Прикладная математика и механика. Том 33, 1969

О ТЕМПЕРАТУРНЫХ ИЛИ КОНЦЕНТРАЦИОННЫХ ПОЛЯХ, СОЗДАВАЕМЫХ ВНУТРИ БЕСКОНЕЧНОЙ ИЛИ КОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ ДВИЖУЩИМИСЯ ПОВЕРХНОСТЯМИ, НА КОТОРЫХ ЗАДАН ВРЕМЕННОЙ ХОД ТЕМПЕРАТУРЫ ИЛИ КОНЦЕНТРАЦИИ

Г. А. Гринберг

(Ленинград)

Показано, что если подвергнуть общее уравнение теплопроводности (диффузии) одному или нескольким преобразованиям специального вида, то оно принимает такую форму, при которой оказывается возможным решить в известных функциях целый ряд задач указанного в заголовке типа. В частности, дано решение задачи для случая, когда температурное (концентрационное) поле создается равномерным или равнопеременным движением плоскости, на которой задан временной ход температуры (концентрации), аналогичных задач для полубесконечных в направлении оси призматических или цилиндрических стержней и др. В некоторых более общих случаях для решения задачи получаются относительно простые линейные интегральные уравнения.

Определение температурного поля в неограниченной изотропной среде перед фронтом движущегося источника тепла, температура которого считалась постоянной или заданной функцией времени (одномерная задача) дано в работе [1].

Примененный метод основывался на рассмотрении процесса в системе координат, движущейся вместе с источником тепла. Это дало возможность непосредственно получить в квадратурах решение задачи в случае равномерного движения фронта, а в случае неравномерного — свести дело к решению некоторого интегрального уравнения из которого, в частности, легко получалось искомое температурное поле также и тогда, когда координата фронта возрастает пропорционально корню квадратному из времени.

Ниже показано, что если наряду с введением вышеуказанной системы координат подвергнуть записанное в этой системе уравнение теплопроводности некоторому специальному преобразованию, то оно принимает такую форму, что оказывается возможным решить в известных функциях поставленную задачу не только в указанных выше случаях, но и тогда, когда фронт движется равноускоренно или равнозамедленно, причем как начальное состояние системы и распределение в ней заданных источников тепла, так и зависимость температуры на фронте от времени могут задаваться произвольным образом. Поэтому это точное решение может служить также для приближенного рассмотрения общей задачи в случае, когда движение фронта происходит по более сложному закону, но допускает достаточно хорошую поэтапную аппроксимацию равномерно переменным движением. Той же цели может служить и другое указанное в работе точное решение, относящееся к случаю, когда фронт $x = \xi$ перемещается по закону $\xi = \sqrt{A + Bt + Ct^2}$, где A, B и C — произвольные постоянные. Наряду с этим полученная в работе новая форма основного уравнения задачи дает возможность свести ее решение в общем случае к иным, чем обычно, притом в ряде случаев более удобным для эффективного решения интегральным уравнениям. Заметим также, что пользуясь соображениями, подобными изложенным в работах [2,3], и комбинируя предлагаемый здесь метод с полученными в этих работах результатами, можно найти точные решения большого количества дву- и трехмерных задач теории теплопроводности и диффузии с движущимися границами. Такова, например, задача для полубесконечного призматического стержня, торец которого $x = R(t)$ движется равномерно, равномерно-переменно или по закону $R(t) = (A + Bt + Ct^2)^{1/2}$, тогда как боковые грани перемещаются в направлении осей координат по законам $R_i(t) = (M_i t^2 + N_i t + P_i)^{1/2}$, где i — индекс соответствующей оси, M_i, N_i, P_i — произвольные постоянные, зависящие от индекса i.

Аналогичным образом решаются соответствующие задачи для полубесконечного цилиндра, радиус боковой поверхности которого изменяется по закону $R(t) = (Mt^2 + Nt + P)^{1/2}$, тогда как торец движется равноускоренно или равнозамедленно, а также различные другие, некоторые из которых перечислены в пп. 4, 5 данной статьи.

