Прикладная математика и механика. Том 33, 1969

# ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯХ К КОНТАКТНЫМ ЗАДАЧАМ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С УЧЕТОМ СИЛ ТРЕНИЯ И СЦЕПЛЕНИЯ

А. С. Соловьев

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается особое интегральное уравнение, которое порождают некоторые смешанные задачи плоской теории упругости, в частности задачи о контакте двух тел при наличии в области контакта трения или полного сцепления. Исследуются общие свойства решения этого уравнения. Применяя регуляризацию решением характеристического уравнения [1], исходное особое уравнение сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Для последнего при условии малости ядра находится резольвента.

Рассматриваются задачи о взаимодействии штампа с упругой изотропной полосой: сдвиг штампа при наличии трения между штампом и полосой и вдавливание штампа в полосу при полном сцеплении в области контакта [1]. Решения этих задач получены в форме рядов по степеням безразмерного малого параметра, характеризующего относительную длину области контакта. Устанавливаются границы равномерной и абсолютной сходимости этих рядов. Приведены примеры.

1. Рассмотрим следующее особое интегральное уравнение:

$$\frac{\theta}{2}\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\,\mathrm{sgn}\,(x-\xi)\,d\xi-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\ln\mu\,|x-\xi|\,d\xi=\vartheta(x,\mu),\quad |x|\leqslant 1 \tag{1.1}$$

где

$$\vartheta(x,\mu)=-\delta f(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\,k(x,\xi,\mu)\,d\xi \tag{1.2}$$

Здесь $\varphi(x)$ — искомая функция, $\delta f(x)$ и $k(x, \xi, \mu)$ — заданные функции. Предположим, что вторая производная функции $k(x, \xi, \mu)$ по переменной $x$ ограничена в прямоугольнике $\{-1\leqslant x\leqslant 1,\ -1\leqslant \xi\leqslant 1\}$ для всех значений параметра $\mu\in[0, \infty)$. Будем также предполагать, что в общем случае функции $\varphi(x)$, $f(x)$, $k(x, \xi, \mu)$ и параметр $\theta$ — комплексные [2].

К интегральному уравнению (1.1) приводятся некоторые плоские смешанные задачи теории упругости, например задачи о контакте двух тел. При этом случай $\theta=0$ соответствует отсутствию в области контакта трения; $\theta=k\Delta$ — наличие в области контакта сил трения: $\theta=i\Delta$ — полное сцепление в области контакта. Здесь $k$ — коэффициент трения, $\Delta=(1-2\nu)/2(1-\nu)$, $\nu$ — коэффициент Пуассона.

[1] Аналогичные задачи о взаимодействии штампа с упругой полуплоскостью рассматривались в ряде работ других авторов (см., например, соответствующие задачи и обзоры к ним в работе [2]).

[2] Не нарушая общности, для сокращения записи формул здесь ограничились случаем (1.2). Однако регулярный интегральный член в правой части уравнения (1.1) может содержать реальную и мнимую части функции $\varphi(x)$, т. е.

$$\nu(x,\mu)=-\delta f(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}[k(x,\xi,\mu)\,\varphi(\xi)+k_1(x,\xi,\mu)\mathrm{Re}\,\varphi(\xi)+k_2(x,\xi,\mu)\,\mathrm{Im}\,\varphi(\xi)]\,d\xi$$

**Случай $\vartheta(x, \mu) \equiv \delta f(x)$ соответствует задаче о вдавливании в упругую полуплоскость абсолютно жесткого штампа при рассмотренных выше условиях контакта.**

**Дифференцируя обе части уравнения (1.1) по $x$, приходим к сингулярному интегральному уравнению с постоянными коэффициентами вида (47.5) работы [1], решение которого дается формулами (47.12) и (47.13) той же работы, и для случая принимает вид**

$$\varphi(x) = (4g)^{-1}(g+1)^2 X(x)\,\psi(x, \mu), \qquad |x| \leqslant 1 \tag{1.3}$$

