АВТОМОДЕЛЬНЫЕ СПЕКТРЫ ЗАТУХАЮЩЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА И ПЕКЛЕ

С. Панчев

(София)

Рассматривается спектр кинетической энергии и энергии температурных флуктуаций изотропной турбулентности в пренебрежении вязкостью и молекулярной теплопроводностью. Получены элементарные решения соответствующих спектральных уравнений, которые позволяют проще исследовать свойства некоторых модельных спектров, а также ряд возможных законов затухания.

Как известно [1], спектральные уравнения для изотропной турбулентности имеют вид

$$(\partial/\partial t + 2\nu k^2)\Phi(k, t) = -\partial/\partial k \; F(k, t) \tag{1}$$

$$(\partial/\partial t + 2\varkappa k^2)\, \Phi_{tt}(k, t) = -\partial/\partial k \; F_t(k, t) \tag{2}$$

где k — волновое число, t — время, F и F_t — функции переноса энергии, а Φ и Φ_{tt} — спектры флуктуаций, определяемые равенствами

$$E(t) = \frac{1}{2}\langle u_i^2\rangle = \int_0^\infty \Phi(k, t)\, dk \tag{3}$$

$$E_t(t) = \langle T'^2\rangle = \int_0^\infty \Phi_{tt}(k, t)\, dk \tag{4}$$

Будем пренебрегать влиянием молекулярных эффектов ($\varkappa = \nu = 0$) и примем наиболее простое выражение для $F(k, t)$, предложенное Коважным

$$F(k, t) = \alpha^{-3/2} k^{5/2} \Phi^{3/2}(k, t) \tag{5}$$

и его обобщение на случай температурного поля

$$F_t(k, t) = \alpha_t^{-1} \alpha^{-1/2} \Phi^{1/2}(k, t)\, \Phi_{tt}(k, t) \tag{6}$$

где α и α_t — универсальные константы, а ε и ε_t — параметры диссипации.

Примем теперь, на основе предложения о неизменности крупных вихрей [1], что

$$\Phi(k, t) = \Lambda_m k^n, \quad k \to 0 \tag{7}$$

где $\Lambda_n = \Lambda(n)$ — размерная константа, зависящая только от числа n. Что касается степенного показателя n в (7), то до сих пор нет единого мнения о его величине. Так, если инвариант Лойцянского существует [2], имеем $n = 4$. С другой стороны, в теории Кармана и Линя [3] $n = 1$, а в теории Сафмена [4] $n = 2$. Ниже будем рассматривать n как свободный параметр.

Недавно Лейтсом [5] была высказана новая гипотеза о самоподобии спектра энергии вырождающейся турбулентности при больших числа Рейнольдса R.

Используя эту гипотезу, запишем

$$\Phi(k, t) = \lambda_n^3 t^{-2} \Phi_*(k_*), \quad k_* = k\lambda_n, \quad \lambda_n(t) = (\Lambda_n t^2)^{\frac{1}{n+3}} \tag{8}$$

Здесь $\Phi_k(k_*)$ — безразмерная функция, такая что

$$\Phi_*(k_*) = k_*^{\,n}\ (k_* \to 0), \quad \Phi_*(k_*) = a_n k_*^{-5/3} \quad (k_* \to \infty) \tag{9}$$

Определяя a_n обычным образом [5], получим

$$a_n = \left[2\,\frac{n+1}{n+3}\, E_n{}^*\right]^{2/3} \alpha, \quad E_n{}^* = \int_0^\infty \Phi_*(k_*)\, dk_* \tag{10}$$

Подчеркнем, что $E_n{}^*$ не зависит от t. Сравнивая (8) — (10) с известным выражением [2]

$$\Phi(k, t) = \alpha\varepsilon^{2/3}(t)\, k^{-5/3} \tag{11}$$

нетрудно получить возможные законы затухания турбулентности при разных n. Эти результаты приведены в [5]. Однако для замыкания уравнения (1) в [5] была использована так называемая диффузионная аппроксимация для $F(k, t)$, не позволяющая получить решение в аналитической форме.

