Прикладная математика и механика. Том 33, 1969

О РЕШЕНИИ ОДНОГО КЛАССА ПАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, СВЯЗАННЫХ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ МЕЛЕРА — ФОКА

Н. Н. Лебедев, И. П. Скальская

(Ленинград)

Рассматриваются парные интегральные уравнения с ядрами, содержащими сферические функции Лежандра, и показывается, что эти уравнения допускают точное решение в квадратурах. Предложенная теория включает, как частные случаи, теорию ранее рассмотренных уравнений, связанных с преобразованием Мелера — Фока, встречающихся в различных приложениях, в частности при решении смешанных краевых задач математической физики и теории упругости.

§ 1. Парными уравнениями, связанными с интегральным преобразованием Мелера — Фока, называются уравнения вида

$$\int_0^\infty M(\tau)\, P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\, d\tau = f(\alpha) \qquad (0 \leqslant \alpha < \alpha_0)$$

$$\int_0^\infty M(\tau)\, \omega(\tau)\, P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\, d\tau = g(\alpha) \qquad (\alpha > \alpha_0) \tag{1.1}$$

где $P_\nu(z)$ — сферическая функция Лежандра с комплексным индексом $\nu = -1/2 + i\tau$, $f(\alpha)$ и $g(\alpha)$ — заданные функции, $\omega(\tau)$ — весовая функция ($\omega(\tau) > 0$, $\omega(\tau) \approx \tau$ при $\tau \to \infty$). Уравнения этого типа встречаются во многих приложениях, в частности играют важную роль при решении некоторых смешанных краевых задач. Рассматриваются также обобщения уравнений (1.1), ядра которых содержат присоединенные сферические функции.

В настоящее время не существует общей теории таких уравнений, и большая часть полученных в этой области результатов относится к уравнениям специального вида, соответствующим различному выбору функции $\omega(\tau)$ (см. [1-6]). Так, изучены уравнения

$$\int_0^\infty M(\tau)\, P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\, d\tau = f(\alpha) \qquad (0 \leqslant \alpha < \alpha_0) \tag{1.2}$$

$$\int_0^\infty M(\tau)\, \frac{\operatorname{ch}\pi\tau}{\pi\,[P_{-1/2+i\tau}(0)]^2}\, P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\, d\tau = 0 \qquad (\alpha > \alpha_0)$$

встречающиеся при решении краевых задач со смешанными граничными условиями, заданными на поверхности однополостного гиперболоида вращения [6]. Другой интересный частный случай образуют уравнения Гринченко и Улитко

$$\int_0^\infty M(\tau)\, P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\, d\tau = f(\alpha) \qquad (0 \leqslant \alpha < \alpha_0) \tag{1.3}$$

$$\int_0^\infty M(\tau)\, \tau \operatorname{th} \pi\tau P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\, d\tau = 0 \qquad (\alpha > \alpha_0)$$

решение которых в работе [1] было первым шагом в построении теории парных интегральных уравнений с ядрами Мелера — Фока. Эти уравнения находят многочисленные приложения при решении некоторых контактных задач, задач теории упругости, электростатики и т. д.

Уравнения (1.2) и (1.3) допускают точное решение в квадратурах. Метод решения этих уравнений позволяет изучить одновременно уравнения более общего типа, в которых функция $\omega(\tau)$ лишь асимптотически совпадает с весовыми функциями рассматриваемых уравнений. Для этих случаев исследование парных уравнений приводит к решению интегральных уравнений Фредгольма второго рода с непрерывным ядром.

