Прикладная математика и механика. Том 33, 1969

НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ВОЛНЫ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ КАНАЛЕ ПОСТОЯННОЙ ГЛУБИНЫ

В. В. Мусатов

(Москва)

Исследуется распространение волн, возникших от первоначального поднятия на поверхности вращающейся жидкости. Деформация возмущенного уровня развивается согласно теории длинных волн. Неустановившуюся часть волнового поднятия можно рассматривать как предельное наложение стоячих волн с фазами, допускающими полный диапазон волновых чисел. Действие начальных возмущений предполагается таковым, что с уменьшением расстояния между узлами элементарные гребни любой составляющей принимают положение, близкое к равновесному. В приведенной трактовке нестационарных волновых задач допустимо использовать интеграл Фурье, комплексная амплитуда которого подлежит определению. В основу рассмотрений волн в канале положено общее гидродинамическое исследование Л. Н. Сретенского о волнах цунами на вращающейся полуплоскости [1].

1. Величина возмущенного уровня в канале постоянной глубины h находится из волнового уравнения

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}+4\omega^2\zeta=gh\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right) \tag{1.1}$$

с начальными функциями

$$\zeta(x,\ y,\ 0)=M(x,\ y),\ \partial\zeta(x,\ y,\ 0)\ /\ \partial t=N(x,\ y) \tag{1.2}$$

возмущенные движения, неприводящие к изменению во времени жидкого уровня, не рассматриваются.

Принимая безударные начальные значения поперечных компонент скорости и ускорения, условия непроницаемости на границах $y=0$, $y=l$ можно выразить в виде

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t\,\partial y}-2\omega\frac{\partial\zeta}{\partial x}=0 \tag{1.3}$$

указывающем на присутствие параметра Кориолиса.

Начальные возмущения (1.2) на открытой поверхности под действием центробежной силы инерции, встречая отвесные стенки канала, будут испытывать неоднократное отражение. Задача состоит в нахождении вида свободной поверхности, покрытой в канале неустановившимися волнами.

2. Волновое поднятие $\zeta(x,\ y,\ t)$ отыскивается посредством интеграла

$$\zeta(x,\ y,\ t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}A(t,\ y,\ k)\,e^{ikx}\,dk \tag{2.1}$$

с неизвестной комплексной амплитудой $A(t,\ y,\ k)$. В соответствии с обратным преобразованием Фурье начальные функции (1.2) представляются интегралами

$$f(y, k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M(\xi, y) e^{-ik\xi} d\xi, \quad \varphi(y, k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} N(\xi, y) e^{-ik\xi} d\xi$$

Подстановка выражения (2.1) в (1.1) дает телеграфное уравнение

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + s^2 A = 0, \qquad s^2 = 4\omega^2 + c^2 k^2 \tag{2.2}$$

с преобразованными начальными условиями

$$A(0, y, k) = f(y, k), \qquad \frac{\partial A(0, y, k)}{\partial t} = \varphi(y, k) \tag{2.3}$$

Из условий непроницаемости (1.3) следуют граничные условия отражения от стенок канала $y = 0$, $y = l$

$$\partial^2 A \,/\, \partial t \partial y - 2i\omega k A = 0 \tag{2.4}$$

Задача нахождения $A(t, y, k)$ может быть сведена к интегрированию неоднородного уравнения гиперболического типа

$$\partial^2 A \,/\, \partial t \partial y - 2i\omega k A = B(t, y, k) \tag{2.5}$$

Тогда для функции $B(t, y, k)$, представляющей правую часть (2.5), задача формулируется следующим образом: требуется найти функцию $B(t, y, k)$, удовлетворяющую однородному уравнению

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} + s^2 B = 0 \tag{2.6}$$

однородным граничным условиям

$$B(t, 0, k) = B(t, l, k) = 0 \tag{2.7}$$

с начальными данными по Коши

$$B(0, y, k) = m(y, k), \qquad \frac{\partial B(0, y, k)}{\partial t} = n(y, k) \tag{2.8}$$

где известные функции $m(y, k)$, $n(y, k)$ связаны с величинами (2.3) такими зависимостями

$$m(y, k) = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - 2i\omega k f(y, k), \quad n(y, k) = c^2 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} - s^2 \frac{\partial f}{\partial y} - 2i\omega k \varphi(y, k) \tag{2.9}$$