Используя здесь аппроксимацию Коважного [5], после некоторых преобразований получим явное решение (1) в параметрической форме

$$x^{\frac{n+3}{2}} = M^{-\frac{3n+9}{3n+5}} - M^{-1}, \quad \Psi(x) = x^n M^2(x) \tag{12}$$

$$\Phi_*(k_*) = \alpha^{\frac{3n}{n+3}} \Psi(x), \quad k_* = \alpha^{\frac{3}{n+3}} x$$

Это уравнение легко разрешается при $n = 1$. При $k_* \to \infty$ имеем из (12) асимптотику

$$\Phi_*(k_*) = \alpha^{(3n+5)/(n+3)} k_*^{-5/3}, \quad k_* \to \infty \tag{13}$$

Отсюда, согласно (9), находим $a_n = \alpha^{(3n+5)/(n+3)}$. Сравнивая это с (10), получаем формулу

$$E_n^* = \int_0^\infty \Phi_*(k_*)\, dk_* = \frac{n+3}{2n+2} \alpha^{(3n+3)/(n+3)} \tag{14}$$

Зададим теперь форму температурного спектра около начальной точки $k = 0$ в форме

$$\Phi_{tt}(k, t) = \Lambda_{n_t} k^{n_t}, \quad k \to 0 \tag{15}$$

Как известно [2], если инвариант Корсина существует, $n_t = 2$. Для общности будем считать параметр n_t свободным. Расширяя гипотезу Лейтса [5] о самоподобии спектров в процессе вырождения, можно написать

$$\Phi_{tt}(k, t) = \Lambda_{n_t} \lambda_n^{-n_t} \Phi_{tt}^*(k_*) \quad (k_* = k\lambda_n) \tag{16}$$

Здесь $\lambda_n(t)$ определена (8). Безразмерная функция $\Phi_{tt}^*(k_*)$ должна иметь следующие асимптоты:

$$\Phi_{tt}^*(k_*) = \begin{cases} k_*^{n_t} & (k_* \to 0) \\ a_{nn_t} k_*^{-5/3} & (k_* \to \infty) \end{cases} \tag{17}$$

Поступая при определении a_{nn_t} в (17) так же, как и при определении a_n в (9), согласно [5], получим

$$a_{nn_t} = 2\frac{1+n_t}{3+n} \alpha_t \left(\frac{\alpha}{a_n}\right)^{1/2} E_{nn_t}^*$$

$$E_{nn_t}^* = \int_0^\infty \Phi_{tt}^*(k_*)\, dk_* \tag{18}$$

n_t	$n = 0$	1	2	3	4
0	$t^{-2/3}$	$t^{-1/2}$	$t^{-2/5}$	$t^{-1/3}$	$t^{-2/7}$
1	$t^{-4/3}$	t^{-1}	$t^{-4/5}$	$t^{-2/3}$	$t^{-4/7}$
2	t^{-2}	$t^{-3/2}$	$t^{-6/5}$	t^{-1}	$t^{-6/7}$

Возможные законы затухания интенсивности $E_t(t) \sim t^{-\sigma}$ температурных флуктуаций, соответствующие разным n около начальной точки $k = 0$, приведены в таблице. Они получаются совершенно аналогично законам затухания энергии турбулентности в [5].

Обратимся теперь к уравнению (2). В безразмерной форме, используя гипотезу (6), имеем

$$k_* \frac{d\Phi_{tt}^*}{dk_*} - n_t \Phi_{tt}^* = -\frac{n+3}{2\alpha_t \sqrt{\alpha}} \frac{d}{dk_*} k_*^{5/2} \Phi_*^{1/2}(k_*) \Phi_{tt}^*(k_*) \tag{19}$$

Решение этого линейного относительно $\Phi_{tt}{}^*$ уравнения будет

$$\Phi_{tt}{}^*(k_*) = k_*^{n_t} \exp\left[-\delta_n \int_0^{k_*} \frac{(n_t + {}^5/_2)(x\Phi_*)^{1/2} + x^{3/2} d\sqrt{\Phi_*}/dx}{1 + \delta_n x^{3/2} \sqrt{\Phi_*}} dx\right] \tag{20}$$

$$\delta_n = (n+3)/2\alpha_t \sqrt{\alpha}$$

Здесь $\Phi_*(k_*)$ — безразмерный спектр кинетической энергии, найденный в предыдущем разделе.

