Прикладная математика и механика. Том 33, 1969

О МАГНИТОПЛАСТИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ

В. П. Демуцкий, Р. В. Половин

(Харьков)

Используется второе начало термодинамики. Приводится вывод уравнений текучести для магнитопластической среды. Подробно исследуется магнитопластическое течение длинной толстостенной трубы. Рассматривается течение трубы под действием непроникающего поля; найдены условия, при которых вмороженное магнитное поле способствует пластическому течению.

В настоящее время получены магнитные поля, создающие напряжения, превышающие предел текучести металлов [1]. Если проводимость металла достаточно велика, то вследствие вмороженности магнитных силовых линий [2] происходит взаимодействие пластического течения с магнитным полем. В этом случае можно говорить о магнитопластическом течении. Магнитопластические эффекты будут проявляться в случае, если магнитное давление будет порядка предела текучести материала $^1/_8 H^2/\pi \approx k$. Для жестких сортов меди ($k \approx 40$ *кг / мм*^{2}) это поля с напряженностью $H \approx 300$ *кэрстед*, для жестких сортов стали ($k \approx 100$ *кг / мм*^{2}) это поля с напряженностью $H \approx$ ≈ 450 *кэрстед*.

1. Воспользуемся вторым началом термодинамики. Закон сохранения энергии W для некоторого объема V можно представить в виде [3]

$$dW = \delta A + d_e W \tag{1.1}$$

Здесь A — работа внешних сил, $d_e W$ — приток энергии через поверхность.

Совершенную в единицу времени работу можно разбить [4] на работу внешних поверхностных сил $\partial_e A \;/\; \partial t$

$$\frac{\partial_e A}{\partial t} = \oint_\Omega v_i \sigma_{ij}{}^\circ \, d\Omega_j \tag{1.2}$$

и работу внешних объемных сил — сил Лоренца $\partial_i A \;/\; \partial t$

$$\frac{\partial_i A}{\partial t} = \int_V \left(\frac{\mathbf{j}}{c} \times \mathbf{H}\right) \mathbf{v} \, dV \tag{1.3}$$

Далее

$$\frac{\partial_e W}{\partial t} = -\oint_\Omega \rho v_j \left(\frac{v^2}{2} + \varepsilon\right) d\Omega_j \tag{1.4}$$

Здесь ε — внутренняя энергия единицы массы.

Поставляя соотношения (1.2) — (1.4) в уравнение (1.1), получим

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \oint_\Omega v_i \sigma_{ij}{}^\circ \, d\Omega_j + \int_V \left(\frac{\mathbf{j}}{c} \times \mathbf{H}\right) \mathbf{v} \, dV - \oint_\Omega \rho v_j \left(\frac{v^2}{2} + \varepsilon\right) d\Omega_j \tag{1.5}$$

С другой стороны, полная энергия тела объема V есть

$$W = \int_V \rho \left(\frac{v^2}{2} + \varepsilon\right) dV \tag{1.6}$$

Дифференцируя это соотношение по времени, найдем скорость изменения энергии

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \int_V \left[\left(\frac{v^2}{2} + \varepsilon\right)\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho v_i \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right] dV \tag{1.7}$$

Выразим производные по времени через производные по координатам при помощи уравнения сохранения массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} \tag{1.8}$$

и уравнения сохранения импульса [2]

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = -\rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma_{ij}^\circ}{\partial x_j} + \frac{1}{4\pi}\left(H_j \frac{\partial H_i}{\partial x_j} - H_j \frac{\partial H_j}{\partial x_i}\right) \tag{1.9}$$

Подставляя выражения (1.8), (1.9) в уравнение (1.7), получим

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\int_V \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\rho v_j \left(\frac{v^2}{2} + \varepsilon\right)\right] dV + \int_V \frac{\partial}{\partial x_j}(v_i \sigma_{ij}^\circ)\, dV - \int_V v_{ij}\sigma_{ij}^\circ\, dV +$$
$$+ \int_V \rho \frac{d\varepsilon}{dt}\, dV + \frac{1}{4\pi}\int_V v_i \left(H_j \frac{\partial H_i}{\partial x_j} - H_j \frac{\partial H_j}{\partial x_i}\right) dV \tag{1.10}$$

Здесь

$$v_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)$$

— тензор скоростей деформаций.

Сравнивая формулы (1.5) и (1.10), находим

$$\rho T \frac{dS}{dt} = v_{ij}\sigma_{ij}^\circ \tag{1.11}$$

(Здесь использовалось соотношение $d\varepsilon = TdS$, справедливое при пренебрежении упругой энергией.)

