partial x^\mu}+\frac{\partial^2J_1}{\partial x^\varkappa\,\partial x^\lambda}-\frac{\partial^2\varepsilon_{\lambda\mu}}{\partial x^\varkappa\,\partial x^\mu}-\frac{\partial^2\varepsilon_{\varkappa\mu}}{\partial x^\lambda\,\partial x^\mu}=0$$

3. Уравнения совместности напряжений. В физически линейной теории упругости принимается, что законом поведения среды будет обобщенный закон Гука, утверждающий, что компоненты $\varepsilon_{\alpha\beta}$ тензора деформаций однородные линейные функции компонент $P_{\rho\tau}$ тензора напряжений

$$\varepsilon_{\alpha\beta}=\frac{1+\nu}{E}P_{\alpha\beta}-\frac{\nu}{E}J_1g_{\alpha\beta} \quad (3.1)$$

где J_1 — первый инвариант тензора напряжений, E — модуль Юнга, а ν — коэффициент Пуассона.

Так как при безразрывном деформировании среды компоненты тензора деформации удовлетворяют уравнениям совместности деформаций, то при таком деформировании в силу закона Гука компоненты тензора напряжений также будут удовлетворять некоторым уравнениям. Эти последние носят название уравнений совместности напряжений. Получим их явное выражение.

Основные инварианты тензора напряжений определяются формулами

$$J_1 = g^{\alpha\beta} P_{\alpha\beta}, \qquad J_2 = {}^1/_2 e^{\alpha\beta\gamma} e^{\omega\sigma\tau} g_{\alpha\omega} P_{\beta\sigma} P_{\gamma\tau}, \qquad J_3 = {}^1/_6 e^{\alpha\beta\gamma} e^{\omega\sigma\tau} P_{\alpha\omega} P_{\beta\sigma} P_{\gamma\tau}$$

Следствием закона Гука будет следующая связь между инвариантами тензоров деформаций и напряжений:

$$I_1 = \frac{1-2\nu}{E} J_1, \quad I_2 = \frac{1}{E^2} [(1+\nu)^2 J_2 - \nu (2-\nu) J_1^2]$$

$$I_3 = \frac{1}{E^3} [(1+\nu)^3 J_3 - \nu (1+\nu)^2 J_1 J_2 + \nu^2 J_1^3]$$

Обращаясь к формулам (2.10), видим, что в силу (3.1) они допускают запись

$$g_0^{\alpha\omega} = L_1 g^{\alpha\omega} + L_2 g^{\alpha\sigma} g^{\tau\omega} P_{\sigma\tau} + L_3 g^{\alpha\sigma} g^{\tau\beta} g^{\gamma\omega} P_{\sigma\tau} P_{\beta\gamma} \tag{3.2}$$

$$L_1 = K_1 - \frac{\nu}{E} J_1 K_2 + \frac{\nu^2}{E^2} J_1^2 K_3, \quad L_2 = \frac{1+\nu}{E} \left(K_2 - \frac{2\nu}{E} J_1 K_3\right), \quad L_3 = \frac{(1+\nu)^2}{E^2} K_3$$

и, как легко видеть, являются функциями инвариантов напряжений. Ковариантные производные от компонент тензоров деформаций и напряжений связаны зависимостями

$$\nabla_\varkappa \varepsilon_{\omega\lambda} = \frac{1+\nu}{E} \nabla_\varkappa P_{\omega\lambda} - \frac{\nu}{E} \nabla_\varkappa J_1 g_{\omega\lambda}$$

$$\nabla_\mu \nabla_\varkappa \varepsilon_{\omega\lambda} = \frac{1+\nu}{E} \nabla_\mu \nabla_\varkappa P_{\omega\lambda} - \frac{\nu}{E} \nabla_\mu \nabla_\varkappa J_1 g_{\omega\lambda}$$

Поэтому имеют место соотношения

$$\Delta \varepsilon_{\varkappa\lambda} = \frac{1+\nu}{E} \Delta P_{\varkappa\lambda} - \frac{\nu}{E} \Delta J_1 g_{\varkappa\lambda}, \qquad \nabla_\varkappa \nabla_\lambda I_1 = \frac{1-2\nu}{E} \nabla_\varkappa \nabla_\lambda J_1$$

$$\nabla_\varkappa \nabla^\mu \varepsilon_{\lambda\mu} + \nabla_\lambda \nabla^\mu \varepsilon_{\varkappa\mu} = \frac{1+\nu}{E} (\nabla_\varkappa \nabla^\mu P_{\lambda\mu} + \nabla_\lambda \nabla^\mu P_{\varkappa\mu}) - \frac{2\nu}{E} \nabla_\varkappa \nabla_\lambda J_1 \tag{3.3}$$