Цель данной работы заключается в решении парных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty M(\tau)\, P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\, d\tau = f(\alpha) \qquad (0 \leqslant \alpha < \alpha_0) \\ &\int_0^\infty M(\tau)\, \omega_\mu(\tau)\, P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\, d\tau = 0 \qquad (\alpha > \alpha_0) \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} \omega_\mu(\tau) = 4\pi^2 \Big[&\operatorname{ch}\pi\tau\, \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{\mu}{2} + \frac{i\tau}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{\mu}{2} - \frac{i\tau}{2}\right) \times \\ &\times \Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{\mu}{2} + \frac{i\tau}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{\mu}{2} - \frac{i\tau}{2}\right)\Big]^{-1} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь $\Gamma(z)$ — гамма-функция, μ — параметр, принимающий произвольные вещественные значения (так как $\omega_{-\mu}(\tau) = \omega_\mu(\tau)$, можно, не ограничивая общности, считать $\mu \geqslant 0$).

Уравнения (1.2) соответствуют значению $\mu = 0$, уравнения (1.3) — значению $\mu = 1/2$.

Показывается, что уравнения (1.4) относятся к классу уравнений, допускающих точное решение. Предлагаемый метод решения позволяет с единой позиции рассмотреть оба ранее исследованных частных случая. Развитая теория дает также возможность находить решения уравнений с весовой функцией $\omega(\tau)$, близкой к $\omega_\mu(\tau)$.

2. Рассмотрим некоторые разрывные интегралы, содержащие сферические функции Лежандра. Прежде чем переходить к решению парных интегральных уравнений рассматриваемого типа получим две вспомогательные формулы, играющие важную роль в последующей теории. Эти формулы имеют вид

$$\operatorname{ch} t \int\limits_0^\infty \frac{\tau \operatorname{th} \pi\tau}{\omega_\mu(\tau)} F\left(\frac{1}{4}+\frac{\mu}{2}+\frac{i\tau}{2}, \frac{1}{4}+\frac{\mu}{2}-\frac{i\tau}{2}, \frac{1}{2}, -\operatorname{sh}^2 t\right) P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\, d\tau =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(\operatorname{ch} t)^{1-\mu}}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\alpha-\operatorname{ch}^2 t}} F\left(-\dfrac{\mu}{2}, \dfrac{\mu}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{\operatorname{ch}^2 t-\operatorname{ch}^2\alpha}{\operatorname{ch}^2 t}\right) & (t<\alpha) \\ 0 & (t>\alpha) \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\operatorname{sh} t \int\limits_0^\infty \tau \operatorname{th} \pi\tau F\left(\frac{1}{4}+\frac{\mu}{2}+\frac{i\tau}{2}, \frac{1}{4}+\frac{\mu}{2}-\frac{i\tau}{2}, \frac{3}{2}, -\operatorname{sh}^2 t\right) P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\, d\tau =$$

$$= \begin{cases} 0 & (t<\alpha) \\ \dfrac{(\operatorname{ch} t)^{1-\mu}}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 t-\operatorname{ch}^2\alpha}} F\left(\dfrac{1-\mu}{2}, \dfrac{\mu-1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{\operatorname{ch}^2 t-\operatorname{ch}^2\alpha}{\operatorname{ch}^2 t}\right) & (t>\alpha) \end{cases} \tag{2.2}$$

где $F(a, b, c, z)$ — гипергеометрическая функция. Первое из этих равенств справедливо для $0 \leqslant \mu \leqslant 1/2$, второе — для любых $\mu \geqslant 0$.

Формулы (2.1), (2.2) будут, по-видимому, новыми, и их вывод основывается на довольно сложных соображениях. Приведем краткий ход рассуждений, позволяющих получить равенство (2.1). Воспользовавшись известным преобразованием гипергеометрической функции

$$F(a, b, 1/2, z) = (1-z)^{-a} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(b-a)}{\Gamma(1/2-a)\Gamma(b)} F\left(a, \frac{1}{2}-b, 1+a-b, \frac{1}{1-z}\right) +$$
$$+ (1-z)^{-b} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(a-b)}{\Gamma(1/2-b)\Gamma(a)} F\left(b, \frac{1}{2}-a, 1-a+b, \frac{1}{1-z}\right)$$