Согласно второму началу термодинамики [5-7]

$$dS \geqslant 0$$

отсюда следует условие Дюгема — Клаузиуса [8]

$$v_{ij}\sigma_{ij}^\circ \geqslant 0 \tag{1.12}$$

Если среда несжимаема ($v_{ll} = 0$), то [9]

$$\sigma_{ik}^{\circ *} v_{ik} \geqslant 0 \quad (\sigma_{ik}^{\circ *} = \sigma_{ik}^\circ - {}^1/_3 \sigma_{ll}^\circ \delta_{ik}) \tag{1.13}$$

(Здесь $\overset{\circ *}{\sigma_{ik}}$ — девиатор тензора напряжений.)

Из этого соотношения в случае изотропной среды следуют уравнения текучести.

Действительно, из уравнения Гамильтона — Кели вытекает, что в трехмерном случае наиболее общая связь между матрицами v_{ik} и $\sigma_{ik}{}^{\circ}$ имеет вид [10]

$$\sigma_{ik}{}^{\circ} = \xi\delta_{ik} + \eta v_{ik} + \zeta v_{ij}v_{jk} \quad (\xi, \eta, \zeta \text{ — скаляры}) \tag{1.14}$$

Пренебрегая квадратами тензора скоростей деформаций и переходя к девиаторам, получим уравнение текучести для несжимаемой среды

$$\sigma_{ik}{}^{\circ *} = \eta v_{ik} \tag{1.15}$$

Из неравенства (1.13) следует, что коэффициент η положителен, $\eta > 0$. Скаляр η зависит от инвариантов тензоров напряжений и скоростей деформаций. Различным видам этой зависимости соответствуют различные варианты теории пластичности.

Положим, например

$$\eta = \frac{k\sqrt{2}}{\sqrt{v_{ik}^2}} \tag{1.16}$$

(Постоянная k называется пределом текучести и характеризует материал.) Тогда получим уравнения текучести, соответствующие условию пластичности Губера — Мизеса [11]

$$^1/_2\sigma_{ik}{}^{\circ * 2} = k^2 \tag{1.17}$$

Отметим, что соотношения (1.15) не содержат магнитного поля, т. е. уравнения магнитопластической среды совпадают с уравнениями текучести обычной теории пластичности. Поэтому постулированные в работе [12] уравнения магнитопластичности неверны.

2. Сформулируем основные уравнения магнитопластичности. Закон сохранения импульса в магнитопластической среде имеет вид

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \quad (\rho \text{ — плотность}) \tag{2.1}$$

Тензор напряжений σ_{ik} равен сумме тензора напряжений материала $\overset{\circ}{\sigma}_{ik}$ и тензора напряжений магнитного поля σ_{ik}^H

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ik}{}^{\circ} + \sigma_{ik}{}^{H}, \qquad \sigma_{ik}{}^{H} = \frac{1}{4\pi}\left(H_i H_k - \frac{1}{2} H^2 \delta_{ik}\right)$$

Для описания магнитного поля (так же, как и в магнитной гидродинамике) имеем условие вмороженности магнитных силовых линий и условие отсутствия магнитных зарядов

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}), \qquad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \tag{2.2}$$

Будем предполагать среду несжимаемой, $v_{ll} = 0$; поэтому $\overset{*}{v}_{ik} = v_{ik}$.

К этим уравнениям необходимо добавить уравнения текучести (1.15) и условие пластичности (1.17).

В случае медленных движений можно пренебречь производными по времени и инерциальными силами, что сводится к отбрасыванию левых частей в уравнениях (2.1), (2.2). При этом получим уравнения стационарной магнитопластичности.

3. Рассмотрим далее магнитопластическое течение длинной толстостенной трубы.

Пользуясь цилиндрической системой координат (r, φ, z), все величины полагаем зависимыми только от координаты r. Из симметрии задачи следует, что все недиагональные компоненты тензора напряжений материала равны нулю

$$\overset{\circ}{\sigma}_{r\varphi} = \overset{\circ}{\sigma}_{rz} = \overset{\circ}{\sigma}_{\varphi z} = 0 \tag{3.1}$$

Кроме того, компоненты скорости v_φ и v_z также полагаем равными нулю

$$v_\varphi = v_z = 0$$

Из условия несжимаемости $v_{ll} = 0$ находим

$$v_r = \frac{\mathrm{const}}{r} \tag{3.2}$$

Условие пластичности (1.17) запишется в виде

$$(\sigma_{rr}{}^\circ - \sigma_{\varphi\varphi}{}^\circ)^2 + (\sigma_{rr}{}^\circ - \sigma_{zz}{}^\circ)^2 + (\sigma_{\varphi\varphi}{}^\circ - \sigma_{zz}{}^\circ)^2 = 6k^2 \tag{3.3}$$