**где**

$$\psi(x, \mu) = C - \left[\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\vartheta'(\xi, \mu)\,d\xi}{X(\xi)(\xi - x)} - \theta\frac{\vartheta'(x, \mu)}{X(x)}\right] = C + \delta\vartheta_0(x) +$$

$$+\frac{(g+1)^2}{4\pi g}\int_{-1}^{1} X(\xi)\,\psi(\xi, \mu)\left[\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{k_t'(t, \xi, \mu)}{X(t)(t-x)} - \theta\frac{k_x'(x, \xi, \mu)}{X(x)}\right]d\xi$$

$$\vartheta_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f'(\xi)\,d\xi}{X(\xi)(\xi - x)} - \theta\frac{f'(x)}{X(x)}, \qquad g = \frac{1+i\theta}{1-i\theta} \tag{1.4}$$

$$X(x) = (1-x)^{-1/2+\omega}(1+x)^{-1/2-\omega}, \qquad \omega = (2\pi i)^{-1}\lg g \tag{1.5}$$

**$C$ — произвольная постоянная).**

**Здесь удобно привести следующие интегралы, которые понадобятся в дальнейшем. Эти интегралы легко вычисляются приемом, предложенным Н. И. Мусхелишвили [2] (§ 110, гл. VI, замечание 1)**

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{t^n\,dt}{X(t)(t-x)} = \theta\frac{x^n}{X(x)} - \frac{2\sqrt{g}}{g+1}P_{n+1}(x) \tag{1.6}$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\gamma_{n-k}x^k, \qquad P_{-n-1}(x) \equiv 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$\gamma_n = \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j\prod_{p=0}^{j-1}\prod_{q=0}^{n-j-1}\left(\frac{1}{2} - \omega - p\right)\left(\frac{1}{2} + \omega - q\right)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{t^{n+1}X(t)\,dt}{t-x} = -\theta x^{n+1}X(x) + \frac{2\sqrt{g}}{g+1}S_n(x)$$

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\delta_{n-k}x^k, \qquad S_{-n-1}(x) \equiv 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.7}$$

$$\delta_n = \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}C_n^j\prod_{p=0}^{n-j}\prod_{q=0}^{n-j-1}\left(\frac{1}{2} - \omega + p\right)\left(\frac{1}{2} + \omega + q\right)$$

**В случае, когда верхний предел в произведении равен (—1), произведение берется равным (+1).**

**Используя формулу (1.6) при $n = 0$, выражение (1.4) можно записать в виде**

$$\psi(x, \mu) = C + 2\sqrt{g}(g+1)^{-1}P_1(x)\,\vartheta'(x, \mu) - J(x, \mu) \tag{1.8}$$

$$J(x, \mu) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{F(x, \xi, \mu)\,d\xi}{X(\xi)}, \qquad F(x, \xi, \mu) = \frac{\vartheta'(\xi, \mu) - \vartheta'(x, \mu)}{\xi - x} \tag{1.9}$$

Ниже приведена теорема, устанавливающая некоторые общие свойства решения интегрального уравнения (1.1) в зависимости от свойств правой части.

*Теорема* 1.1. Если функция $\vartheta(x, \mu) \in H_n^\lambda(-1,1)$ при любом фиксированном значении параметра $\mu \in [0, \infty)$, то функция $\psi(x, \mu) \in C^{(n-1)}(-1,1)$ для всех $\mu[0, \infty]$ [1].

Зафиксируем в формулах (1.8) и (1.9) произвольные значения параметра $\mu$ и при доказательстве теоремы его будем опускать.

Очевидно, что утверждение будет доказано, если показать, что $J(x) \in C^{n-1}(-1, 1)$.

Дифференцируя интеграл (1.9) по $x$ $(n-1)$ раз и используя формулу (7.4) работы [3], получим

$$J^{(n-1)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{N(\xi, x)\, d\xi}{X(\xi) \mid \xi - x \mid^\sigma} \tag{1.10}$$

где функция $N(\xi, x)$ удовлетворяет условию Гельдера по обеим переменным, а $\sigma$ — произвольное число, заключенное в промежутке $1 - \lambda < \sigma < 1$.

Учитывая, что подынтегральная функция $X^{-1}(\xi)\, N(\xi, x)$ ограничена по обеим переменным, нетрудно установить равномерную сходимость интеграла (1.10). Следовательно, $J^{(n-1)}(x) \in C(-1,1)$, что и доказывает теорему.

