Прикладная математика и механика. Том 33, 1969

ОБ УРАВНЕНИИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО РЕЖИМА ФИЛЬТРАЦИИ

С. Л. Каменомостская

(Москва)

Рассматривается задача Коши для уравнения упруго-пластического режима фильтрации. В работе доказано, что невозможно естественным образом определить для этого уравнения решение типа функции мгновенного источника.

Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \beta \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| \quad (\alpha > 0, |\beta| < \alpha) \tag{1}$$

возникающее при описании упруго-пластического режима фильтрации [1,2]. Изучается вопрос о решении задачи Коши для этого уравнения

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \tag{2}$$

в полосе R_T $(|x| < \infty, 0 \leqslant t \leqslant T)$ произвольной фиксированной ширины T.

В работе [3] доказано, что если функция $\varphi(x)$ ограничена на всей прямой и имеет обобщенную производную $\varphi'(x) \in L_2(-\infty, \infty)$, то существует единственное непрерывное, ограниченное в R_T решение $u(x, t)$ уравнения (1) при условии (2), имеющее при $t > 0$ непрерывные производные $\partial u/\partial t$, $\partial u/\partial x$ и $\partial^2 u/\partial x^2$.

В данной работе показано, что невозможно построить решение уравнения (1) типа функции мгновенного источника, т. е. решение, удовлетворяющее условию

$$u|_{t=0} = \delta(x) \tag{3}$$

Ниже рассматриваются дельта-образные последовательности гладких функций. Последовательность $\varphi_k(x)$ будем называть сходящейся к $\delta(x)$, если выполнено следующее условие: для любой бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$, которая убывает при $|x| \to \infty$ быстрее, чем $\exp(-mx^2)$ при каком-нибудь m

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(x) f(x)\, dx \to f(0)$$

Для того чтобы $\varphi_k(x) \to \delta(x)$, достаточно, чтобы при любых фиксированных $a < 0$ и $b > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b \varphi_k(x)\, dx = 1, \quad \lim_{k\to\infty} \int_b^{\infty} \varphi_k(x)\, dx = \lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{a} \varphi_k(x)\, dx = 0 \tag{4}$$

Теорема 1. Пусть последовательность функций $\varphi_k(x)$ удовлетворяет условиям (4). Предположим, что каждая функция $\varphi_k(x) \geqslant 0$ ограничена на всей прямой и имеет производную $\varphi_k'(x) \in L_2(-\infty, \infty)$.

Тогда при любом k существует непрерывное ограниченное в R_T решение $u_k(x, t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$u_k|_{t=0} = \varphi_k(x) \tag{5}$$

и в любой точке $(x_0, t_0) \in R_T$

$$\lim_{k\to\infty} u_k(x_0, t_0) = 0 \quad (\beta > 0), \quad \lim_{k\to\infty} u_k(x_0, t_0) = \infty \quad (\beta < 0)$$

Для доказательства этой теоремы потребуется несколько вспомогательных лемм.

Лемма 1. Пусть $u_1(x,t)$ и $u_2(x, t)$ — два непрерывных ограниченных в R_T решения уравнения (1), удовлетворяющие соответственно условиям

$$u_1|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad u_2|_{t=0} = \varphi_2(x)$$

Пусть при $t > 0$ существуют непрерывные производные $\partial u_i / \partial t$ и $\partial^2 u_i / \partial x^2$ $(i = 1, 2)$. Тогда

$$u_1(x, t) \leqslant u_2(x, t) \text{ при } \varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)$$

Доказательство. Пусть $|u_1(x, t)| \leqslant M$ и $|u_2(x, t)| \leqslant M$ в R_T. Рассмотрим область $\Omega(|x| \leqslant L,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$, где L — некоторое число, которое в дальнейшем будем увеличивать. Положим

$$F(x, t) = \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{\alpha - |\beta|}t\right), \quad z(x, t) = [F(x, t) - u_1(x, t) + u_2(x, t)]\, e^{-\lambda t} \quad (\lambda > 0)$$

Функция $z(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$(\alpha - |\beta|)\frac{\partial z}{\partial t} + \lambda(\alpha - |\beta|)z - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} =$$
$$= |\beta|\, e^{-\lambda t}\left[\frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial t} + \operatorname{sign}\beta\left(\left|\frac{\partial u_1}{\partial t}\right| - \left|\frac{\partial u_2}{\partial t}\right|\right)\right] \tag{6}$$