1. Переходим к рассмотрению поставленной выше задачи, сводящейся в одномерном случае к решению уравнения

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + f(x, t), \quad a = \text{const} \tag{1.1}$$

для полубесконечной области $x > R(t)$, где $R(t)$ — некоторая функция времени, причем известно начальное состояние

$$u|_{t=0} = F(x) \text{ при } x > R(0), \quad u|_{x=R(t)} = \varphi(t)$$

на движущейся границе.

Здесь $f(x, t)$ — заданная функция своих аргументов.

Наряду с этим искомое решение должно обычно удовлетворять требованию ограниченности или обращения в нуль на бесконечности, или должен быть по крайней мере указан характер его роста на бесконечности.

Не ограничивая общности, можно, очевидно, считать $R(0) = 0$ и $a = 1$, что и предполагается в дальнейшем. Можно также полагать $F(x) \equiv 0$. Действительно, пусть в исходной задаче для u это не так, тогда вычитая из u например, функцию [1]

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \int_0^\infty F(\alpha) \exp\frac{-(\alpha - x)^2}{4at}\, d\alpha \tag{1.2}$$

удовлетворяющую уравнениям

$$a\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{\partial u_1}{\partial t}, \quad u_1|_{t=0} = F(x) \quad (x > 0) \tag{1.3}$$

[1] Можно за u_1 принять и более общее решение уравнения (1.3), а именно:

$$u_2 = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\alpha) \exp\frac{-(\alpha - x)^2}{4at}\, d\alpha$$

где $\Phi(\alpha)$ совпадает с $F(\alpha)$ при $\alpha > 0$, но может быть выбрана произвольно при $\alpha < 0$.

получим, что разностная функция $U = u - u_1$ удовлетворяет такому же уравнению (1.1), как u, но уже с начальным условием $U|_{t=0} = 0$. Условие же при $x = R(t)$ для этой функции будет иметь такой вид:

$$U|_{x=R(t)} = (u - u_1)|_{x=R(t)} = \varphi(t) - u_1[R(t), t] \equiv \varphi(t) \qquad (1.4)$$

т. е. поскольку $u_1[R(t), t]$ — известная функция от t, то в условии на движущейся границе известная функция $\varphi(t)$ заменяется другой функцией $\varphi(t)$ — тоже известной. Поэтому в дальнейшем будем, не уменьшая общности решения, считать $F(x) \equiv 0$, подразумевая, в случае необходимости, под u функцию U.

Полагая теперь $\xi = x - R(t)$, т. е. вводя движущуюся вместе с границей систему координат, получим для u следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + R' \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial t} = f(\xi + R, t) \equiv f^*, \quad R' = \frac{dR}{dt} \qquad (1.5)$$

Здесь производная по t берется уже при постоянном ξ, а условие на левой границе будет $u|_{\xi=0} = \varphi(t)$.

В случае равномерного движения границы $R' = \mathrm{const}$; при этом уравнение (1.5) непосредственно решается (см. [1]).

В общем случае произвольной $R(t)$ введем в (1.5) вместо u новую функцию v соотношением

$$u = qv, \quad q = \exp[-{}^1/_2(R'\xi + {}^1/_2 \textstyle\int R'^2 dt)] \qquad (1.6)$$

Уравнение (1.5) и соответствующие граничное условие при $\xi = 0$ и начальное условие примут вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{R''}{2} \xi v - \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{f^*}{q}, \quad R'' = \frac{d^2 R}{dt^2} \qquad (1.7)$$

$$v\Big|_{\xi=0} = \frac{u}{q}\Big|_{\xi=0} = \varphi(t) \exp\left[\frac{1}{4}\int R'^2 dt\right], \quad v|_{t=0} = 0 \qquad (1.8)$$

Условие для v при $\xi \to \infty$ получается из соответствующего условия для u.

Из уравнения (1.7) следует, во-первых, что в случае равномерного движения, когда $R'' = 0$, решение задачи с движущейся границей сводится просто к решению аналогичной задачи с неподвижной границей. Но из уравнения (1.7) видно также, что и при $R'' = \mathrm{const} \neq 0$, т. е. в случае равномерно-переменного движения однородное уравнение, получаемое из (1.7) при $f^* = 0$, допускает разделение переменных. В силу этого решается и общая задача, формулируемая уравнениями (1.7) — (1.8), притом, как будет сейчас показано, в известных, хорошо изученных функциях.