и положив $\nu = i\tau$, можно представить интеграл в левой части (2.1) в виде

$$J = \frac{(\operatorname{ch} t)^{1/2-\mu}}{4i\sqrt{\pi}} \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\nu}{\Gamma(1+\nu)} \Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}\right) \times$$
$$\times (\operatorname{ch} t)^{-\nu} F\left(\frac{1}{4}+\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}, \frac{1}{4}-\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}, 1+\nu, \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}\right) P_{\nu-1/2}(\operatorname{ch}\alpha)\, d\nu \tag{2.3}$$

Предположим сначала, что $t > \alpha$. Подынтегральное выражение в (2.3) представляет собой мероморфную функцию с полюсами в точках $\nu = -2n - 1/2 \pm \mu$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$). При условии, что $0 \leqslant \mu \leqslant 1/2$, эти полюса расположены слева от мнимой оси (при $\mu = 1/2$ точка $\nu = 0$ есть устранимая особая точка). Поэтому, дополнив контур интегрирования дугой круга большого радиуса, расположенной в полуплоскости $\operatorname{Re}\nu > 0$, и замечая, что на основании известных асимптотических формул подынтегральное выражение при $|\nu| \to \infty$, $|\arg\nu| \leqslant 1/2\,\pi$ стремится к нулю, как $2^{1/2}(\pi\nu\operatorname{sh}\alpha)^{-1/2} e^{-(t-\alpha)\nu}$, получаем

$$J\,|_{t>\alpha} = 0$$

Для вычисления интеграла при $t < \alpha$ воспользуемся функциональным соотношением

$$\pi \operatorname{tg} \pi\nu P_{\nu-1/2}(z) = Q_{-\nu-1/2}(z) - Q_{\nu-1/2}(z)$$

и представим J как сумму двух интегралов [1]

$$J = \frac{(\operatorname{ch} t)^{1/2-\mu}}{4i\pi\sqrt{\pi}}\left\{\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\nu\operatorname{ctg}\pi\nu}{\Gamma(1-\nu)}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}\right)\times\right. \tag{2.4}$$

$$\times(\operatorname{ch} t)^{\nu}F\left(\frac{1}{4}+\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2},\ \frac{1}{4}-\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2},\ 1-\nu,\ \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}\right)Q_{\nu-1/2}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\nu -$$

$$-\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\nu\operatorname{ctg}\pi\nu}{\Gamma(1+\nu)}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}\right)\times$$

$$\left.\times(\operatorname{ch} t)^{-\nu}F\left(\frac{1}{4}+\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2},\ \frac{1}{4}-\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2},\ 1+\nu,\ \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}\right)Q_{\nu-1/2}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\nu\right\}$$

В предположении, что $0\leqslant\mu\leqslant 1/2$, особыми точками в первом интеграле, расположенными в полуплоскости $\operatorname{Re}\nu>0$, будут полюса $\nu=n$ $(n=1,2,\ldots)$ и $\nu=2n+1/2\pm\mu$ $(n=0,1,2,\ldots)$, во втором интеграле — полюса $\nu=n$ $(n=1,2,\ldots)$. Дополняя контур интегрирования до замкнутого и принимая во внимание асимптотическое поведение подынтегральных функций при $|\nu|\to\infty$, $|\arg\nu|\leqslant 1/2\pi$, получаем при помощи теории вычетов [2]

$$J = \frac{(\operatorname{ch} t)^{1-\mu}}{\sqrt{\pi}}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-\mu+1/2)\,\Gamma(\mu-n)\operatorname{tg}\pi\mu}{n!\,\Gamma(-2n+\mu+1/2)}\times\right.$$

$$\times(\operatorname{ch} t)^{2n-\mu}F(-n,\ \mu-n,\ -2n+\mu+1/2,\ \operatorname{sch}^2 t)\,Q_{2n-\mu}(\operatorname{ch}\alpha) -$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+\mu+1/2)\,\Gamma(-\mu-n)\operatorname{tg}\pi\mu}{n!\,\Gamma(-2n-\mu+1/2)}\times$$

$$\left.\times(\operatorname{ch} t)^{2n+\mu}F(-n,\ -\mu-n,\ -2n-\mu+1/2,\ \operatorname{sch}^2 t)\,Q_{2n+\mu}(\operatorname{ch}\alpha)\right\} \tag{2.5}$$

