Прикладная математика и механика. Том 33, 1969

ОБ ОДНОМ ТИПЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В. А. Бабешко

(Ростов-на-Дону)

Предложен метод исследования интегрального уравнения для случая, когда его ядро — мероморфная функция с простыми полюсами и двукратными нулями. Интегральное уравнение приводится к нормально разрешимой бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, решение которой строится вместе с решением некоторой конечной системы; установлены общие достаточные условия на правую часть уравнения, обеспечивающие однозначную разрешимость в определенном классе.

Смешанная задача теории упругости об определении напряжений, возникающих под штампом, вдавливаемым в полосу, которая лежит без трения на жестком основании [1], а также задача о напряжениях под бандажированным колесом, насаженным на упругий вал [2] приводят к интегральному уравнению вида

$$\mathrm{K}q \equiv \int_{-a}^{a} k(x-\xi)\, q(\xi)\, d\xi = \pi\varphi(x), \qquad |x| \leqslant a \tag{0.1}$$

Ядро $k(t)$ интегрального уравнения для обоих из указанных задач представимо соответственно в форме

$$k(t) = \int_0^\infty K(u)\cos ut\,du, \qquad K(u) = \frac{2\,\mathrm{sh}^2 u}{u(\mathrm{sh}\,2u + 2u)} \tag{0.2}$$

$$K(u) = \frac{I_1^2(u)}{u^2[I_0^2(u) - I_1^2(u)] - 2(1-\sigma)I_1^2(u)} \qquad (0 < \sigma < 0.5)$$

Здесь $I_0(z)$, $I_1(z)$ — модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядка.

Уравнению (0.1) посвящены работы [1-4] и др. Установлено [4], если $K(u)$ — рациональная функция, то для (0.1), вообще говоря, можно построить решение в конечной форме. В [5] предложен способ построения асимптотического решения уравнения (0.1) при $a \to \infty$ в предположении, что $K(u)$ — мероморфная функция с простыми нулями и полюсами. Указанный метод не позволяет исследовать уравнение (0.1), если нули функции $K(u)$ — кратные.

1. Будем считать, что $K(z)$ — четная, мероморфная в комплексной плоскости функция, действительная на действительной оси, имеет двукратные нули и простые полюса, не лежащие на действительной оси и имеющие в верхней полуплоскости асимптотическое представление

$$z_n = i(\beta n + b) \pm c_1 \ln n + O(n^{-1}\ln n) \qquad (|z_n| \leqslant |z_{n+1}|) \tag{1.1}$$
$$\zeta_n = i(\beta n + g) \pm c_2 \ln n + O(n^{-1}\ln n) \qquad (|\zeta_n| \leqslant |\zeta_{n+1}|) \quad (n \to \infty)$$

Входящие в (1.1) постоянные — действительные числа.

Предполагается также, что $K(z)$ обладает асимптотическим свойством

$$K(z) = c^2 z^{-1}[1 + \alpha z^{-1} + O(z^{-2})], \quad |z| \to \infty, \quad |\arg z \pm \pi/2| > \varepsilon > 0 \quad (1.2)$$

Рассмотрим функции вида

$$K_+(z) = \sqrt{A} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{2n} \left(1 + \frac{z}{z_k}\right)\left(1 + \frac{z}{\zeta_k}\right)^{-1}, \quad K_-(z) = K_+(-z), \quad A = K(0) \quad (1.3)$$

В произведении (1.3) каждый нуль имеет вторую кратность. Легко видеть, что

$$K_+(z) K_-(z) = K(z) \quad (1.4)$$

Лемма 1.1. Справедливы асимптотические оценки

$$K_\pm(z) = c z^{-0.5}[1 + o(1)], \quad |z| \to \infty, \quad |\arg z \pm \pi/2| > \varepsilon > 0$$

При больших $|z|$ функция $K_+(z)$ аппроксимируется некоторой рациональной комбинацией, состоящей из гамма-функций Эйлера, затем из (1.2) следует утверждение леммы.