Обратимся теперь к интегральному уравнению (1.1).

Пусть $f(x) \in H_1^\lambda(-1,1)$. В силу сделанных ранее предположений относительно функции $k(x, \xi, \mu)$ на основании теоремы 1 получим, что функция $\psi(x, \mu) \in C(-1,1)$ и оператор

$$Lf \equiv \frac{(g+1)^2}{4\pi g} \int_{-1}^{1} X(\xi) f(\xi) \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{k_t'(t, \xi, \mu)\, dt}{X(t)(t-x)} - \theta\, \frac{k_x'(x, \xi, \mu)}{X(x)} \right] d\xi \tag{1.11}$$

в выражении (1.4) действует в $C(-1,1)$. При этом, особое уравнение (1.1) приводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода (1.4) относительно новой неизвестной функции $\psi(x, \mu)$. На основании теоремы 5 (§ 5, гл. IV) работы [4] получим, что в случае, когда $\|L\| < 1$, решение уравнения (1.4) принимает вид [2].

$$\psi = \sum_{k=0}^{\infty} L^k \psi_0, \qquad \psi_0(x) = C + \delta\vartheta_0(x) \tag{1.12}$$

и ряд (1.12) равномерно и абсолютно сходится при всех значениях параметра $\mu$, удовлетворяющих неравенству

$$\begin{gathered} \|L\| \leqslant |1 + 2\omega| \{ \max |k_x'(x, \xi, \mu)| + (x, \xi \in [-1,1]) + \\ + {}^1/_2 |1 - 2\omega| \max |k_{xx}''(x, \xi, \mu)| \} < 1 \end{gathered} \tag{1.13}$$

---

[1] Здесь $H_n^\lambda(-1,1)$ означает класс функций, $n$-я производная которых на отрезке $x \in [-1,1]$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\lambda$, а $C^{(n)}(-1,1)$ — класс функций, имеющих на этом отрезке непрерывную $n$-ю производную.

[2] Оператор $L^k$ означает последовательное применение оператора $L$ (1.11). Например, $L(L\psi_0) = L^2\psi_0$.

Рассмотрим некоторые задачи о взаимодействии штампа и упругой изотропной полосы шириной $h$ при реализации случая плоской деформации (переход к случаю плоского напряженного состояния осуществляется по известным формулам).

Пусть $2a$ — длина области контакта. Введем безразмерные координаты $(x', y')$ по формулам $x = ax'$, $y = hy'$ так, чтобы полоса занимала область $\{-\infty < x' < \infty, -1 \leqslant y' \leqslant 0\}$ и начало системы координат совпало с центром области контакта: $-1 \leqslant x' \leqslant 1$ ($2\mu = 2a / h$ — относительная длина области контакта). Ниже будем рассматривать задачи в безразмерных координатах $(x', y')$, опуская штрихи.

**2.** Рассмотрим задачу о равновесии штампа на границе полосы при наличии трения в области контакта. Предположим, что под штампом $\tau(x) = -kq(x)$, где $q(x)$ и $\tau(x)$ означают соответственно функции распределения нормальных и касательных усилий, развивающихся под штампом ($k$ — коэффициент трения, предполагаемый постоянным), вне штампа отсутствует пригрузка, а противоположная граница полосы покоится на недеформируемом основании при условии: а) отсутствия трения между основанием и полосой; б) полного сцепления граничных точек.

Методами операционного исчисления, используя преобразование Фурье, задачи а) и б) приводятся к определению неизвестной функции распределения нормальных усилий $q(x)$ в области контакта из следующего интегрального уравнения:

$$\int_{-1}^{1} q(\xi) K[\mu(x-\xi)]\, d\xi = -\delta f(x), \quad |x| \leqslant 1 \tag{2.1}$$