2. Пусть $R = {}^1/_2 \alpha t^2 + \beta t$, где $\alpha \neq 0$ и β — постоянные. Тогда $R'' = \alpha$ и уравнение (1.7) принимает вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2} \alpha \xi v - \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{f^*}{q} \qquad (2.1)$$

Здесь в соответствии с (1.6)

$$q = \exp\left[-\frac{(\alpha t+\beta)\xi}{2} - \frac{\alpha^2 t^3 + 3\alpha\beta t^2 + 3\beta^2 t}{12}\right] \tag{2.2}$$

При этом из (1.8) имеем

$$v|_{\xi=0} = \varphi(t)\exp\left[{}^1/_{12}(\alpha^2 t^3 + 3\alpha\beta t^2 + 3\beta^2 t)\right], \quad v|_{t=0} = 0 \quad (\xi > 0) \tag{2.3}$$

Однородное уравнение, получающееся из (2.1) при $f^* = 0$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\alpha}{2}\xi w - \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \tag{2.4}$$

имеет решения вида $w = e^{{}^1/_2 \alpha\lambda t}\mu(\xi)$, $\lambda = \text{const}$, причем

$$d^2\mu \,/\, d\xi^2 + {}^1/_2\alpha(\xi - \lambda)\mu = 0 \tag{2.5}$$

Это уравнение интегрируется в бесселевых функциях порядка одной трети. Рассмотрим отдельно случаи $\alpha > 0$ и $\alpha < 0$, причем начнем с последнего. Полагая $\alpha = -\gamma$, $\gamma > 0$, и

$$\eta = ({}^1/_2\gamma)^{1/3}(\xi - \lambda) \tag{2.6}$$

причем значению $\xi = \infty$ соответствует $\eta = \infty$ придадим уравнению (2.5) такую форму:

$$d^2\mu \,/\, d\eta^2 - \eta\mu = 0 \tag{2.7}$$

Независимыми частными решениями уравнения (2.7) будут функции

$$\mu_1(\eta) = \sqrt{\eta}\, I_{1/3}({}^2/_3\eta^{3/2}), \quad \mu_2(\eta) = \sqrt{\eta}\, K_{1/3}({}^2/_3\eta^{3/2}) \tag{2.8}$$

т. е. умноженные на $\sqrt{\eta}$ модифицированные бесселевы функции порядка одной трети от указанного аргумента. Заметим, что, несмотря на видимое присутствие в этих формулах корня квадратного из η, функции $\mu_1(\eta)$ и $\mu_2(\eta)$ на самом деле представляют собой целые функции от η. Это, в частности, непосредственно видно из того, что они будут линейными комбинациями двух других независимых частных решений уравнения (2.7), а именно:

$$\mu_3(\eta) = \eta + \frac{\eta^4}{3\cdot 4} + \frac{\eta^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \ldots, \quad \mu_4(\eta) = 1 + \frac{\eta^3}{2\cdot 3} + \frac{\eta^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} + \ldots \tag{2.9}$$

которые легко проверяются подстановкой в (2.7).

Собственными функциями рассматриваемой задачи будут обращающиеся в нуль при $\xi = 0$ и при $\xi = \infty$ решения[1] уравнения (2.5). Последнему условию удовлетворяет функция $\mu_2(\eta)$, которая, с точностью, до несущественного постоянного множителя, равна

$$\mu(\xi) = \sqrt{\xi - \lambda}\, K_{1/3}\left[{}^1/_3\sqrt{2\gamma}(\xi - \lambda)^{3/2}\right] \tag{2.10}$$

[1] См., например, [4], §§ 15 и 21 или [5].