Суммирование в правой части равенства (2.5) может быть выполнено на основании общей теории рядов данного типа, принадлежащей Шефке [7]. На основании этой теории находим

$$J\,|_{t<\alpha} = \frac{(\operatorname{ch} t)^{1-\mu}}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\alpha-\operatorname{ch}^2 t}}F\left(-\frac{\mu}{2},\ \frac{\mu}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{\operatorname{ch}^2 t-\operatorname{ch}^2\alpha}{\operatorname{ch}^2 t}\right)$$

Предложенный способ вычисления интеграла (2.1) применим также при $\mu>1/2$, однако в этом случае распределение особых точек на плоскости комплексной переменной оказывается несколько иным. Это приводит к появлению в правой части равенства (2.1) дополнительных членов, число которых зависит от значения параметра μ. Не выписывая явных выражений этих слагаемых, отметим, что они будут непрерывными функциями переменного t в интервале $(0,\infty)$.

Формула (2.2) доказывается аналогичным образом, причем для данной работы достаточно установить справедливость рассматриваемого равенства для $t<\alpha$.

3. Построим решение парных интегральных уравнений для значений $0\leqslant\mu\leqslant 1/2$, рассмотрим парные интегральные уравнения

$$\int_0^{\infty}M(\tau)\,P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau = f(\alpha)\qquad(0\leqslant\alpha<\alpha_0) \tag{3.1}$$

$$\int_0^{\infty}M(\tau)\,\omega_\mu(\tau)\,P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau = 0\qquad(\alpha>\alpha_0) \tag{3.2}$$

---

[1] В первом интеграле выполнена замена ν на $-\nu$.

[2] Вычеты, относящиеся к точкам $\nu=n$ $(n=1,2,\ldots)$, при вычислении сокращаются.

где $\omega_\mu(\tau)$ имеет значение, указанное в равенстве (1.5), $f(\alpha)$ — заданная непрерывно-дифференцируемая функция.

При решении уравнений (3.1), (3.2) предположим сначала, что параметр μ принадлежит интервалу $(0, {}^1/_2)$. Будем искать решение рассматриваемых уравнений в форме

$$M(\tau) = \frac{2\tau \operatorname{th} \pi\tau}{\pi\omega_\mu(\tau)} \int_0^{\alpha_0} \varphi(t) \operatorname{ch} t F\left(\frac{1}{4} + \frac{\mu}{2} + \frac{i\tau}{2}, \frac{1}{4} + \frac{\mu}{2} - \frac{i\tau}{2}, \frac{1}{2}, -\operatorname{sh}^2 t\right) dt \tag{3.3}$$

где $\varphi(t)$ — неизвестная функция, непрерывная вместе со своей первой производной на промежутке $(0, \alpha_0)$.

Принимая во внимание соотношение

$$F(a, b, {}^1/_2, -z^2) = \frac{d}{dz} z F(a, b, {}^3/_2, -z^2)$$

и интегрируя (3.3) по частям, имеем

$$M(\tau) = \frac{2\tau \operatorname{th} \pi\tau}{\pi\omega_\mu(\tau)} \left\{ \varphi(\alpha_0) \operatorname{sh} \alpha_0 F\left(\frac{1}{4} + \frac{\mu}{2} + \frac{i\tau}{2}, \frac{1}{4} + \frac{\mu}{2} - \frac{i\tau}{2}, \frac{3}{2}, - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \operatorname{sh}^2 \alpha_0\right) - \int_0^{\alpha_0} \varphi'(t) \operatorname{sh} t F\left(\frac{1}{4} + \frac{\mu}{2} + \frac{i\tau}{2}, \frac{1}{4} + \frac{\mu}{2} - \frac{i\tau}{2}, \frac{3}{2}, -\operatorname{sh}^2 t\right) dt \right\}$$

Если подставить последнее выражение в (3.2) и воспользоваться значением интеграла (2.2), то уравнение (3.2) будет удовлетворяться тождественно.