где

$$K(\mu t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [L_1(u) \cos \mu t u + k\Delta L_2(u) \sin \mu t u] \frac{du}{u} \tag{2.2}$$

$$\text{(а)} \quad L_1(u) = \frac{\operatorname{sh}^2 u}{\operatorname{ch} u \operatorname{sh} u + u}, \quad L_2(u) = \frac{\operatorname{ch} u \operatorname{sh} u - (1-2\nu)^{-1} u}{\operatorname{ch} u \operatorname{sh} u + u}$$

$$\text{(б)} \quad L_1(u) = \frac{\varkappa \operatorname{ch} u \operatorname{sh} u - u}{\varkappa \operatorname{ch}^2 u + u^2 + (1-2\nu)^2}, \quad L_2(u) = \frac{\varkappa \operatorname{sh}^2 u - (1-2\nu)^{-1} u^2}{\varkappa \operatorname{ch}^2 u + u^2 + (1-2\nu)^2} \tag{2.3}$$

$$\Delta = (1-2\nu) / 2(1-\nu), \quad \varkappa = 3-4\nu, \quad \delta = E / 2(1-\nu^2)$$

Здесь $f(x)$ — функция осадки точек границы полосы под штампом, $E$ — модуль Юнга, $\nu$ — коэффициент Пуассона.

Выделим из ядра $K(t)$ интегрального уравнения (2.1) характеристическую часть. Получим

$$K(\mu t) = 2^{-1} k\Delta \operatorname{sgn} t - \pi^{-1}[\ln \mu |t| - k(\mu t)] \quad (t = x - \xi) \tag{2.4}$$

Функция

$$k(\sigma) = \int_0^\infty \{[L_1(u) - 1] \cos \sigma u + e^{-u} + k\Delta [L_2(u) - 1] \sin \sigma u\} \frac{du}{u} \tag{2.5}$$

непрерывна вместе со всеми производными по $\sigma$ на отрезке $\sigma \in [-2\mu, 2\mu]$ при любом фиксированном значении параметра $\mu \in [0, \infty)$.

Подставляя выражения (2.4) в уравнение (2.1), придем к интегральному уравнению вида (1.1), где $\theta = k\Delta$ и $k(x, \xi, \mu) = k[\mu(x-\xi)]$. Регуляризация последнего решением характеристического уравнения приводит к уравнению Фредгольма (1.4). Из (1.3) — (1.5) следует, что решение уравнения (2.1) можно представить в виде

$$q(x) = [1 + (k\Delta)^2]^{-1} X(x) \psi(x, \mu), \quad \psi(x, \mu) = \psi_0(x) + \psi^1(x, \mu)$$
$$X(x) = (1-x)^{-1/2+\alpha} (1+x)^{-1/2-\alpha}, \quad \alpha = \pi^{-1} \operatorname{arctg} k\Delta \tag{2.6}$$

где $\psi_0(x)$ — решение соответствующей задачи для полуплоскости, а слагаемое $\psi^1(x, \mu)$ обусловлено наличием противоположной от штампа границы полосы. Из (1.4) также следует, что чем меньше параметр $\mu$ (чем шире полоса), тем меньше вклад этого слагаемого. Из свойств функции (2.5) на основании теоремы 1.1 находим, что $\psi^1(x, \mu) \in C^{(\infty)}(-1, 1)$ при всех $\mu \in [0, \infty)$. Формула (1.12) дает асимптотическое представление функции $\psi(x, \mu)$ при малых значениях параметра $\mu$. При этом из (1.13) находим, что ряд (1.12) сходится равномерно и абсолютно для

$$\mu < \mu_0, \quad \mu_0 = \frac{-\max|k'(\sigma)| + R(\sigma; \alpha)}{(1-2\alpha)\max|k''(\sigma)|} \qquad (-\infty < \sigma < +\infty) \tag{2.7}$$

$$R(\sigma; \alpha) = [(\max|k'(\sigma)|)^2 + 2(1-2\alpha)(1+2\alpha)^{-1}\max|k''(\sigma)|]^{1/2}$$

Для вычисления квадратур в выражении (1.12) разложим функцию $k(\sigma)$ в ряд Маклорена. Получим

$$k(\sigma) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s \sigma^s = \sum_{s=0}^{\infty} a_s \mu^s y^s \qquad (-2 \leqslant y = x - \xi \leqslant 2) \tag{2.8}$$

$$a_0 = \int_0^{\infty} [L_1(u) - 1 + e^{-u}]\, du, \qquad a_{2m-1} = k\Delta \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!} \int_0^{\infty} [L_2(u) - 1]\, u^{2m-2}\, du$$

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{(2m)!} \int_0^{\infty} [L_1(u) - 1]\, u^{2m-1}\, du \qquad (m = 1, 2, \ldots) \tag{2.9}$$

Ряд (2.8) сходится равномерно и абсолютно для всех $\mu < 1$.