3. Внутри полосы $t \geqslant 0$, $0 \leqslant y \leqslant l$ решение характеристической задачи Коши со смешанными граничными условиями (2.7), (2.8) можно получить методом Адамара [2]. Двупараметрическим семейством характеристик $y \mp ct = \text{const}$ область существования функции $B(t, y, k)$ разбивается на ряд отдельных подобластей, в каждой из которых определяется аналог функции Римана с постоянным скачком при переходе через характеристику. Так, при $ct \leqslant y$ функция Римана имеет вид

$$R(\sigma) = J_0((s/c)\sqrt{\sigma}) = J_0((s/c)\sqrt{c^2t^2 - (y - \eta)^2})$$

соответствующий дифференциальному выражению (2.6) без влияния границ. До определенного момента времени $B(t, y, k)$ представляет свободное распространение возмущений от источников и выражается в виде

$$B(t, y, k) = {}^1/_2 [m(y - ct, k) + m(y + ct, k)] + \tag{3.1}$$
$$+ \frac{1}{2c} \int_{y-ct}^{y+ct} [R(\sigma) n(\eta, k) + 2c^2 t R'(\sigma) m(\eta, k)] \, d\eta$$

Представление бегущими волнами (3.1) позволяет убедиться в выполнении начальных условий (2.8). Граничное условие на стенке $y = 0$ будет удовлетворено, если функцию Римана построить методом изображений

$$R(\sigma_1) = J_0((s/c)\sqrt{\sigma_1}) = J_0((s/c)\sqrt{c^2t^2 - (y + \eta)^2})$$

и тогда при $ct \geqslant y$

$$B(t, y, k) = {}^1/_2 [m(ct + y, k) - m(ct - y, k)] + \tag{3.2}$$
$$+ \frac{1}{2c} \int_0^{ct+y} [R(\sigma) n(\eta, k) + 2c^2 t R'(\sigma) m(\eta, k)] \, d\eta -$$
$$- \frac{1}{2c} \int_0^{ct-y} [R(\sigma_1) n(\eta, k) + 2c^2 t R'(\sigma_1) m(\eta, k)] \, d\eta$$

Обе формы (3.1) и (3.2) равнозначны при нечетном продолжении начальных функций (2.9) через границу $y = 0$.

В общем случае, чтобы удовлетворить требованиям отражения волн (2.7), необходимо поперек полосы расположить последовательно в точках

$$2q_1 l + \eta, \quad \eta - 2q_2 l, \quad -\eta - 2q_1' l, \quad 2q_2' l - \eta$$

мнимые источники; тогда после соответствующей группировки общее действие источников изобразится функцией разрывного решения Римана — Адамара

$$H(t, y, \eta, k) = \sum_{q_1} R(\sigma_{q_1}) + \sum_{q_2} R(\sigma_{q_2}) - \sum_{q_1'} R(\sigma_{q_1'}) - \sum_{q_2'} R(\sigma_{q_2'}) \tag{3.3}$$

В окружности с радиусом ct величины

$$\sigma_{q_1} = c^2t^2 - (y - \eta - 2q_1 l)^2, \quad \sigma_{q_2} = c^2t^2 - (y - \eta + 2q_2 l)^2 \tag{3.4}$$
$$\sigma_{q_1'} = c^2t^2 - (y + \eta + 2q_1' l)^2, \quad \sigma_{q_2'} = c^2t^2 - (y + \eta - 2q_2' l)^2$$

суть квадраты полухорд, проходящих через точечные источники перпендикулярно центральной оси. Геометрически очевидно, что, если окружность целиком размещается внутри полосы $t \geqslant 0$, $0 \leqslant y \leqslant l$, отраженных волн в данный момент не будет. С последовательными моментами отражения связаны целые числа, ограниченные пределами неравенств

$$\frac{y + ct - l}{2l} \leqslant q_1 \leqslant \frac{y + ct}{2l}, \qquad \frac{ct - y}{2l} \leqslant q_2 \leqslant \frac{ct - y + l}{2l}$$
$$\frac{ct - y - l}{2l} \leqslant q_1' \leqslant \frac{ct - y}{2l}, \qquad \frac{ct + y}{2l} \leqslant q_2' \leqslant \frac{ct + y + l}{2l} \tag{3.5}$$

Количество слагаемых в каждой из сумм (3.3) может быть одним и тем же или отличаться на единицу в зависимости от времени и места наблюдаемого прихода волны. Из нижних и верхних значений неравенств (3.5) видно, в какой последовательности отдельные возмущения поступают в данную точку, включая границы канала.