Подставляя (3.3) в (3.1) и учитывая равенство (2.1), приходим к интегральному уравнению первого рода для функции $\varphi(t)$

$$\int_0^\alpha \varphi(t) \frac{(\operatorname{ch} t)^{1-\mu}}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\alpha - \operatorname{ch}^2 t}} F\left(-\frac{\mu}{2}, \frac{\mu}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{ch}^2\alpha}{\operatorname{ch}^2 t}\right) dt = \frac{\pi}{2} f(\alpha) \tag{3.4}$$
$$(0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0)$$

Уравнение (3.4) принимает более простую форму, если положить

$$x = \operatorname{ch}^2\alpha, \quad y = \operatorname{ch}^2 t, \quad \psi(y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{y^{-{}^1/_2\mu}}{\sqrt{y-1}} \varphi(\operatorname{ar ch} \sqrt{y}), \quad g(x) = \frac{\pi}{2} f(\operatorname{ar ch} \sqrt{x}) \tag{3.5}$$

Выполнив замену переменных, получим

$$\int_1^x \frac{\psi(y)}{\sqrt{\pi}\sqrt{x-y}} F\left(-\frac{\mu}{2}, \frac{\mu}{2}, \frac{1}{2}, 1 - \frac{x}{y}\right) dy = g(x) \qquad (x \geqslant 1) \tag{3.6}$$

Последнее уравнение относится к классу интегральных уравнений, недавно исследованных Лявом [8]. Этот класс включает многие уравнения, встречающиеся в приложениях, в частности интегральное уравнение Абеля, играющее важную роль при решении парных интегральных уравнений (1.2) и (1.3).

В соответствии с теорией Лява решение уравнения (3.6) имеет вид

$$\psi(y)=y^{1/2\mu}\frac{d}{dy}y^{-1/2\mu}\int_1^y\frac{g(x)}{\sqrt{\pi}\sqrt{y-x}}F\left(\frac{\mu}{2},1-\frac{\mu}{2},\frac{1}{2},1-\frac{x}{y}\right)dx \quad (3.7)$$

Возвращаясь к первоначальным переменным, находим (3.8)

$$\varphi(t)=(\operatorname{ch}t)^{2\mu-1}\frac{d}{dt}(\operatorname{ch}t)^{-\mu}\int_0^t\frac{f(\alpha)\operatorname{ch}\alpha\operatorname{sh}\alpha}{\sqrt{\operatorname{ch}^2t-\operatorname{ch}^2\alpha}}F\left(\frac{\mu}{2},1-\frac{\mu}{2},\frac{1}{2},1-\frac{\operatorname{ch}^2\alpha}{\operatorname{ch}^2t}\right)d\alpha$$

После определения $\varphi(t)$ решение парных интегральных уравнений (3.1), (3.2) получается в квадратурах при помощи формулы (3.3). Таким образом, равенство (3.8) дает решение поставленной задачи.

Данная теория содержит, как частные случаи, ранее полученные результаты, относящиеся к парным интегральным уравнениям (1.2), (1.3).

Вычисления п. 3 носят формальный характер. Однако при наложенных выше ограничениях на функцию $f(\alpha)$, уравнение (3.4) допускает решение в классе непрерывно-дифференцируемых функций, которое определяется формулой (3.8). Основываясь на этом, можно показать, что равенство (3.3) дает непрерывное решение парных уравнений (3.1), (3.2).