Подставляя теперь (2.8) в выражение (1.12), вычисляя квадратуры по формулам (1.6) и (1.7) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях параметра $\mu$, получим, что решение интегрального уравнения (2.1) при малых значениях параметра $\mu$ имеет вид (2.6), где

$$\psi(x, \mu) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j \psi_j(x), \qquad \psi_0(x) = C + \delta\vartheta_0(x) \tag{2.10}$$

$$\psi_j(x) = \sum_{s=1}^{j} s a_s \sum_{r=1}^{s} (-1)^r C_{s-1}^{r-1} \gamma_{r-1, j-s} P_{s-r+1}(x) \qquad (j \geqslant 1) \tag{2.11}$$

Коэффициенты $\gamma_{n,j}$ определяются из рекуррентного соотношения

$$\gamma_{r,j} = \sum_{s=1}^{j} s a_s \sum_{l=1}^{s} (-1)^l C_{s-1}^{l-1} \gamma_{l-1, j-s} d_{r, s-l+1}, \quad d_{r,s} = \sum_{p=0}^{s} \gamma_{s-p} \delta_{r+p} \tag{2.12}$$

$$\gamma_{r,0} = C\delta_r + \delta \frac{g+1}{2\pi\sqrt{g}} \int_{-1}^{1} \xi^r X(\xi) \left[\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f'(t)\,dt}{X(t)(t-\xi)} - \theta \frac{f'(\xi)}{X(\xi)}\right] d\xi$$

При этом ряд (2.10) будет равномерно и абсолютно сходиться для всех $\mu < \mu_1 = \inf\{1, \mu_0\}$.

Постоянная $C$ определяется заданием силы $Q$, вдавливающей штамп, из уравнения

$$Q = \int_{-1}^{1} q(x)\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{1 + (k\Delta)^2}} \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j \gamma_{0,j} \tag{2.13}$$

В случае $f(x) \equiv -A_n x^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ для $\gamma_{n,0}$ в формулах (2.11) будем иметь

$$\gamma_{r,0} = C\delta_r + \delta n A_n \sqrt{1 + (k\Delta)^2} \sum_{p=0}^{n} \gamma_{n-p} \delta_{r+p}$$

$$\psi_0(x) = C + \delta n A_n \sqrt{1 + (k\Delta)^2}\, P_n(x) \tag{2.14}$$

При $k = 0$ (тогда $\alpha = 0$) получаем решение для идеального случая, когда трение отсутствует [5].

3. Рассмотрим задачу о вдавливании штампа в упругую полосу при полном сцеплении граничных точек полосы в области контакта с основанием штампа. Предположим также, что пригрузка вне штампа отсутствует, а противоположная граница полосы находится в условиях (а) или (б) п. 2.

Как и выше, эти задачи методами операционного исчисления приводятся к определению нормальных $q(x)$ и касательных $\tau(x)$ усилий, развивающихся под штампом из особого интегрального уравнения

$$\int_{-1}^{1} \varphi(\xi) K[\mu(x-\xi)]\,d\xi + \frac{i}{\pi}\int_{-1}^{1} \operatorname{Im}\varphi(\xi) k_1[\mu(x-\xi)]\,d\xi = -\delta f(x) \quad (3.1)$$

$$\varphi(x) = q(x) + i\tau(x), \qquad |x| \leqslant 1$$

$$k_1(\sigma) = \int_0^\infty L_3(u)\cos\sigma u\,du$$

$$\text{(а)} \quad L_3(u) = -(\operatorname{ch} u \operatorname{sh} u + u)^{-1} \quad (3.2)$$

$$\text{(б)} \quad L_3(u) = 2[\varkappa \operatorname{ch}^2 u + u^2 + (1-2\nu)^2]^{-1}$$

Здесь функция $K(\mu, t)$ $(t = x - \xi)$ имеет вид (2.2), (2.3); при этом в формуле (2.2) постоянная $k = i$—мнимой единице; остальные обозначения сохраняют тот же смысл, что и в предыдущем случае.