Воспользуемся известной формулой

$$K_\nu(z)=\frac{\pi}{2\sin\pi\nu}\left[I_{-\nu}(z)-I_\nu(z)\right] \quad (2.11)$$

Полагая здесь $\nu={}^1/_3$, легко найдем [1] для функции $\mu(\xi)$ при $\xi<\lambda$ выражение через функции вещественного аргумента

$$\mu(\xi)=\frac{\pi\sqrt{\lambda-\xi}}{\sqrt{3}}\left\{J_{1/3}\left[{}^1/_3\sqrt{2\gamma}(\lambda-\xi)^{3/2}\right]+J_{-1/3}\left[{}^1/_3\sqrt{2\gamma}(\lambda-\xi)^{3/2}\right]\right\} \quad (2.12)$$

Условие $\mu(0)=0$ дает уравнение

$$J_{1/3}\left[{}^1/_3\sqrt{2\gamma}\lambda_n^{3/2}\right]+J_{-1/3}\left[{}^1/_3\sqrt{2\gamma}\lambda_n^{3/2}\right]=0 \quad (2.13)$$

для нахождения собственных значений λ_n. Для корней уравнения

$$J_{1/3}(z)+J_{-1/3}(z)=0 \quad (2.14)$$

существуют подробные таблицы [2]; существуют таблицы также и функций, отличающихся от (2.10) и (2.12) только численным множителем [3]; поэтому, обозначая корни уравнения (2.14) через z_n, найдем, что

$$\lambda_n=({}^9/_2 z_n^2/\gamma)^{1/3}, \qquad n=1,2,3,\ldots,\infty \quad (2.15)$$

Подстановка этих значений в (2.10) и (2.12) дает собственные функции $\mu_n(\xi)$ соответствующей краевой задачи для уравнения (2.5), которое для них теперь перепишется так:

$$d^2\mu_n\,/\,d\xi^2-{}^1/_2\,\gamma(\xi-\lambda_n)\mu_n=0 \qquad (n=1,2,3,\ldots) \quad (2.16)$$

Функции $\mu_n(\xi)$ образуют ортогональную в промежутке $(0,\infty)$ полную систему. Чтобы сделать ее еще и нормированной, достаточно учесть формулу

$$\int_0^\infty \mu_n^2 d\xi=\frac{2}{\gamma}\left(\frac{d\mu_n}{d\xi}\right)^2\Bigg|_{\xi=0} \quad (2.17)$$

и то, что входящая сюда производная равна

$$d\mu_n\,|\,d\xi\,|_{\xi=0}=-\sqrt{{}^1/_2\gamma}\,\lambda_n\left[J_{-2/3}(z_n)-J_{2/3}(z_n)\right]$$

Следовательно, нормированные собственные функции имеют вид

$$\psi_n(\xi)=-\frac{\mu_n(\xi)}{\lambda_n\left[J_{-2/3}(z_n)-J_{2/3}(z_n)\right]} \qquad (n\geqslant 1) \quad (2.18)$$

а соответствующее разложение некоторой функции $w(\xi)$ в ряд по функциям $\psi_n(\xi)$ будет [4]

$$w(\xi)=\sum_{n=1}^\infty w_n\psi_n(\xi), \quad w_n=\int_0^\infty w(\xi)\,\psi_n(\xi)\,d\xi \quad (2.19)$$

---

[1] За подробностями отсылаем к монографии [6], § 4.12.

[2] См., например, [7], стр. 103.

[3] Функции Эри (Airy); см. [8], где даны указания относительно соответствующих таблиц.

[4] По поводу условий разложимости см. [6].

Применим найденные результаты к решению поставленной в начале этого пункта задачи. Обозначив для краткости входящие в правые части уравнений (2.1) и (2.3) функции через $p(\xi, t)$ и $r(t)$ соответственно, имеем

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \frac{\gamma}{2}\xi v - \frac{\partial v}{\partial t} = p(\xi, t), \qquad v|_{\xi=0} = r(t) \tag{2.20}$$

Умножая первое уравнение (2.20) на $\psi_n(\xi)d\xi$ и интегрируя от 0 до ∞, получаем

$$\int_0^\infty \psi_n \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} d\xi - \frac{\gamma}{2}\int_0^\infty \xi \psi_n v d\xi - \frac{dv_n}{dt} = p_n(t) \tag{2.21}$$

$$v_n = v_n(t) = \int_0^\infty v\psi_n d\xi, \qquad p_n = p_n(t) = \int_0^\infty p\psi_n d\xi \tag{2.22}$$