$$C_{\omega\lambda\varkappa} = \frac{1+\nu}{E} D_{\omega\lambda\varkappa} - \frac{\nu}{E} F_{\omega\lambda\varkappa} \tag{3.4}$$

$$D_{\omega\lambda\varkappa} = \nabla_\varkappa P_{\omega\lambda} + \nabla_\lambda P_{\omega\varkappa} - \nabla_\omega P_{\lambda\varkappa}, \quad F_{\omega\lambda\varkappa} = \nabla_\varkappa J_1 g_{\omega\lambda} + \nabla_\lambda J_1 g_{\omega\varkappa} - \nabla_\omega J_1 g_{\lambda\varkappa} \tag{3.5}$$

Подставив выражения (3.3) и (3.4) в уравнения (2.24), получим

$$\Delta P_{\varkappa\lambda} + \frac{1}{1+\nu} \nabla_\varkappa \nabla_\lambda J_1 - \frac{\nu}{1+\nu} \Delta J_1 g_{\varkappa\lambda} - \nabla_\varkappa \nabla^\mu P_{\lambda\mu} - \nabla_\lambda \nabla^\mu P_{\varkappa\mu} -$$
$$- g_0^{\alpha\omega} g^{\mu\rho} \left[\frac{1+\nu}{E} (D_{\omega\lambda\varkappa} D_{\alpha\mu\rho} - D_{\omega\lambda\rho} D_{\alpha\mu\varkappa}) - \frac{\nu}{E} (D_{\omega\lambda\varkappa} F_{\alpha\mu\rho} + F_{\omega\lambda\varkappa} D_{\alpha\mu\rho} - \right.$$
$$\left. - D_{\omega\lambda\rho} F_{\alpha\mu\varkappa} - F_{\omega\lambda\rho} D_{\alpha\mu\varkappa}) + \frac{\nu^2}{E(1+\nu)} (F_{\omega\lambda\varkappa} F_{\alpha\mu\rho} - F_{\omega\lambda\rho} F_{\alpha\mu\varkappa})\right] = 0$$

Эти уравнения ввиду (3.2) и (3.5) содержат только компоненты тензора напряжений и первые и вторые ковариантные производные от этих компонент. Это и есть уравнения совместности напряжений, соответствующие геометрически нелинейным средам.

Возможны некоторые упрощения этих уравнений. Если воспользоваться уравнениями равновесия

$$\nabla^\mu P_{\lambda\mu} = - f_\lambda$$

где f_λ — компоненты объемной силы, то

$$\nabla_\varkappa \nabla^\mu P_{\lambda\mu} + \nabla_\lambda \nabla^\mu P_{\varkappa\mu} = - \nabla_\varkappa f_\lambda - \nabla_\lambda f_\varkappa$$

$$g^{\mu\rho} D_{\alpha\mu\rho} = - 2 f_\alpha - \nabla_\alpha J_1, \quad g^{\mu\rho} F_{\alpha\mu\rho} = - \nabla_\alpha J_1$$

С учетом всех этих выражений уравнения совместности напряжений можно представить в форме

$$\Delta P_{\varkappa\lambda}+\frac{1}{1+\nu}\nabla_\varkappa\nabla_\lambda J_1-\frac{\nu}{1+\nu}\Delta J_1 g_{\varkappa\lambda}+\nabla_\varkappa f_\lambda+\nabla_\lambda f_\varkappa+$$
$$+(L_1 g^{\alpha\omega}+L_2 g^{\alpha\sigma}g^{\tau\omega}P_{\sigma\tau}+L_3 g^{\alpha\sigma}g^{\tau\beta}g^{\gamma\omega}P_{\sigma\tau}P_{\beta\gamma})\times$$
$$\times\Big\{\frac{1+\nu}{E}[D_{\omega\lambda\varkappa}(2f_\alpha+\nabla_\alpha J_1)+g^{\mu\rho}D_{\omega\lambda\rho}D_{\alpha\mu\varkappa}]-$$
$$-\frac{\nu}{E}[D_{\omega\lambda\varkappa}\nabla_\alpha J_1+F_{\omega\lambda\varkappa}(2f_\alpha+\nabla_\alpha J_1)+g^{\mu\rho}(D_{\omega\lambda\rho}F_{\alpha\mu\varkappa}+F_{\omega\lambda\rho}D_{\alpha\mu\varkappa})]+$$
$$+\frac{\nu^2}{E(1+\nu)}[F_{\omega\lambda\varkappa}\nabla_\alpha J_1+g^{\mu\rho}F_{\omega\lambda\rho}F_{\alpha\mu\varkappa}]\Big\}=0 \qquad (3.6)$$

Независимые уравнения этой системы определяются значениями (1.6) индексов $\varkappa$ и λ.