Выделяя в интегральном уравнении (3.1) характеристическую часть, придем к уравнению вида (1.1), в котором $\theta = i\Delta$ и

$$\vartheta(x, \mu) = -\delta f(x) - \quad (3.3)$$

$$-\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-1}^{1} \varphi(\xi) k[\mu(x-\xi)]\,d\xi + i\int_{-1}^{1} \operatorname{Im}\varphi(\xi) k_1[\mu(x-\xi)]\,d\xi\right\}$$

Здесь $k(\sigma)$ $[\sigma = \mu(x-\xi)]$ в первом интеграле совпадает с (2.5), где следует положить $k = i$.

После регуляризации этого уравнения находим, что решение его имеет вид

$$\varphi(x) = (4\varkappa)^{-1}(\varkappa+1)^2 X(x)\psi(x, \mu) \quad (3.4)$$

$$X(x) = (1-x)^{-1/2+i\beta}(1+x)^{-1/2-i\beta}, \quad \beta = (2\pi)^{-1}\ln\varkappa$$

Аналогично предыдущему можно показать, что функция $\psi(x, \mu) = \psi_0(x) + \psi^1(x, \mu)$, где $\psi_0(x)$ решение соответствующей задачи для полуплоскости, а $\psi^1(x, \mu) \in C^\infty(-1, 1)$ для любого фиксированного $\mu \in [0, \infty)$ и при $\mu \to 0$ равномерно по $x$ стремится к нулю. При малых значениях параметра $\mu$ функция $\psi(x, \mu)$ имеет вид (1.12), где

$$Lf \equiv \mu\frac{(\varkappa+1)^2}{4\pi\varkappa}\left\{\int_{-1}^{1} X(\xi) f(\xi)\left[\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{k'_1[\mu(t-\xi)]\,dt}{X(t)(t-x)} - i\Delta\frac{k'[\mu(x-\xi)]}{X(x)}\right]d\xi + \right.$$

$$\left. + i\int_{-1}^{1} X(\xi)\operatorname{Im} f(\xi)\left[\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{k'[\mu(t-\xi)]dt}{X(t)(t-x)} - i\Delta\frac{k_1'[\mu(t-\xi)]}{X(x)}\right]d\xi\right\} \quad (3.5)$$

причем из (1.13) находим, что ряд (1.12) равномерно и абсолютно сходится для

$$\mu < \mu_0, \qquad \mu_0 = \frac{-\max|\omega(\sigma)| + \Omega(\sigma)}{\sqrt{1+4\beta^2}\max|\omega'(\sigma)|}$$

$$\Omega(\sigma) = [(\max|\omega(\sigma)|)^2 + 2\max|\omega'(\sigma)|]^{1/2}, \tag{3.6}$$

$$\omega(\sigma) = k'(\sigma) + k_1'(\sigma)$$

Разложим теперь в операторе $L$ функции $k(\sigma)$ и $k_1(\sigma)$ в ряды Маклорена и в выражении для $\psi(x, \mu)$ соберем коэффициенты при одинаковых степенях параметра $\mu$. Получим, что $\psi(x, \mu)$ имеет вид (2.10), а коэффициенты $\psi_j(x)$ определяются соотношениями

$$\psi_0(x) = C + \delta\vartheta_0(x)$$

$$\psi_j(x) = \sum_{s=1}^{j}\sum_{r=1}^{s}(-1)^r C_{s-1}^{r-1} s\,[a_s\gamma_{r-1,\,j-s} + ib_s \operatorname{Im}\gamma_{r-1,\,j-s}]\,P_{s-r+1}(x) \tag{3.7}$$

$$\gamma_{r,j} = \sum_{s=1}^{j}\sum_{l=1}^{s}(-1)^l C_{s-1}^{l-1} s\,[a_s\gamma_{l-1,\,j-s} + ib_s \operatorname{Im}\gamma_{l-1,\,j-s}]\,d_{r,s-l+1}$$

$$d_{r,s} = \sum_{p=0}^{s}\gamma_{s-p}\delta_{r+p} \qquad \left(C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\right)$$