Рассмотрим пример. Для очень больших k_*, подставляя (9) в (20), после интегрирования получим

$$\Phi_{tt}{}^*(k_*) = k_*^{n_t}(1 + \delta_n a_n^{1/2} k_*^{2/3})^{-1/2(5+3n_t)} \approx (\delta_n \sqrt{a_n})^{-1/2(5+3n_t)} k_*^{-5/3} \tag{21}$$

что согласуется с (17) и, кроме того, дает

$$a_{nn_t} = (\delta_n \sqrt{a_n})^{-1/2(5+3n_t)} \tag{22}$$

Наконец, аналогично (14) получаем равенство

$$E^*_{nn_t} = \int_0^\infty \Phi_{tt}{}^*(k_*)\, dk_* = \frac{1}{1+n_t}\left(\frac{2\alpha_t}{n+3}\right)^{\frac{3(1+n_t)}{2}} \alpha^{\frac{-3(1+n)(1+n_t)}{2(n+3)}}$$

Нужно, однако, иметь в виду, что все полученные спектры тесно связаны с аппроксимациями Коважного (5) и (6). В других аппроксимациях $E_n{}^*$ и $E^*_{nn_t}$ будут даваться другими формулами. В то же время законы вырождения будут являться прямым следствием только гипотезы Лейтса (8) и ее обобщение (16) на случай температурного поля. Не следует также забывать, что все полученные результаты относятся к начальному периоду вырождения изотропной турбулентности, когда влиянием вязкости и молекулярной теплопроводности можно пренебречь.

Совместное приложение гипотез Лейтса (8) и Коважного (5) о самоподобии энергетического спектра в начальном периоде вырождения изотропной турбулентности и о форме функции переноса энергии по спектру и их обобщения (16) и (6) на случай температурного поля приводит к точным элементарным решениям (12) и (20) для соответствующих спектральных функций $\Phi(k, t)$ и $\Phi_{tt}(k, t)$. Такое решение относительно температурного спектра, насколько известно автору, дается впервые. После того как спектры найдены, можно определить также и функции переноса $F(k, t)$ и $F_t(k, t)$, одномерные спектры $f(k, t)$ и $f_{tt}(k, t)$, корреляционные функции $B(r, t)$ и $B_{tt}(r, t)$, коэффициенты асимметрии $S(t)$ и $S_t(t)$ и т. д. и сравнивать их с опытом, как это делалось в [5–7]. Можно также надеяться, что относительная математическая простота изложенного выше анализа позволит успешно решить в необходимой полноте и задачу об устойчивости полученных решений, без которого они не имели бы реального смысла. До сих пор частичные результаты в этом направлении были получены только при помощи аппроксимации Гейзенберга (см., например, [8]). Все это может служить темой будущих исследований.

Поступила 5 II 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Бэтчелор Дж. К. Теория однородной турбулентности. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
2. Хинце И. О. Турбулентность. М., Физматгиз, 1963.
3. Karman T., Lin C. C. On the statistical theory of isotropic turbulence. Advances Appl. Mech., 1951, vol. 2.
4. Saffman P. G. The large — scale structure of homogeneous turbulence. J. Fluid Mech. 1967, vol. 27, No 3.
5. Leith C. E. Diffusion approximation to inertial energy transfer in isotropic turbulence. Phys. Fluids, 1967, vol. 10, No 7.
6. Reid W. H., Harris D. L. Similarity spectra in isotropic turbulence. Phys. Fluids, 1959, vol. 2, No 2.
7. Stewart R. W., Townsend A. A. Similarity and self — preservation in isotropic turbulence. Phil. Trans. Roy. Soc., Ser. A 243, 1951, No 867.
8. Lin C. H., Reid W. H. Turbulent flow, theoretical aspects. Handb. Phys., Bd 8/2, Berlin, Springer — Verlag.