Из уравнений текучести (1.15) и условия $v_{zz} = 0$ следует

$$\overset{\circ *}{\sigma}_{zz} = 0, \text{ или } \overset{\circ}{\sigma}_{zz} = {}^1/_2\, (\overset{\circ}{\sigma}_{zz} + \overset{\circ}{\sigma}_{\varphi\varphi}) \tag{3.4}$$

Подставляя (3.4) в (3.3), находим

$$\overset{\circ}{\sigma}_{rr} - \overset{\circ}{\sigma}_{\varphi\varphi} = \pm 2k \tag{3.5}$$

Из закона сохранения импульса (2.1) получим, отбрасывая левую часть, беря r-ю компоненту и используя (3.5)

$$\frac{d\overset{\circ}{\sigma}_{rr}}{dr} \pm \frac{2k}{r} + \frac{d\sigma_{rr}^H}{dr} + \frac{\sigma_{rr}^H - \sigma_{\varphi\varphi}^H}{r} = 0 \tag{3.6}$$

4. Исследуем магнитопластическое течение трубы под действием магнитного поля различной ориентации. Пусть a и b — внутренний и внешний радиусы трубы.

Рассмотрим сначала течение трубы под действием внутреннего давления азимутального магнитного поля. Пусть вмороженное магнитное поле имеет компоненты $\mathbf{H}_0$ $(0, H_{\varphi 0}, H_{z0})$, а магнитное поле внутри полости трубы (при $r \leqslant a$), под действием которого происходит течение, $\mathbf{H}$ $(0, H_\varphi, H_{z0})$.

Из уравнений для магнитного поля (2.2) (при равной нулю левой части) и выражения для скорости (3.2) находим

$$H_{\varphi 0}(r) = H_{\varphi 0}(a)\, r/a, \quad H_{z0} = \text{const} \tag{4.1}$$

где $H_{\varphi 0}(a)$ — значение вмороженного магнитного поля на внутренней поверхности трубы (внутреннем радиусе). Вмороженное магнитное поле с такой φ-й компонентой создается током в материале трубы с однородной по радиусу плотностью

$$j_z = \frac{c}{2\pi a} H_{\varphi 0}(a) \tag{4.2}$$

(z-я компонента поля может быть создана внешним соленоидом).

Для определения распределения напряжений при течении под действием внутреннего давления проинтегрируем уравнение (3.6) при граничном условии

$$\overset{\circ}{\sigma}_{rr}(b) = 0 \tag{4.3}$$

При этом магнитное поле определяется формулами (4.1) и в уравнении (3.6) из условия $\sigma^0_{\varphi\varphi}(b) > 0$ выбираем нижний знак [13]. Интегрирование дает

$$\sigma_{rr}{}^\circ = -\left[2k \ln \frac{b}{r} + \frac{H^2_{\varphi 0}(a)}{4\pi a^2}(b^2 - r^2)\right] \tag{4.4}$$

Компоненты $\overset{\circ}{\sigma}_{\varphi\varphi}$ и $\overset{\circ}{\sigma}_{zz}$ тензора напряжений определяются затем из формул (3.4), (3.5).

Из условия непрерывности компонент σ_{rr} (полное напряжение) на внутренней поверхности трубы (при $r = a$)

$$\sigma^H_{rr}(a - 0) = \overset{\circ}{\sigma}_{rr}(a + 0) + \delta^H_{rr}(a + 0) \tag{4.5}$$

определим значение напряженности внутреннего поля, при котором начинается пластическое течение

$$\frac{H_\varphi{}^2}{8\pi} = 2k \ln \frac{b}{a} + \frac{H^2_{\varphi 0}(a)}{4\pi a^2}\left(b^2 - \frac{1}{2}a^2\right) \tag{4.6}$$

В случае отсутствия вмороженного поля внутреннее магнитное поле, вызывающее пластическое течение, определяется формулой

$$^1/_8\pi H_\varphi{}^2 = 2k \ln (b / a) \tag{4.7}$$

Сравнение формул (4.6) и (4.7) показывает, что для создания пластического течения под действием внутреннего давления при наличии вмороженного поля необходимо большее магнитное поле, чем при отсутствии вмороженного поля (вмороженное поле «препятствует» пластическому течению).