Здесь начальные данные $\gamma_{r,0}$ ($r = 0, 1, 2,\ldots$) совпадают с (2.11), коэффициенты $a_s$ даются соотношениями (2.9), где следует постоянную $k$ заменить мнимой единицей $i$, а постоянные $b_s$ имеют вид

$$b_s = 0 \quad (s = 2m+1)$$

$$b_s = \frac{(-1)^m}{(2m)!}\int_0^\infty L_3(u)\,u^{2m}du \quad (s = 2m)$$

$$(m = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3.8}$$

При этом ряд (2.10) сходится равномерно и абсолютно для всех $\mu < \mu_1 = \inf\{\mu_0, 1\}$, где $\mu_0$ находится по формуле (3.6). Постоянную $C$ определим заданием усилий вдавливающих штамп в полосу, используя одно из условий

$$Q + iT = \int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\,d\xi = \pi\frac{\varkappa+1}{2\sqrt{\varkappa}}\sum_{j=0}^{\infty}\mu^j\gamma_{0,j}$$

$$M = -\operatorname{Re}\int_{-1}^{1}\xi\varphi(\xi)\,d\xi = -\pi\frac{\varkappa+1}{2\sqrt{\varkappa}}\sum_{j=0}^{\infty}\mu^j\operatorname{Re}\gamma_{1,j} \tag{3.9}$$

Здесь $Q$ — вдавливающая, $T$ — сдвигающая силы, $M$ — момент, действующий на штамп.

В случае, если $f(x) \equiv -A_n x^n$ ($n = 0, 1, 2,\ldots$), то

$$\psi_0(x) = C + 2\delta n A_n\sqrt{\varkappa}(\varkappa+1)^{-1}P_n(x) \tag{3.10}$$

$$\gamma_{r,0} = C\delta_r + 2\delta n A_n\sqrt{\varkappa}(\varkappa+1)^{-1}\sum_{k=0}^{n}\gamma_{n-k}\delta_{r+k} \quad (r = 0, 1, 2,\ldots)$$

Пусть штамп с прямолинейным основанием, расположенный на границе упругой полосы, получает под действием силы $Q$ лишь вертикальное перемещение. В этом случае $f(x) \equiv \text{const}$ $(n = 0)$ и, ограничиваясь в формулах (3.7), (3.10) членами до порядка $\mu^2$, будем иметь

$$\varphi(x) = (2\pi\sqrt{\varkappa})^{-1} Q X(x)\,[1 + \mu a_1^{\circ}(2\beta - ix) + O(\mu^2)] \tag{3.11}$$

Здесь

$$a_1^{\circ} = -ia_1 = \Delta \int_0^{\infty} [L_2(u) - 1]\,du \tag{3.12}$$

Отделяя вещественную и мнимую части, найдем функции распределения нормальных и касательных напряжений под штампом

$$q(x) = \frac{Q}{2\pi\sqrt{1-x^2}}\,\frac{\varkappa+1}{\sqrt{\varkappa}}\,\{\cos\lambda(x) + \\ + \mu a_1^{\circ}[2\beta\cos\lambda(x) + x\sin\lambda(x)] + O(\mu^2)\} \tag{3.13}$$

$$\tau(x) = \frac{Q}{2\pi\sqrt{1-x^2}}\,\frac{x+1}{\sqrt{\varkappa}}\,\{\sin\lambda(x) + \mu a_1^{\circ}[2\beta\sin\lambda(x) - x\cos\lambda x] + O(\mu^2)\}$$

$$\lambda(x) = \beta\,\ln\,[(1 + x)\,(1 - x)^{-1}] \tag{3.14}$$

При $\mu \to 0$ формулы (3.13) совпадают с формулами (7) и (8) § 114, *а* работы Н. И. Мусхелишвили [2] (если в последних учесть упущенный множитель $^1/_2$).