Из этого равенства следует, что $z(x, t)$ не может иметь отрицательного минимума внутри Ω. Действительно, функция, стоящая в квадратной скобке, имеет тот же знак, что $\partial(u_1 - u_2) / \partial t$. Но

$$\frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial t}e^{\lambda t} - \lambda z e^{\lambda t} > 0$$

Поэтому в точке отрицательного минимума в уравнении (6) справа должна стоять положительная функция, а слева — отрицательная. Следовательно, такой точки быть не может. Кроме того, $z(x, t)$ удовлетворяет условиям

$$z(x, 0) \geqslant 0, \qquad z(L, t) \geqslant 0, \qquad z(-L, t) \geqslant 0$$

Поэтому $z(x, t) \geqslant 0$ в Ω и, следовательно,

$$u_1(x, t) - u_2(x, t) \leqslant \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{\alpha - |\beta|}t\right) \qquad (x, t) \in \Omega$$

Переходя к пределу при $L \to \infty$, получаем, что в каждой фиксированной точке (x, t)

$$u_1(x, t) - u_2(x, t) \leqslant 0$$

Лемма 2. Пусть $u(x, t)$ — непрерывное, ограниченное в R_T решение уравнения (1) при условии (2), $v(x, t)$ — непрерывное, ограниченное в R_T решение уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = (\alpha + \beta) \frac{\partial v}{\partial t} \tag{7}$$

удовлетворяющее условию

$$v|_{t=0} = \varphi_1(x) \tag{8}$$

и $w(x, t)$ — непрерывное, ограниченное в R_T решение уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = (\alpha - \beta) \frac{\partial w}{\partial t} \tag{9}$$

удовлетворяющее условию

$$w|_{t=0} = \varphi_1(x) \tag{10}$$

Предположим, что функции $u(x, t)$, $v(x, t)$ и $w(x, t)$ имеют непрерывные производные, входящие в уравнения. Тогда

$$u(x, t) \leqslant v(x, t), \quad u(x, t) \leqslant w(x, t) \text{ при } \beta > 0, \ \varphi(x) \leqslant \varphi_1(x) \tag{11}$$

$$u(x, t) \geqslant v(x, t), \quad u(x, t) \geqslant w(x, t) \text{ при } \beta < 0, \ \varphi(x) \geqslant \varphi_1(x) \tag{12}$$

Доказательство. Рассмотрим случай $\beta > 0$. Положим $v_1(x, t) = u(x, t) - v(x, t)$. Ясно, что

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - (\alpha + \beta) \frac{\partial v_1}{\partial t} = \beta \left(\left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| - \frac{\partial u}{\partial t} \right) \geqslant 0$$

$$v_1|_{t=0} = \varphi(x) - \varphi_1(x) \leqslant 0$$

Отсюда следует, что для функции $v_1(x, t)$ справедлив принцип максимума ([4] теорема 8, § 1), согласно которому $v_1(x, t) \leqslant 0$. Полагая $w_1(x, t) = u(x, t) - w(x, t)$, получаем

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - (\alpha - \beta) \frac{\partial w_1}{\partial t} = \beta \left(\left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| + \frac{\partial u}{\partial t} \right) \geqslant 0$$

$$w_1|_{t=0} = \varphi(x) - \varphi_1(x) \leqslant 0$$

Следовательно, для функции $w_1(x, t)$ также справедлив принцип максимума, т. е. $w_1(x, t) \leqslant 0$. Отсюда получаем оба неравенства (11). Неравенства (12) доказываются аналогично.