Заметим, что уравнения (3.6) представлены в тензорной форме и содержат только ковариантные компоненты тензора напряжений. Однако, отправляясь от них, можно получить уравнения, которые содержали бы только контравариантные компоненты напряжений. Для этого достаточно применить к равенству (3.6) операцию поднятия индексов. В итоге получим уравнения совместности напряжений в виде

$$\Delta P^{\varkappa\lambda}+\frac{1}{1+\nu}\nabla^\varkappa\nabla^\lambda J_1-\frac{\nu}{1+\nu}\Delta J_1 g^{\varkappa\lambda}+\nabla^\varkappa f^\lambda+\nabla^\lambda f^\varkappa+(L_1 g_{\alpha\omega}+L_2 g_{\alpha\sigma}g_{\tau\omega}P^{\sigma\tau}+$$
$$+L_3 g_{\alpha\sigma}g_{\tau\beta}g_{\gamma\omega}P^{\sigma\tau}P^{\beta\gamma})\Big\{\frac{1+\nu}{E}[D^{\omega\lambda\varkappa}(2f^\alpha+\nabla^\alpha J_1)+g_{\mu\rho}D^{\omega\lambda\rho}D^{\alpha\mu\varkappa}]-$$
$$-\frac{\nu}{E}[D^{\omega\lambda\varkappa}\nabla^\alpha J_1+F^{\omega\lambda\varkappa}(2f^\alpha+\nabla^\alpha J_1)+g_{\mu\rho}(D^{\omega\lambda\rho}F^{\alpha\mu\varkappa}+F^{\omega\lambda\rho}D^{\alpha\mu\varkappa})]+$$
$$+\frac{\nu^2}{E(1+\nu)}[F^{\omega\lambda\varkappa}\nabla^\alpha J_1+g_{\mu\rho}F^{\omega\lambda\rho}F^{\alpha\mu\varkappa}]\Big\}=0 \qquad (3.7)$$

где

$$P^{\varkappa\lambda}=g^{\varkappa\sigma}g^{\tau\lambda}P_{\sigma\tau},\qquad f^\lambda=g^{\lambda\sigma}f_\sigma$$
$$D^{\omega\lambda\varkappa}=\nabla^\varkappa P^{\omega\lambda}+\nabla^\lambda P^{\omega\varkappa}-\nabla^\omega P^{\lambda\varkappa},\qquad F^{\omega\lambda\varkappa}=\nabla^\varkappa J_1 g^{\omega\lambda}+\nabla^\lambda J_1 g^{\omega\varkappa}-\nabla^\omega J_1 g^{\lambda\varkappa}$$

а индексы имеют значения (1.6).

В частном случае прямоугольной декартовой системы координат формы (3.6) и (3.7) уравнений совместности напряжений совпадают друг с другом и принимают вид

$$\frac{\partial^2 P_{\varkappa\lambda}}{\partial x^\sigma\partial x^\sigma}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 J_1}{\partial x^\varkappa\partial x^\lambda}-\frac{\nu}{1+\nu}\frac{\partial^2 J_1}{\partial x^\sigma\partial x^\sigma}\delta_{\varkappa\lambda}+\frac{\partial f_\lambda}{\partial x^\varkappa}+\frac{\partial f_\varkappa}{\partial x^\lambda}+$$
$$+(L_1\delta_{\alpha\omega}+L_2 P_{\alpha\omega}+L_3 P_{\alpha\sigma}P_{\sigma\omega})\Big\{\frac{1+\nu}{E}\Big[D'_{\omega\lambda\varkappa}\Big(2f_\alpha+\frac{\partial J_1}{\partial x^\alpha}\Big)+D'_{\omega\lambda\rho}D'_{\alpha\rho\varkappa}\Big]-$$
$$-\frac{\nu}{E}\Big[D'_{\omega\lambda\varkappa}\frac{\partial J_1}{\partial x^\alpha}+F'_{\omega\lambda\varkappa}\Big(2f_\alpha+\frac{\partial J_1}{\partial x^\alpha}\Big)+D'_{\omega\lambda\rho}F'_{\alpha\rho\varkappa}+F'_{\omega\lambda\rho}D'_{\alpha\rho\varkappa}\Big]+$$
$$+\frac{\nu^2}{E(1+\nu)}\Big[F'_{\omega\lambda\varkappa}\frac{\partial J_1}{\partial x^\alpha}+F'_{\omega\lambda\rho}F'_{\alpha\rho\varkappa}\Big]\Big\}=0$$