В качестве примера рассмотрим случай $f(\alpha)=1$. Для такой правой части искомая функция $\varphi(t)$ может быть выражена в замкнутой форме через гипергеометрическую функцию. Воспользовавшись формулой (3.8), получаем после некоторых вычислений

$$\varphi(t)=(\operatorname{ch}t)^{2\mu-1}\frac{d}{dt}(\operatorname{ch}t)^{-\mu}\operatorname{sh}tF\left(\frac{\mu}{2},1-\frac{\mu}{2},\frac{3}{2},\operatorname{th}^2t\right)$$

§ 4. Предложенный выше метод решения парных уравнений (3.1), (3.2) в принципе допускает обобщение на случай $0\leqslant\mu<\infty$, однако вся теория приобретает при этом несколько громоздкий вид. Поэтому, не приводя явной формы решения и опуская детали вычислений, ограничимся лишь кратким обзором этой теории.

Решение парных уравнений ищется по-прежнему в виде (3.3), причем на основании (2.2) однородное уравнение (3.2) удовлетворяется тождественно. Подстановка (3.3) в неоднородное уравнение (3.1) приводит (с учетом соответственно видоизмененной формы интеграла (2.1)) к интегральному уравнению для функции $\varphi(t)$, отличающемуся от уравнения (3.4) тем, что его правая часть содержит кроме заданной функции $f(\alpha)$ дополнительный член вида

$$\sum_{n=0}^N c_n P_{2n-\mu}(\operatorname{ch}\alpha)$$

Коэффициенты c_n представляют собой интегралы по промежутку $(0, \alpha_0)$ от произведений искомой функции $\varphi(t)$ на некоторые известные функции переменного t. Число N связано с параметром μ соотношением $N=[{}^1/_2\,\mu-{}^1/_4]$, поэтому число слагаемых в рассматриваемой сумме всегда конечно [1]. После решения интегрального уравнения при помощи формулы

[1] В частности, для интервала $0\leqslant\mu\leqslant{}^1/_2$ сумма оказывается пустой, и дополнительный член отсутствует (при $\mu={}^1/_2$ коэффициент $c_0=0$).

обращения (3.8) определение неизвестных постоянных c_n сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений.

В качестве примера, иллюстрирующего особенности теории, возникающие при $\mu > 1/2$, рассмотрим решение парных интегральных уравнений

$$\int_0^\infty M(\tau) P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau = f(\alpha) \qquad (0 \leqslant \alpha < \alpha_0) \tag{4.1}$$

$$\int_0^\infty M(\tau)\,\omega_1(\tau) P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau = 0 \quad (\alpha > \alpha_0) \tag{4.2}$$

которые соответствуют значению $\mu = 1$ и встречаются в приложениях. В этом случае разрывный интеграл (2.1) будет равен

$$\operatorname{ch} t \int_0^\infty \frac{\tau \operatorname{th} \pi\tau}{\omega_1(\tau)} F\left(\frac{3}{4}+\frac{i\tau}{2}, \frac{3}{4}-\frac{i\tau}{2}, \frac{1}{2}, -\operatorname{sh}^2 t\right) P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau =$$
$$= \begin{cases} \theta(t) - \operatorname{sch} t \; (t < \alpha) \\ \quad -\operatorname{sch} t \; (t > \alpha) \end{cases}, \qquad \theta(t) = \frac{\operatorname{ch}\alpha}{\operatorname{ch} t \sqrt{\operatorname{ch}^2\alpha - \operatorname{ch}^2 t}} \tag{4.3}$$

Заметим, что первое слагаемое $\theta(t)$ в правой части (4.3) может быть получено из (2.1), если положить там $\mu = 1$. Второе слагаемое соответствует дополнительному вычету в полюсе $\nu = 1/2$, который появляется при вычислении интегралов (2.3) и (2.4).