Почленное применение формулы Грина в областях, охваченных кусками границ и отрезками смежных характеристик, приводит к выражению

$$\begin{aligned}
R(t, y, k) = &\frac{1}{2}\sum_{q_1} m(y+ct-2q_1 l, k) + \frac{1}{2}\sum_{q_2} m(y-ct+2q_2 l, k) + \\
&+\frac{1}{2}\sum_{q_1'} m(y-ct+2q_1' l, k) + \frac{1}{2}\sum_{q_2'} m(y+ct-2q_2' l, k) + \\
&+\frac{1}{2c}\sum_{q_1}\int_0^{\eta_1} [R(\sigma_{q_1}) n(\eta, k) + 2c^2 tR'(\sigma_{q_1}) m(\eta, k)]\, d\eta + \\
&\qquad (\eta_1 = y+ct-2q_1 l) \\
&+\frac{1}{2c}\sum_{q_2}\int_{\eta_2}^{l} [R(\sigma_{q_2}) n(\eta, k) + 2c^2 tR'(\sigma_{q_2}) m(\eta, k)]\, d\eta - \\
&\qquad (\eta_2 = 2q_2 l + y - ct) \\
&-\frac{1}{2c}\sum_{q_1'}\int_0^{\eta_3} [R(\sigma_{q_1'}) n(\eta, k) + 2c^2 tR'(\sigma_{q_1'}) m(\eta, k)]\, d\eta - \\
&\qquad (\eta_3 = ct - y - 2q_1' l) \\
&-\frac{1}{2c}\sum_{q_2'}\int_{\eta_4}^{l} [R(\sigma_{q_2'}) n(\eta, k) + 2c^2 tR'(\sigma_{q_2'}) m(\eta, k)]\, d\eta \\
&\qquad (\eta_4 = 2q_2' l - y - ct)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

знак штриха у функции R указывает на дифференцирование по любому изображающему аргументу (3.4). Окончательный результат (3.6) складывается из конечной комбинации отдельных решений двух типов: для подобласти, содержащей границу полосы, решения отвечают граничной задаче с начальными данными Коши; решения между отрезками характеристик можно получить, используя метод функции Римана. Истокообразно представленное выражение (3.6) обобщает формулу (3.2) для произвольного момента времени. Вспомогательная задача построения функции $B(t, y, k)$, входящей в уравнение (2.5), решена.

4. В характеристической задаче Коши для уравнения (2.5) при условиях (2.3) недостает данных на характеристике $y = 0$. Действительно, условия (2.5) задаются на одной характеристике $t = 0$ и, следовательно, не определяют интеграла гиперболического уравнения (2.5). Условия (2.3) совместны с (2.8) и не противоречат уравнению (2.5), но и не дают новых данных задачи. Для полного определения интеграла допускается, что вдоль характеристики $y = 0$ функция A принимает значения некоторой функции $F(t, k)$, которая может быть найдена из дополнительного требования [1]. В рассматриваемой задаче интеграл уравнения (2.5) по данным на характеристиках $A(0, y, k) = f(y, k)$, $A(t, 0, k) = F(t, k)$ должен удовлетворять телеграфному уравнению (2.2) всюду, вплоть до границы $y = 0$, при этом $F(t, k)$ предполагается непрерывной и с однозначной в точке $t = y = 0$ производной, вычисленной по разным направлениям.

Построение $A(t, y, k)$ проводится методом функции Римана

$$A(t, y, k) = F(t, k) + f(y, k) - f(0, k) S(\rho_0) + t\int_0^y f(\eta, k) S'(\rho_1)\, d\eta +$$
$$+ y\int_0^t F(\tau, k) S'(\rho_2)\, d\tau + \int_0^t d\tau \int_0^y B(\tau, \eta, k)\, d\eta \qquad (4.1)$$

Здесь сохранены обозначения, принятые в работе Л. Н. Сретенского [1]: $\overline{S(\rho)}$ — риманова функция, для которой

$$S(0) = 1, \quad \rho = (t - \tau)\ (y - \eta), \qquad \rho_1 = t(y - \eta), \qquad \rho_2 = y(t - \tau), \ \rho_0 = ty$$

Значение левой части (2.2) на характеристике $y = 0$ обращается в интегро-дифференциальное уравнение

$$F''(t, k) + s^2 F(t, k) + 4\omega^2 c^2 k^2 \int_0^t F(\tau, k)(t - \tau)\, d\tau - \qquad (4.2)$$
$$- c^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{y=0} - 2i\,\omega k c^2 t \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y=0} - c^2 \int_0^t \left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)_{y=0} d\tau = 0$$

приводящееся к обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка с постоянными коэффициентами, начальные условия определяются соотношением (4.2) и по данным $A(t, y, k)$ в точке $t = y = 0$.