Интегрируя дважды по частям первое слагаемое слева и (2.21), учитывая второе соотношение (2.20) и условие $\psi_n(0) = \psi_n(\infty) = 0$, а также то, что ψ_n удовлетворяет уравнению

$$\psi_n'' - (^1/_2\gamma\xi - \lambda_n)\psi_n = 0$$

приходим к соотношению

$$dv_n/dt + \lambda_n v_n = \psi_n'(0)r(t) - p_n(t) \quad (n \geqslant 1) \tag{2.23}$$

Интегрируя это уравнение, в котором правая часть известна, при начальном условии $v_n|_{t=0} = 0$, вытекающем из (2.22), где $v|_{t=0} = 0$, находим, что

$$v_n(t) = \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)}[\psi_n'(0)r(\tau) - p_n(\tau)]\,d\tau \tag{2.24}$$

и формула

$$v = v(\xi, t) = \sum_{n=1}^\infty v_n(t)\psi_n(\xi) \tag{2.25}$$

дает решение поставленной задачи.

Выше был подробно рассмотрен случай $\alpha < 0$, соответствующий точечному спектру. На случае $\alpha > 0$, когда спектр становится непрерывным, здесь останавливаться не будем (за справками отсылаем к упомянутой монографии [6], § 4.13).

3. Укажем еще некоторые случаи разрешимости в известных функциях как одномерных, так и дву- или трехмерных задач теории теплопроводности и им подобных при наличии движущихся границ.

Пусть требуется решить задачу, формулируемую уравнением

$$\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, y, z, t) \tag{3.1}$$

для неограниченной в направлении положительной оси x области $x > R_1(t)$, сечение которой не зависит от x, но может изменяться со временем, и которую будем условно называть стержнем, хотя это может быть, например, и пластина. Граничные условия для u будем считать заданными при $x = R_1(t)$ и при $x = \infty$, а также на боковой поверхности стержня, а начальное значение $u|_{t=0}$ — равным нулю, что, согласно сказанному в п. 1, не ограничивает общности решения. Наряду с этим будем полагать $f \equiv 0$, что тоже не ограничивает общности решения, ибо если известны собственные функции однородной задачи, то по этим функциям можно разложить и решение неоднородной.

Применяя к (3.1) указанное в п. 1 преобразование

$$\xi = x - R_1(t), \qquad u = q_1 v, \qquad q_1 = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(R_1'\xi + \frac{1}{2}\int R_1'^2 dt\right)\right] \tag{3.2}$$

получим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{2} R_1''\xi v - \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \tag{3.3}$$

Пусть $R_1 = {}^1/_2\, \alpha t^2/2 + \beta t$. Тогда (3.3) принимает вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\alpha}{2}\xi v - \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \tag{3.4}$$

Если положить здесь

$$v = \mu(\xi) w(y, \ z, \ t) \tag{3.5}$$

где $\mu(\xi)$ — одна из собственных функций рассмотренной в п. 2 задачи, удовлетворяющая уравнению (2.5), причем λ — соответствующее собственное значение[1], то (3.4) дает

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\alpha\lambda}{2} w - \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \tag{3.6}$$

Если сечение области имеет форму прямоугольника с любым отношением сторон (в частности, полосы постоянной ширины), круга или кругового кольца, сектора и т. п., причем размеры его не меняются со временем, то, поскольку уравнение (3.6) допускает разделение переменных в декартовой и полярной системах координат (последнее, конечно, в плоскости yz), решается в известных функциях и общее уравнение (3.1) для области с сечением подобного вида, когда левая граница области перемещается с постоянной скоростью или с постоянным ускорением.

Для случая, когда сечение меняется со временем, можно получить некоторые классы разрешимых в известных функциях задач, комбинируя преобразование типа (3.2), причем не только для координаты x, но и для других декартовых координат, с ранее данными в работах [2,3] преобра-

---

[1] Например, при $\alpha < 0$, $\mu(\xi)$ — это одна из функций $\psi_n(\xi)$, определяемых формулой (2.18), а λ — соответствующее собственное значение λ_n.