Обозначим через $V(x, t, \xi)$ фундаментальное решение уравнения (7) и через $W(x, t, \xi)$ — фундаментальное решение уравнения (9). Как известно

$$V(x, t, \xi) = \frac{\sqrt{\alpha + \beta}}{2\sqrt{\pi t}} \exp \frac{-(x - \xi)^2 (\alpha + \beta)}{4t}$$

$$W(x, t, \xi) = \frac{\sqrt{\alpha - \beta}}{2\sqrt{\pi t}} \exp \frac{-(x - \xi)^2 (\alpha - \beta)}{4t}$$

Положим

$$z(x, t) = \min [V(x, t, 0), W(x, t, 0)], \quad z_1(x, t) = \max [V(x, t, 0), W(x, t, 0)]$$

В дальнейшем понадобятся следующие свойства этих функций:

$$\int_{-\infty}^{\infty} z(x, t)\, dx = B < 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} z_1(x, t)\, dx = B_1 > 1 \quad (t > 0) \tag{13}$$

Здесь B и B_1 зависят от значений α и β и не зависят от t.

Проверим, например, первое из этих неравенств

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\min\left[\sqrt{\alpha+\beta}\exp\frac{-x^2(\alpha+\beta)}{4t},\ \sqrt{\alpha-\beta}\exp\frac{-x^2(\alpha-\beta)}{4t}\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\min\left[\sqrt{\alpha+\beta}\exp\frac{-y^2(\alpha+\beta)}{4},\ \sqrt{\alpha-\beta}\exp\frac{-y^2(\alpha-\beta)}{4}\right]dy=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\min\left[f_1(y),\ f_2(y)\right]dy=B \qquad (14)$$

Подынтегральная функция не зависит от t, следовательно, $B = \text{const}$. Кроме того

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_1(y)\,dy=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_2(y)\,dy=1$$

Поэтому

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\min\left[f_1(y),\ f_2(y)\right]dy<1$$

Лемма 3. Пусть последовательность ограниченных функций $\psi_k(x) \geqslant 0$ удовлетворяет условиям (4).

Пусть функция $v_k(x, t)$ удовлетворяет уравнению (7) и условию

$$v_k|_{t=0} = \psi_k(x)$$

а функция $w_k(x, t)$ — уравнению (9) и условию

$$w_k|_{t=0} = \psi_k(x)$$

Тогда для любого фиксированного значения $t^* > 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое k_0, что если $k \geqslant k_0$, то при всех x и при $t \in [t^*, t^* + 1]$ справедливы следующие неравенства:

$$(1-\varepsilon)\ V(x, t, 0)-\varepsilon \leqslant v_k(x, t) \leqslant (1+\varepsilon)\ V(x, t, 0)+\varepsilon \qquad (15)$$

$$(1-\varepsilon)\ W(x, t, 0)-\varepsilon \leqslant w_k(x, t) \leqslant (1+\varepsilon)\ W(x, t, 0)+\varepsilon \qquad (16)$$

Доказательство. Как известно

$$v_k(x, t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi_k(\xi)\,V(x, t, \xi)\,d\xi$$

Отсюда

$$v_k(x, t)=\int\limits_{-\delta}^{\delta}\psi_k(\xi)\,V(x, t, \xi)\,d\xi+\int\limits_{-\infty}^{-\delta}\psi_k(\xi)\,V(x, t, \xi)\,d\xi+$$

$$+\int\limits_{\delta}^{\infty}\psi_k(\xi)\,V(x, t, \xi)\,d\xi=I_1^k+I_2^k+I_3^k$$

где постоянная δ $(0 < \delta < 1)$ будет выбрана.

Рассмотрим интеграл

$$I_1^k(x,t)=\int_{-\delta}^{\delta}\psi_k(\xi)V(x,t,\xi)\,d\xi$$

Выберем величину A настолько большой, чтобы $V(x,t,\xi)<{}^1/_4\varepsilon$ при $|x|\geqslant A$, $|\xi|\leqslant 1$, $t\in[t^*,t^*+1]$.

Затем выберем δ настолько малым, чтобы выполнялись неравенства

$$1-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{V(x,t,\xi)}{V(x,t,0)}=\exp\frac{(2x\xi-\xi^2)(\alpha+\beta)}{4t}<1+\frac{\varepsilon}{2}$$

при

$$|\xi|\leqslant\delta,\quad |x|\leqslant A,\quad t\in[t^*,t^*+1]$$

Тогда

$$(1-\varepsilon)V(x,t,0)-\varepsilon<0\leqslant I_1^k(x,t)<\frac{\varepsilon}{4}\int_{-\delta}^{\delta}\psi_k(\xi)\,d\xi$$