После отыскания интеграла дифференцированием по t получается функция

$$F(t, k) = \frac{C_1 \cos 2\omega t + C_2 \sin 2\omega t + C_3 \cos kct + C_4 \sin kct}{\Delta(k, 2\omega / c)} +$$
$$+ \frac{1}{\Delta(k, 2\omega / c)} \int_0^t \left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)_0 [\cos 2\omega (t - \tau) - \cos kc (t - \tau)]\, d\tau$$
$$\Delta(k, 2\omega / c) = k^2 - 4\omega^2 / c^2 \qquad (4.3)$$

постоянные фундаментальных решений определены характеристическими значениями

$$C_1 = f''(0, k) - 4\omega^2 c^{-2} f(0, k), \quad C_2 = ikf'(0, k) - 2\omega c^{-2} \varphi'(0, k) \qquad (4.4)$$
$$C_3 = k^2 f(0, k) - f''(0, k), \quad C_4 = kc^{-1} \varphi'(0, k) - 2i\omega c^{-1} f'(0, k)$$

С определением функции (4.3) задача решена, и, чтобы сделать общий анализ законченным, остается выразить в явном виде частное решение (4.3) с нулевыми начальными условиями.

Вне пределов полосы $t \geqslant 0$, $0 \leqslant y \leqslant l$ данные Коши (2.9) продолжаются периодическим образом, а граничное значение нормальной производной вычисляется из суммарного выражения (3.6). Тогда частное решение доставляется интегралом типа Дюамеля

$$
\begin{gathered}
\frac{\overset{\circ}{q}_1+\overset{\circ}{q}_2}{c}\int\limits_0^{ct}\left[\cos 2\omega\left(t-\frac{y}{c}\right)-\cos k(ct-y)\right]\left[\frac{1}{c}n(y,k)-\right.\\
\left.-\frac{s^2}{c^2}y\,m(y,k)+m'(y,k)\right]dy+\\
+\frac{2}{c^2}\int\limits_0^{ct}\left[\cos 2\omega\left(t-\frac{y}{c}\right)-\cos k(ct-y)\right]dy\sum_{q_1^\circ}\int\limits_{2q_1^\circ l}^{y}[R'(\mu)n(\eta,k)+\\
+2cyR''(\mu)m(\eta,k)]\eta\,d\eta+\frac{2}{c^2}\int\limits_0^{ct}\left[\cos 2\omega\left(t-\frac{y}{c}\right)-\cos k(ct-y)\right]dy\times\\
\times\sum_{q_2^\circ}\int\limits_{(2q_2^\circ-1)l}^{y}[R'(\mu)n(\eta,k)+2cyR''(\mu)m(\eta,k)]\eta\,d\eta
\end{gathered}
\tag{4.5}
$$

производные функции Римана берутся по аргументу $\mu=y^2-\eta^2$; целочисленные количества q_1°, q_2° следуют из неравенств (3.5), рассматриваемых на границе $y=0$. Число слагаемых во внутренних интегралах (4.5) по меньшей мере различается на единицу, поэтому вблизи отвесной стенки может наблюдаться остаточная волна отражения. Функция $F(t,k)$, определенная совокупностью формул (4.3) — (4.5), относится к высоте неустановившихся волн, распространяющихся вдоль отвесной стенки бассейна. При помощи выражения (4.1) представляется возможным проследить за развитием волнообразования по всему каналу. Обращение по Фурье завершает задачу.

Автор благодарит Л. Н. Сретенского за советы по работе.

Поступила 1 VIII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л. Н. Об одной гидродинамической задаче, связанной с проблемой цунами. Теория волн и течений, Тр. Морск. гидрофиз. ин-та, 1963, т. 27.
2. Hadamard J. Résolution d'un problème aux limites pour les équations linéares du type hyperbolique. Bull. Soc. Math. France, 1904, t. 32, Fsc. 3, p. 242—268.