зованиями. Так, вводя в (3.6) вместо y и z новые независимые переменные η и ζ и новую функцию P соотношениями

$$\eta = \frac{y}{R_2}, \qquad \zeta = \frac{z}{R_3}, \qquad R_i = R_i(t) = \sqrt{A_i t^2 + 2B_i t + C_i} \quad (i = 2, 3) \tag{3.7}$$

(A_i, B_i, C_i — произвольные постоянные)

$$P = \frac{w}{Q}, \qquad Q = \frac{1}{\sqrt{R_2 R_3}} \exp\left[-\frac{R_2 R_2' \eta^2 + R_3 R_3' \zeta^2}{4}\right] \tag{3.8}$$

для P получим уравнение

$$\frac{1}{R_2^2}\left[\frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2} + \frac{A_2 C_2 - B_2^2}{4}\eta^2 P\right] + \frac{1}{R_3^2}\left[\frac{\partial^2 P}{\partial \zeta^2} + \frac{A_3 C_3 - B_3^2}{4}\zeta^2 P\right] + \\ + \frac{\alpha\lambda}{2} P - \frac{\partial P}{\partial t} = 0 \tag{3.9}$$

В этом уравнении переменные разделяются, если положить

$$P = \Phi(\eta)\chi(\eta)\theta(t) \tag{3.10}$$

и подчинить функции $\Phi(\eta)$ и $\chi(\zeta)$ условиям

$$\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} + \left[\frac{A_2 C_2 - B_2^2}{4}\eta^2 + \nu_2\right]\varphi = 0 \qquad (\nu_2 = \text{const}) \tag{3.11}$$

$$\frac{d^2\chi}{d\zeta^2} + \left[\frac{A_3 C_3 - B_3^2}{4}\zeta^2 + \nu_3\right]\chi = 0 \qquad (\nu_3 = \text{const}) \tag{3.12}$$

Для $\theta(t)$ получается при этом уравнение

$$\frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{\alpha\lambda}{2} - \frac{\nu_2}{R_2^2} - \frac{\nu_3}{R_3^2}\right)\theta \tag{3.13}$$

Из изложенного следует, что если сечение области представляет собой прямоугольник, стороны которого, перпендикулярные к осям y и z, расширяются или сжимаются со временем по законам вида (3.7) с $i = 2$ и $i = 3$ соответственно, так что граничные значения относительных координат η и ζ не зависят от времени, то находя соответствующие собственные функции уравнений (3.11), (3.12), отвечающие этим граничным значениям η и ζ (постоянным!), сможем по ним разложить решение задачи. Заметим, что решения уравнений (3.11), (3.12) выражаются через вырожденные гипергеометрические функции [1].

Если $R_2(t) = R_3(t)$ (однородное расширение или сжатие), то уравнение (3.11) приобретает более простой вид, а именно:

$$\frac{1}{R_2^2}\left[\frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \zeta^2} + \frac{A_2 C_2 - B_2^2}{4}(\eta^2 + \zeta^2) P\right] + \frac{\alpha\lambda}{2} P - \frac{\partial P}{\partial t} = 0 \tag{3.14}$$

и в такой форме допускает разделение переменных не только в декартовых координатах η, ζ, но и в соответствующих полярных. При этом задача ре-

---

[1] Подробнее об этом см. [2].

шается в известных функциях и для сечений, имеющих форму круга, кругового кольца и др.

Во всех изложенных случаях процесс решения протекает по схеме, аналогичной той, которая детально рассматривалась в работах [2,3], поэтому за подробностями отсылаем к этим статьям.

4. Вопрос о решении граничных задач для уравнения (3.1) рассматривался нами в случае полубесконечной призматической или цилиндрической области (в частности, для полупространства) в предположении, что торец $x = R_1(t)$ перемещается по закону (3.4), тогда как для боковых граней были выбраны движения вида (3.7).

Можно было бы исследовать вполне аналогичным образом и любые другие комбинации движений таких типов в направлении осей x, y, z. Например, можно было бы считать, что движение по оси x происходит по закону

$$x = R_1(t) = \sqrt{A_1 t^2 + 2B_1 t + C_1} \quad (A_1,\ B_1,\ C_1 = \mathrm{const}) \tag{4.1}$$

а по осям y и z — согласно (3.7). Это приводит к частному случаю аналогичной задачи для области, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда с произвольным соотношением длин ребер в начальный момент, грани которого перемещаются по законам (3.7) и (4.1). В этой задаче, общий метод решения которой указан в [3], длина ребра, параллельного оси x, должна быть положена равной бесконечности, что потребует введения собственных функций уравнения вида

$$d^2u \,/\, d\xi^2 + (\lambda - \alpha\xi^2)u = 0 \tag{4.2}$$

на полубесконечном промежутке.