при $|x|\geqslant A$, $t\in[t^*,t^*+1]$

$$\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)V(x,t,0)\int_{-\delta}^{\delta}\psi_k(\xi)\,d\xi<I_1^k(x,t)<\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)V(x,t,0)\int_{-\delta}^{\delta}\psi_k(\xi)\,d\xi$$

при $|x|\leqslant A$, $t\in[t^*,t^*+1]$

Последовательность $\psi_k(\xi)$ удовлетворяет условиям (4), поэтому

$$\int_{-\delta}^{\delta}\psi_k(\xi)\,d\xi\to 1$$

Отсюда и из предыдущих неравенств следует, что существует k_1 такое, что

$$(1-\varepsilon)V(x,t,0)-\varepsilon<I_1^k(x,t)<(1+\varepsilon)V(x,t,0)+{}^1/_2\varepsilon\qquad(k\geqslant k_1)$$

Так как $v_k(x,t)\geqslant I_1^k(x,t)$, то

$$v_k(x,t)\geqslant(1-\varepsilon)V(x,t,0)-\varepsilon$$

Из условий (4), а также из ограниченности функции $V(x,t,0)$ при $t\in[t^*,t^*+1]$ и при всех x и ξ следует, что

$$I_2^k(x,t)+I_3^k(x,t)\to 0\quad\text{при } k\to\infty$$

Поэтому можно найти $k_0\geqslant k_1$ такое, что при $t\in[t^*,t^*+1]$

$$v_k(x,t)=I_1^k+I_2^k+I_3^k\leqslant(1+\varepsilon)V(x,t,0)+\varepsilon\qquad(k\geqslant k_0)$$

Таким образом, оба неравенства (15) доказаны. Так же доказываются оценки (16).

Следствие. Если выполнены условия леммы 3, то для любого фиксированного значения $t^*>0$ и для любого $\varepsilon>0$ существует такое k_0, что если $k\geqslant k_0$, то при всех x и при $t\in[t^*,t^*+1]$ выполняются неравенства

$$\min\,[v_k(x,t),\ w_k(x,t)]\leqslant(1+\varepsilon)z(x,t)+\varepsilon$$
$$\max\,[v_k(x,t),\ w_k(x,t)]\geqslant(1-\varepsilon)\,z_1(x,t)-\varepsilon$$

Перейдем теперь к доказательству теоремы 1. Пусть $\varphi_k(x)$ — последовательность функций, указанная в условии теоремы. Тогда, как доказано в работе [3], при любом k существует единственное, ограниченное в R_T решение $u_k(x,t)$ уравнения (1) при условии (5), имеющее при $t>0$ непрерывные производные $\partial u_k/\partial t$, $\partial u_k/\partial x$ и $\partial^2u_k/\partial x^2$. Из леммы 1 следует, что $u_k(x,t)\geqslant 0$.

Пусть фиксировано некоторое значение t_0. Выберем t_1 так, чтобы $t_1 < t_0 < t_1 + 1$.

Рассмотрим сначала случай $\beta > 0$.

Докажем, что для произвольного целого n и для любого $\varepsilon \in [0, B^{-1} - 1]$ можно найти такие $k_0(\varepsilon, n)$ и $t_2 \in [t_1, t_0]$, что при $k \geqslant k_0(\varepsilon, n)$ справедливо неравенство

$$u_k(x, t_0) \leqslant [B(1 + \varepsilon)]^n (1 + \varepsilon) z(x, t_2) + (n + 1)\varepsilon, \ | x | < \infty \quad (17)$$

Из этой оценки следует утверждение теоремы для случая $\beta > 0$, поскольку функция $z(x, t_2)$ ограничена при всех $t_2 \in [t_1, t_0]$ и $|x| < \infty$, а постоянные ε и n можно выбрать так, чтобы величины $[B(1 + \varepsilon)]^n$ и $(n + 1)\varepsilon$ были сколь угодно малы ($B < 1$ по (13)).