Рассмотрим теперь магнитопластическое течение трубы под действием внешнего магнитного давления. Граничным условием в этом случае будет условие

$$\sigma_{rr}{}^\circ(a) = 0 \tag{4.8}$$

Положим для простоты, что как вмороженное поле $\mathbf{H}_0$, так и внешнее поле $\mathbf{H}$ имеют только φ-ю компоненту

$$\mathbf{H}_0(0,\ H_{\varphi 0},\ 0),\quad \mathbf{H}\ (0,\ H_\varphi,\ 0)$$

Вмороженное поле по-прежнему определяется формулой (4.1). Интегрируя уравнение (3.6) при граничном условии (4.8), получим

$$\overset{\circ}{\sigma}_{rr} = -2k \ln \frac{r}{a} + \frac{H_{\varphi 0}^2(a)}{4\pi a^2}(r^2 - a^2) \tag{4.9}$$

(в этом случае в уравнении (3.6) выбран верхний знак [13], чтобы при $r = a$ было $\overset{\circ}{\sigma}_{\varphi\varphi} < 0$).

Из условия непрерывности компонент σ_{rr} полного напряжения на внешней поверхности трубы ($r = b$) найдем значение напряженности внешнего магнитного поля, при котором начинается пластическое течение

$$\frac{H_\varphi^2}{8\pi} = 2k \ln \frac{b}{a} - \frac{H_{\varphi 0}^2(a)}{4\pi a^2}(^1/_2 b^2 - a^2) \tag{4.10}$$

Магнитное поле, вызывающее пластическое течение при отсутствии вмороженного поля по-прежнему определяется формулой (4.7). Из сравнения выражений (4.10) и (4.7) следует, что вмороженное магнитное поле способствует пластическому течению, если между радиусами трубы выполняется соотношение

$$b > \sqrt{2}\, a \tag{4.11}$$

(иными словами, если труба достаточно толстая). Интересно отметить, что пластическое течение может начаться под действием только вмороженного поля, величина которого определяется формулой

$$\frac{H_{\varphi 0}^2(b)}{8\pi} = \frac{k \ln (b / a)}{1 - (a^2 / b^2)} \tag{4.12}$$

(Это явление аналогично пинч-эффекту в плазме [14].) Как это следует из равенства (4.12), для пластического течения под действием вмороженного поля требуется меньшее магнитное поле, чем в случае непроникающего поля, если выполняется условие (4.11).

Наконец, пусть пластическое течение происходит при наличии вмороженного поля $\mathbf{H}_0\ (0,\ H_{\varphi 0}\ (a)\ r\ /\ a,\ 0)$ и внешнего поля $\mathbf{H}(0,\ H_{\varphi 0}\ (a) r\ /\ a,\ H_z)$. Распределение напряжений материала $\overset{\circ}{\sigma}_{rr}$ определяется в этом случае формулой (4.9). Аксиальное магнитное поле (внешнее), при котором начинается пластическое течение, определяется соотношением

$$\frac{H_z^2}{8\pi} = 2k \ln \frac{b}{a} - \frac{H_{\varphi 0}^2(a)}{4\pi a^2}(b^2 - a^2) \tag{4.13}$$

Таким образом, вмороженное магнитное поле в этом случае всегда способствует пластическому течению.

Авторы благодарят А. И. Ахиезера и Л. И. Седова за ценные дискуссии.

Поступила 30 I 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Кольм Г., Фриман А. Сильные магнитные поля. Усп. физ. н., 1966, т. 88, вып. 4.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1947.
3. Love A. E. A treatise on the mathematical theory of elasticity 4-ed Cambridge, Univ. Press, 1934, p. 5.
4. Седов Л. И. Математические методы построения новых моделей сплошных сред. Усп. матем. н., 1965, т. 20, вып. 5.
5. Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
6. Гроот С. Р. Де. Термодинамика необратимых процессов. М., Гостехиздат, 1956.
7. Седов Л. И., Об основных концепциях механики сплошной среды. В сб.: «Некоторые проблемы математики и механики», Новосибирск, Изд-во Сиб. отд. АН СССР, 1961.
8. Truesdell C. A new definition of a fluid, II. The Maxwellian fluid. J. math. pures et appl., 1951. vol. 30, № 2.
9. Вакуленко А. А. О связях между напряжениями и деформациями в неупругих средах. Сб. «Исследования по упругости и пластичности», сб. 1, Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1961.
10. Гольденблатт И. И. Некоторые вопросы механики деформируемых сред, М. Гостехиздат, 1955.
11. Мизес Р. Механика твердых тел в пластически-деформированном состоянии. сб. «Теория пластичности», М, Изд-во иностр. лит., 1948.
12. Ахиезер А. И. Демуцкий В. П., Половин Р. В. К теории магнитопластичности. Физ. метал. и металловед., 1967, т. 23, № 5.
13. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. М, Изд-во иностр. лит., 1954, стр. 498.
14. Арцимович Л. А. Управляемые термоядерные реакции. М., Физматгиз, 1961.