Здесь α — заданная постоянная, λ — произвольный параметр. Если рассмотреть при этом одномерную задачу, считая, что от y и z ничто не зависит, то на этом пути получается решение поставленной в п. 2 исходной задачи для уравнения (1.1) при законе (4.1) перемещения границы полупространства.

В заключение отметим еще, что если ввести в уравнение (3.1) новые независимые переменные

$$\xi = x - R_1(t), \quad \eta = y - R_2(t), \quad \zeta = z - R_3(t) \tag{4.3}$$

и положить

$$\mathbf{R} = \mathbf{i}_x R_1 + \mathbf{i}_y R_2 + \mathbf{i}_z R_3, \quad \rho = \mathbf{i}_x \xi + \mathbf{i}_y \eta + \mathbf{i}_z \zeta \tag{4.4}$$

$$u = qv, \quad q = \exp[-{}^1/_2(\mathbf{R}\rho) + {}^1/_2(R\rho) + {}^1/_2 \textstyle\int R'^2 dt]$$
$$R'^2 = R'^2_1 + R_2'^2 + R_3'^2 \tag{4.5}$$

где $\mathbf{i}_x$, $\mathbf{i}_y$, $\mathbf{i}_z$ — орты по осям координат, то для v получим обобщение уравнения (1.7) на трехмерный случай

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{2}(R_1''\xi + R_2''\eta + R_3''\zeta)\, v - \frac{\partial v}{\partial t} = $$
$$= \frac{f(\xi + R_1,\ \eta + R_2,\ \zeta + R_3, t)}{q} \tag{4.6}$$

Если рассматривается область, имеющая форму прямоугольного параллелепипеда, который совершает переносное движение в пространстве в направлении осей координат в соответствии с формулами (4.3), так что координаты ξ, η, ζ его граней сохраняют не зависящие от времени постоянные значения, и если еще положим

$$R_i(t) = {}^1/_2\alpha_i t^2 + \beta_i t + \gamma_i \qquad (\alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i = \mathrm{const}) \quad (i = 1,2,3) \tag{4.7}$$

То в однородном уравнении, получающемся из (4.6) при $f \equiv 0$, переменные разделяются, причем для собственных функций по каждой из координат ξ, η, ζ получаются опять уравнения вида (2.5), притом для конечного или полубесконечного промежутка в зависимости от того, имеет ли соответствующее ребро параллелепипеда конечную длину или бесконечную.

Выше рассматривались задачи, решение которых выражалось через известные функции, что было возможно, когда функции R, R_i и т. д. имели определенный вид. Если в уравнениях (1.7) или (4.6) эти функции имеют форму, отличную от (3.7) или (4.7), то действуя совершенно так же, как это указано в п. 3 работы [2], можно свести решение соответствующих граничных задач к относительно простым интегральным уравнениям для функции v.

Поступила 3 III 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринберг Г. А. О статье В. А. Шевелькова «Нахождение температурного поля в изотропной среде перед фронтом движущегося источника», напечатанной в Ж. техн. физ. (1946, т. 16, стр. 207) и о правильном решении поставленной в ней задачи. Ж. техн. физ., 1951, т. 21, вып. 3, стр. 382.
2. Гринберг Г. А. О решении задач диффузионного типа для расширяющихся или сжимающихся областей. ПММ, 1969, т. 33, вып. 2.
3. Гринберг Г. А., Косс В. А. Обобщение метода решения некоторых классов диффузионных задач, предложенного в [2], на случай областей, форма которых меняется со временем без соблюдения подобия. ПММ, 1969, т. 33, вып. 4.
4. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1948.
5. Grünberg G. A. A new method of solution of certain boundary problems for equations of mathematical physics permitting of a separation of variables. J. Phys. USSR, 1946, vol. 10, N 4, pp. 301—320.
6. Титчмарш Э. Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, ч. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
7. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. 2. М., Изд-во иностр. лит., 1949.
8. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения, изд. 2. М.—Л., Физматгиз, 1963.