Обозначим через $v_k(x, t)$ и $w_k(x, t)$ решения уравнений соответственно (7) и (9), удовлетворяющие условиям

$$v_k(x, 0) = w_k(x, 0) = \varphi_k(x)$$

Пусть $\{\tau_i\}$ — стремящаяся к нулю бесконечная последовательность положительных чисел, причем $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \ldots < t_0 - t_1$. Положим $\psi_i(x) = B^{-1} z(x, \tau_i)$. Нетрудно проверить, что для последовательности функций $\psi_i(x)$ выполнены условия (4), т. е. $\psi_i(x) \to \delta(x)$. Обозначим через $v_i^*(x, t)$ и $w_i^*(x, t)$ решения уравнений (7) и (9) соответственно, удовлетворяющие условиям

$$v_i^*(x, 0) = w_i^*(x, 0) = \psi_i(x)$$

Построим подпоследовательность τ_{i_m} $(1 \leqslant m \leqslant n)$ следующим образом. Выберем i_1 настолько большим, чтобы

$$\min [v_{i_1}^* (x, t), w_{i_1}^* (x, t)] \leqslant (1 + \varepsilon) z(x, t) + \varepsilon \text{ при } t \in [t_1, t_1 + 1] \quad (18)$$

Согласно следствию из леммы 3 такое i_1 существует. Затем выберем $i_2 > i_1$ настолько большим, чтобы

$$\min [v_{i_2}^* (x, \tau_{i_1}), w_{i_2}^* (x, \tau_{i_1})] \leqslant (1 + \varepsilon) z(x, \tau_{i_1}) + \varepsilon$$

и — $i_3 > i_2$ так, чтобы

$$\min [v_{i_3}^* (x, \tau_{i_2}), w_{i_3}^* (x, \tau_{i_2})] \leqslant (1 + \varepsilon) z(x, \tau_{i_2}) + \varepsilon$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\min [v_{i_n}^* (x, \tau_{i_{n-1}}), w_{i_n}^* (x, \tau_{i_{n-1}})] \leqslant (1 + \varepsilon) z(x, \tau_{i_{n-1}}) + \varepsilon \quad (19)$$

После того как выбрано i_n, выберем номер k_0 настолько большим, чтобы

$$\min [v_k (x, \tau_{i_n}), \ w_k (x, \tau_{i_n})] \leqslant (1 + \varepsilon) z(x, \tau_{i_n}) + \varepsilon \quad (k \geqslant k_0)$$

Рассмотрим теперь функции $u_k(x, t)$ при $k \geqslant k_0$. По лемме 2 при всех x и t

$$u_k(x, t) \leqslant \min [v_k(x, t), w_k(x, t)]$$

Полагая $t = \tau_{i_n}$, имеем (20)

$$u_k (x, \tau_{i_n}) \leqslant \min [v_k (x, \tau_{i_n}), w_k (x, \tau_{i_n})] \leqslant (1 + \varepsilon) z(x, \tau_{i_n}) + \varepsilon \quad (k \geqslant k_0)$$

Ясно, что функция $B(1+\varepsilon)v_{i_n}^*(x, t)+\varepsilon$ удовлетворяет уравнению (7) и условию

$$B(1+\varepsilon)v_{i_n}^*(x, 0)+\varepsilon=(1+\varepsilon)z(x, \tau_{i_n})+\varepsilon$$

а функция $B(1+\varepsilon)\, w_{i_n}^*(x, t)+\varepsilon$ — уравнению (9) и условию

$$B(1+\varepsilon)w_{i_n}^*(x, 0)+\varepsilon=(1+\varepsilon)z(x, \tau_{i_n})+\varepsilon$$

Поэтому из (20) и леммы 2 следует, что при всех x и $t>0$

$$\begin{gathered}u_k(x, \tau_{i_n}+t)\leqslant \min[B(1+\varepsilon)v_{i_n}^*(x, t)+\varepsilon, B(1+\varepsilon)w_{i_n}^*(x, t)+\varepsilon]=\\ =B(1+\varepsilon)\min[v_{i_n}^*(x, t), w_{i_n}^*(x, t)]+\varepsilon\end{gathered}$$

Полагая $t=\tau_{i_{n-1}}$, имеем

$$u_k(x, \tau_{i_n}+\tau_{i_{n-1}})\leqslant B(1+\varepsilon)\min[v_{i_n}^*(x, \tau_{i_{n-1}}), w_{i_n}^*(x, \tau_{i_{n-1}})]+\varepsilon$$