где

$$D'_{\omega\lambda\varkappa}=\frac{\partial P_{\omega\lambda}}{\partial x^\varkappa}+\frac{\partial P_{\omega\varkappa}}{\partial x^\lambda}-\frac{\partial P_{\lambda\varkappa}}{\partial x^\omega},\qquad F'_{\omega\lambda\varkappa}=\frac{\partial J_1}{\partial x^\varkappa}\delta_{\omega\lambda}+\frac{\partial J_1}{\partial x^\lambda}\delta_{\omega\varkappa}-\frac{\partial J_1}{\partial x^\omega}\delta_{\lambda\varkappa}$$

Уравнения совместности напряжений (3.6) соответствуют общему нелинейному закону (2.18) зависимости деформаций от перемещений. При малых деформациях эта зависимость линейна, линейны же и уравнения совместности деформаций (формулы (2.25)). В этом случае уравнения совместности напряжений будут также линейными.

Легко видеть, что они представляют собой линейную часть уравнений (3.6)

$$\Delta P_{\varkappa\lambda} + \frac{1}{1+\nu}\nabla_\varkappa\nabla_\lambda J_1 - \frac{\nu}{1+\nu}\Delta J_1 g_{\varkappa\lambda} + \nabla_\varkappa f_\lambda + \nabla_\lambda f_\varkappa = 0 \qquad (3.8)$$

Эти уравнения допускают дальнейшее упрощение. В рассматриваемом случае напряжения выражаются через перемещения в виде

$$P_{\lambda\mu} = \frac{\nu}{1+\nu} J_1 g_{\lambda\mu} + \frac{E}{2(1+\nu)}(\nabla_\lambda w_\mu + \nabla_\mu w_\lambda)$$

Отсюда следует, что первый инвариант напряжений пропорционален дивергенции перемещения

$$J_1 = \frac{E}{1-2\nu}\nabla_\alpha w^\alpha$$

Применение оператора дивергенции к уравнениям равновесия

$$\nabla_\alpha J_1 + E\Delta w_\alpha = -2(1+\nu)f_\alpha$$

позволяет выразить ΔJ_1 через заданные силы в виде

$$\Delta J_1 = -\frac{1+\nu}{1-\nu}\nabla^\alpha f_\alpha$$

Учитывая этот результат, представим уравнения (3.8) в окончательном виде

$$\Delta P_{\varkappa\lambda} + \frac{1}{1+\nu}\nabla_\varkappa\nabla_\lambda J_1 + \frac{\nu}{1-\nu}\nabla^\alpha f_\alpha g_{\varkappa\lambda} + \nabla_\varkappa f_\lambda + \nabla_\lambda f_\varkappa = 0 \qquad (3.9)$$

Это есть уравнения Бельтрами — Митчела совместности напряжений, рассматриваемые в линейной теории упругости [4,5]. Поднимая индексы $\varkappa$ и λ, получим уравнения для контравариантных компонент напряжений

$$\Delta P^{\varkappa\lambda} + \frac{1}{1+\nu}\nabla^\varkappa\nabla^\lambda J_1 + \frac{\nu}{1-\nu}\nabla^\alpha f_\alpha g^{\varkappa\lambda} + \nabla^\varkappa f^\lambda + \nabla^\lambda f^\varkappa = 0 \qquad (3.10)$$

В декартовых координатах уравнения (3.9) и (3.10) имеют вид

$$\frac{\partial^2 P_{\varkappa\lambda}}{\partial x^\alpha \partial x^\alpha} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 J_1}{\partial x^\varkappa \partial x^\lambda} + \frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial f_\alpha}{\partial x^\alpha}\delta_{\varkappa\lambda} + \frac{\partial f_\lambda}{\partial x^\varkappa} + \frac{\partial f_\varkappa}{\partial x^\lambda} = 0$$

Таким образом, уравнения совместности напряжений Бельтрами — Митчела соответствуют геометрически и физически линейной упругости; уравнения же (3.6) представляют собою обобщения этих уравнений в случае геометрической нелинейности.

Поступила 29 VII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
2. Снеддон Н. Н., Берри Д. С. Классическая теория упругости. М., Физматгиз, 1961.
3. Новожилов В. В. Теория упругости. Л., Судпромгиз, 1958.
4. Жермен П. Механика сплошных сред. М., «Мир», 1965.
5. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости, изд. 5. М., «Наука», 1966.