Если, согласно (3.3), искать решение уравнений (4.1), (4.2) в форме

$$M(\tau) = \frac{2\tau \operatorname{th} \pi\tau}{\pi\omega_1(\tau)} \int_0^{\alpha_0} \varphi(t) \operatorname{ch} t\, F\left(\frac{3}{4}+\frac{i\tau}{2}, \frac{3}{4}-\frac{i\tau}{2}, \frac{1}{2}, -\operatorname{sh}^2 t\right) dt \tag{4.4}$$

уравнение (4.2) удовлетворится тождественно, а для определения $\varphi(t)$ получается интегральное уравнение

$$\operatorname{ch}\alpha \int_0^\alpha \frac{\varphi(t)\,dt}{\operatorname{ch} t \sqrt{\operatorname{ch}^2\alpha - \operatorname{ch}^2 t}} = \frac{\pi}{2} f(\alpha) + c \tag{4.5}$$

Ядро этого уравнения совпадает с ядром уравнения (3.4) при $\mu = 1$, а неизвестная аддитивная постоянная c связана с искомой функцией соотношением

$$c = \int_0^{\alpha_0} \frac{\varphi(t)}{\operatorname{ch} t}\,dt \tag{4.6}$$

Решая уравнение (4.5) в соответствии с указанной выше схемой, находим

$$\varphi(t) = \operatorname{ch} t \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\alpha) \operatorname{sh}\alpha\, d\alpha}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{ch}^2\alpha}} + \frac{2c}{\pi} \tag{4.7}$$

Умножая последнее уравнение на $(\operatorname{ch} t)^{-1}$ и интегрируя по промежутку $(0, \alpha_0)$, получаем для определения c линейное уравнение, из которого следует

$$c = \frac{1}{1 - 2\pi^{-1} \operatorname{arctg} \operatorname{sh} \alpha_0} \int_0^{\alpha_0} \frac{f(\alpha) \operatorname{sh} \alpha d\alpha}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \alpha_0 - \operatorname{ch}^2 \alpha}} \tag{4.8}$$

Математический аппарат, разработанный в этой статье, позволяет исследовать также парные уравнения Мелера — Фока с $\omega(\tau)$, близкой к $\omega_\mu(\tau)$. Применение обычной техники дает возможность получить решение этих уравнений в виде квадратур, содержащих вспомогательную функцию $\varphi(t)$, которая удовлетворяет интегральному уравнению второго рода с непрерывным ядром. Для частных случаев $\mu = 0$ и $\mu = {}^1/_2$ соответствующие вычисления выполнены в работах [1,2,6].

Поступила 2 VII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Об одной смешанной граничной задаче теплопроводности для полупространства. Инж.-физ. ж., 1963, № 10, стр. 67.
2. Баблоян А. А. Решение некоторых парных интегральных уравнений. ПММ, 1964, т. 28, вып. 6, стр. 1015.
3. Руховец А. Н., Уфлянд Я. С. Электростатическое поле пары тонких сферических оболочек (осесимметричная задача). Ж. техн. физ., 1965, т. 35, № 9, стр. 1532.
4. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Растяжение упругого пространства, ослабленного кольцевой трещиной. Прикл. механ., 1965, т. 1, № 10, стр. 61.
5. Руховец А. Н., Уфлянд Я. С. Об одном классе парных интегральных уравнений и их приложениях в теории упругости. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2, стр. 271.
6. Лебедев Н. Н., Скальская И. П. Распределение электричества на тонком гиперболоидальном сегменте. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1967, т. 7, № 2, стр. 348.
7. Schäfke F. W. Einführung in die Theorie der Speziellen Funktionen Mathematischen Physik. 1963, Berlin Springer.
8. Love E. R. Some Integral Equations Involving Hypergeometric Functions. Proc. Edinburgh Math. Soc., ser. 2, 1967, vol. 15, No. 3, p. 169.