Отсюда и из (19) получаем

$$\begin{gathered}u_k(x, \tau_{i_n}+\tau_{i_{n-1}})\leqslant B(1+\varepsilon)[(1+\varepsilon)z(x, \tau_{i_{n-1}})+\varepsilon]+\varepsilon=\\ =B(1+\varepsilon)^2z(x, \tau_{i_{n-1}})+B(1+\varepsilon)\varepsilon+\varepsilon\leqslant B(1+\varepsilon)^2z(x, \tau_{i_{n-1}})+2\varepsilon\end{gathered}$$

Последнее неравенство следует из того, что $B(1+\varepsilon)\leqslant 1$.

Таким же образом можно убедиться, что

$$u_k(x, \tau_{i_n}+\tau_{i_{n-1}}+\tau_{i_{n-2}})\leqslant B^2(1+\varepsilon)^3z(x, \tau_{i_{n-2}})+3\varepsilon$$

Продолжая этот процесс, получим

$$u_k(x, \tau_{i_n}+\tau_{i_{n-1}}+\ldots+\tau_{i_1})\leqslant B^{n-1}(1+\varepsilon)^n z(x, \tau_{i_1})+n\varepsilon$$

Отсюда и из (18) следует

$$\begin{gathered}u_k(x, \tau_{i_n}+\tau_{i_{n-1}}+\ldots+\tau_{i_1}+t)\leqslant\\ \leqslant B^n(1+\varepsilon)^n\min[v_{i_1}^*(x, t), w_{i_1}^*(x, t)]+n\varepsilon\leqslant\\ \leqslant B^n(1+\varepsilon)^n[(1+\varepsilon)z(x, t)+\varepsilon]+n\varepsilon\leqslant\\ \leqslant B^n(1+\varepsilon)^{n+1}z(x, t)+(n+1)\varepsilon\quad t\in[t_1, t_1+1]\end{gathered}\tag{21}$$

Положим $t_2=t_0-(\tau_{i_1}+\ldots+\tau_{i_n})$. Поскольку $\tau_1+\tau_2+\tau_3+\ldots< <t_0-t_1$, то

$$t_0-(\tau_{i_1}+\tau_{i_2}+\ldots+\tau_{i_n})>t_0-(t_0-t_1)=t_1$$

Кроме того, $t_2<t_0<t_1+1$, следовательно, оценку (21) можно использовать при $t=t_2$. Таким образом, имеем при $k\geqslant k_0$

$$u_k(x, t_0)\leqslant(1+\varepsilon)^{n+1}B^nz(x, t_2)+(n+1)\,\varepsilon$$

Из этого неравенства, как выше было указано, следует утверждение теоремы для случая $\beta>0$.

Аналогичным образом доказывается теорема при $\beta<0$. В этом случае справедливо следующее утверждение. Для произвольного целого n

и для любого $\varepsilon \in [0,\ 1 - B_1^{-1}]$ можно найти такие $k_1(\varepsilon,\ n)$ и $t_2 \in [t_1,\ t_0]$, что при всех x и при $k \geqslant k_1(\varepsilon,\ n)$ выполняется неравенство

$$u_k(x,\ t_0) \geqslant [B_1(1-\varepsilon)]^n (1-\varepsilon) z(x,\ t_2) - [B_1(1-\varepsilon)]^n \varepsilon (n+1) \tag{22}$$

Доказательство этого неравенства проводится так же, как доказательство неравенства (17). Из (22) следует утверждение теоремы для случая $\beta < 0$.

Действительно, $z(x_0,\ t_2) > q > 0$ при фиксированном x_0 и при всех $t_2 \in [t_1,\ t_0]$. Поэтому из (22) получаем

$$u_k(x_0,\ t_0) \geqslant [B_1(1-\varepsilon)]^n [(1-\varepsilon)q - (n+1)\ \varepsilon]$$

Пусть M — произвольная постоянная. Выберем n настолько большим, чтобы $[B_1\ (1-\varepsilon)]^n$ было больше, чем M при любом $\varepsilon < {}^1/_2\ (1-B_1^{-1})$. Такое n существует, так как при всех таких ε

$$B_1(1-\varepsilon) > B_1(1 - {}^1/_2 + {}^1/_2\, B_1^{-1}) = {}^1/_2\,(B_1+1) > 1$$