Из формул (3.15) следует, что при подходе к границам контакта $x = \pm 1$ функции $q(x)$ и $\tau(x)$ меняют знак, при этом распределение точек перемены знака зависит от коэффициента Пуассона $\nu$ и относительной ширины области контакта $\mu$. Подобное явление отмечено также для соответствующих осесимметричных задач [6].

Рассмотрим, наконец, случай наклонного штампа с прямолинейным основанием, который внедряется так, что главный вектор внешних сил, действующих на штамп, равен нулю, а основание штампа составляет с осью $Ox$ угол $\varepsilon$, отсчитываемый от $Ox$ в отрицательном направлении. В этом случае $f(x) = -\varepsilon x$, $Q + iT = 0$ и, ограничиваясь членами до порядка $\mu^3$, из формул (3.9), (3.10) и (3.4) находим

$$\varphi(x) = 2\pi G\varepsilon\varkappa^{-1/2}\,[1 + \mu^2 a_2(1 + 4\beta^2) + O(\mu^3)]X(x)\,P_1(x) \tag{3.15}$$

$$M = -2\pi G\varepsilon(1 + \varkappa)^{-1}(1 + 4\beta^2)[1 + \mu^2 a_2(1 + 4\beta^2) + O(\mu^3)] \tag{3.16}$$

После разделения мнимой и вещественной частей в выражении (3.15) получим закон распределения нормальных и касательных усилий под штампом

$$q(x) = 2\,G\varepsilon\varkappa^{-1/2}\,[1 + \mu^2 a_2(1 + 4\beta^2) + O(\mu^3)](1 - x^2)^{-1/2}\,[x\cos\lambda(x) - \\ - 2\beta\,\sin\,\lambda(x)] \tag{3.17}$$

$$\tau(x) = 2\,G\,\varepsilon\varkappa^{-1/2}[1 + \mu^2 a_2(1 + 4\beta^2) + O(\mu^3)]\,(1 - x^2)^{-1/2}\,[x\sin\lambda(x) + \\ + 2\beta\cos\lambda(x)]$$

Формула (3.16) дает зависимость между моментом $M$, действующим на штамп, и углом поворота $\varepsilon$.

Выделим следующий факт, легко усматриваемый из соотношений (3.7) и (3.9): если на штамп при любой форме основания действует нагрузка, главный вектор сил которой равен нулю, то из указанных соотношений получим, что $\gamma_{0,j} = 0$ и $\psi_1(x) \equiv 0$. Это означает, что уточнение к решению соответствующей задачи для полуплоскости имеет порядок $\mu^2$.

Отметим, что приближенное решение интегральных уранений (2.1) (3.1) для больших значений параметра $\mu$ можно получить, опираясь на результаты работы [7]. При этом, учитывая поведение решения на концах отрезка $x \in [-1,1]$, подынтегральную функцию

$$u^{-1}L(u) = u^{-1}[L_1(u) + c\Delta L_2(u)]$$

($c = -ik$ — в случае (2.1) и $c = 1$ — в случае (3.1)).

в ядре этих уравнений следует аппроксимировать выражением

$$(A + Bu)^{1/2-\omega}(C + Du)^{1/2+\omega} Q(u) P^{-1}(u) \tag{3.18}$$

в котором коэффициенты $A$, $B$ и $C$, $D$ и целые функции $Q(u)$ и $P(u)$ подбираются из условий лучшей аппроксимации. Такое построение обеспечит элементарную факторизацию указанной выше функции и нужные особенности решения на концах $x = \pm 1$. Это решение, а также численный анализ сопряжения обоих решений для больших и малых значений параметра $\mu$ автор предполагает дать в следующей работе.

Автор благодарит В. М. Александрова и В. А. Бабешко за ценные советы и помощь.

Поступила 12 III 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Изд. 2. М., Физматгиз, 1963.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 5. М., «Наука», 1966.
3. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Изд. 2. М., Физматгиз, 1962.
4. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функции и функционального анализа. Изд. 2. М., «Наука», 1968.
5. Александров В. М. О приближенном решении одного типа интегральных уравнений. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
6. Кызыма Я. М. Контактные напряжения в случае сцепления кругового штампа с упругим слоем. Инж. ж., 1964, т. 4. вып. 2.
7. Александров В. М. К решению некоторых контактных задач теории упругости. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.