Затем при фиксированном n выберем ε настолько малым, чтобы выполнялись два неравенства

$$\varepsilon < {}^1/_2\ (1 - B_1^{-1}),\quad (1-\varepsilon)q - (n+1)\varepsilon > {}^1/_2 q$$

При таких значениях n и ε получаем

$$u_k(x_0,\ t_0) > {}^1/_2\ qM \quad [k \geqslant k_1(\varepsilon,\ n)]$$

Ввиду произвола в выборе постоянной M

$$\lim_{k\to\infty} u_k(x_0,\ t_0) = \infty$$

Тем самым теорема 1 полностью доказана.

Приводимая ниже теорема 2 утверждает, что не существует функции $u(x,\ t)$, которую можно было бы назвать решением уравнения (1) при условии (3). Естественно считать, что если есть такая функция, то она должна быть непрерывна при $t > 0$, положительна, иметь непрерывные производные при $t > 0$ и удовлетворять уравнению (1). Пусть $t_k \to 0$ при $k \to \infty$ и $\varphi_k(x) = u(x, t_k)$. Естественно считать ввиду равенства $u(x,\ 0) = \delta(x)$, что последовательность функций $\varphi_k(x)$ удовлетворяет условиям (4).

Теорема 2. Не существует положительной функции $u(x,\ t)$, которая обладает следующими свойствами:

1) при $t > 0$ существуют непрерывные производные $\partial u\ /\ \partial t$, $\partial u\ /\ \partial x$, $\partial^2 u\ /\ \partial x^2$;

2) функция $u(x,\ t)$ удовлетворяет уравнению (1);

3) функция $u(x,\ t)$ ограничена в любой полосе $(0 < \gamma \leqslant t \leqslant T)$;

4) если $t_k \to 0$ при $k \to \infty$, то для последовательности функций $\varphi_k(x) = u(x,\ t_k)$ выполнены условия (4).

Доказательство. Предположим, что такая функция $u(x, t)$ существует. Тогда при любом k функция $u_k(x, t) = u(x, t + t_k)$ положительна, непрерывна, ограничена в R_T и удовлетворяет уравнению (1). Ясно, что

$$u_k(x, 0) = u(x, t_k) = \varphi_k(x)$$

Последовательность функций $\varphi_k(x)$ удовлетворяет условиям (4). Таким образом, выполнены все условия теоремы 1 за исключением $\varphi_k'(x) \in L_2(-\infty, \infty)$. Но это условие при доказательстве теоремы 1 было использовано только для установления существования решения уравнения (1), принимающего при $t = 0$ значения $\varphi_k(x)$. В данном случае существование такого решения известно, а именно: $u_k(x, t) = u(x, t + t_k)$. Поэтому можно применить теорему 1 к последовательности функций $u_k(x, t)$. Пусть (x_0, t_0) — фиксированная точка из R_T. Тогда

$$\lim_{t_k \to 0} u(x_0, t_0 + t_k) = \lim_{k \to \infty} u_k(x_0, t_0) = \begin{cases} 0 & (\beta > 0) \\ \infty & (\beta < 0) \end{cases}$$

Отсюда и из непрерывности $u(x, t)$ следует, что при $(x_0, t_0) \in R_T$

$$u(x_0, t_0) = 0 \quad (\beta > 0), \qquad u(x_0, t_0) = \infty \quad (\beta < 0)$$

что противоречит сделанному предположению. Теорема доказана.

В заключение выражаю благодарность Г. И. Баренблатту и В. М. Ентову, обратившим мое внимание на рассмотренную задачу.

Поступила 29 V 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И., Крылов А. П., Об упруго-пластическом режиме фильтрации. Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 2, стр. 5—13.
2. Баренблатт Г. И. О некоторых задачах восстановления давления и распространения волны разгрузки при упруго-пластическом режиме фильтрации. Изв. АН СССР, ОТН, № 2, стр. 14—26.
3. Каменомостская С. Л. Об одной задаче теории фильтрации. Докл. АН СССР, 1957, т. 116, № 1, стр. 18—20.
4. Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа. Усп. матем. н., 1962, т. 17, вып. 3, стр. 3—158.