Последнее условие, которому подчиним функцию $K(z)$, заключается в выполнении для выражений

$$H_+(-z_k) = \lim_{z\to -z_k} \frac{K_+(z)}{(z+z_k)^2}, \qquad H_+'(-z_k) = \lim_{z\to -z_k} \frac{d}{dz}\left\{\frac{K_+(z)}{(z+z_k)^2}\right\} \quad (1.5)$$

соотношений вида

$$H_+(-z_k) = c k^{-1-\gamma_1}[1 + o(1)], \quad [H_+^{-1}(-z_k)]' = c k^{\gamma_2}[1 + o(1)] \quad (k \to \infty)$$
$$0 < \gamma_1, \gamma_2 \leqslant 0.5 \quad (1.6)$$

В дальнейшем понадобятся некоторые сведения из теории интегральных уравнений первого рода на полуоси вида

$$\int_0^\infty k(x-\xi)\alpha(\xi)\, d\xi = \pi f(x) \quad (0 \leqslant x < \infty) \quad (1.7)$$

Если ядро $k(t)$ удовлетворяет перечисленным выше условиям, то на основании результатов работ [6,7] доказывается

Теорема 1.1. Уравнение (1.7) однозначно разрешимо в классе функций $\alpha(x)$ таких, что

$$\alpha(x) x^{0,5} \exp(-\mu x) \in C_0^{\circ}(0, \infty), \quad 0 < \mu < \inf(\operatorname{Im} \zeta_1, \operatorname{Im} z_1) \quad (1.8)$$

при любой правой части $f(x)$, обладающей свойством

$$f'(x) x^{\varepsilon} \exp(-\mu x) \in C_0^{\lambda}(0, \infty) \quad (0.5 < \lambda - \varepsilon < 1) \quad (1.9)$$

Здесь $C_k^{\lambda}(a, b)$ — множество функций, производная порядка k, от которых на $[a, b]$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем λ.

Для доказательства теоремы строятся нормализаторы [7] уравнения (1.7) в пространстве функций $\varphi(x)$ таких, что $x^\lambda\varphi'(x) \in C_0^\lambda(0, \infty)$; при этом предварительно устанавливается, что описанных ранее свойств ядра достаточно, чтобы считать указанное пространство пространством М. Г. Крейна, в котором нормально разрешимо некоторое интегральное уравнение второго рода на полуоси [6,7].

2. Приводим основной результат настоящей работы.

Теорема 2.1. Уравнение (0.1) однозначно резрешимо в $L_p(-a, a)$ $(p > 1)$ при любой правой части $f(x) \in C_1^\lambda(-a, a)$, $\lambda > 0.5$ и его решение можно представить в форме

$$q(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(\eta)}{K(\eta)} e^{i\eta x} d\eta + \sum_{l=1}^{\infty} \{[A_l^+ + (a+x) B_l^+] \exp iz_l (a+x) +$$

$$+ [A_l^- + (a-x) B_l^-] \exp iz_l (a-x)]\}, \qquad \varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\eta) e^{i\eta x} d\eta \quad (2.1)$$

При этом коэффициенты $A_l^{\pm}$, $B_l^{\pm}$ определяются точно вместе с решением некоторой конечной системы алгебраических уравнений; кроме того, $q(x)$ обладает свойством

$$q(x)(a^2 - x^2)^{0.5} \in C_0^\circ(-a, a) \tag{2.2}$$

Доказательству этой теоремы предпошлем ряд лемм и теорем.

В дальнейшем через $c(\sigma)$ будем обозначать пространство комплексных последовательностей $\{x_l\} = X$ со свойством

$$\sup_l |l^\sigma x_l| < \infty, \qquad \lim_{l\to\infty} l^\sigma x_l = 0 \tag{2.3}$$

(σ — произвольное вещественное число).

Очевидно, $c(\sigma)$ — банахово пространство, если норму в нем ввести соотношением

$$\| X \|_{c(\sigma)} = \sup_l |l^\sigma x_l| \tag{2.4}$$

Кроме того, через $H(-a, a)$ будем обозначать пространство функций $q(x)$ с нормой

$$\| q(x) \|_H = \Big(\int_{-\infty}^{\infty} K(u) |Q(u)|^2 du \Big)^{1/2} < \infty, \qquad Q(u) = \int_{-a}^{a} q(x) e^{iux} dx \quad (2.5)$$

Отметим, что имеет место включение

$$L_p(-a, a) \subset H(-a, a), \qquad 1 < p \leqslant 2 \tag{2.6}$$

Нетрудно проверить, что K — положительно-определенный в $H(-a, a)$ оператор. Это обстоятельство позволяет при помощи известных методов [8] доказать следующее предложение.

Лемма 2.1. Для однозначной разрешимости уравнения (1.1) в $H(-a,a)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(u) K_+^{-1}(u)|^2 du < \infty \tag{2.7}$$

Можно показать, что (2.7) имеет место, если

$$\varphi' x (a^2 - x^2)^{\mu} \in C_0^{\lambda} (-a,a), \qquad 0 \leqslant \mu < \lambda < 1 \tag{2.8}$$

Лемма 2.2. Ряды в (2.1) как функции от x принадлежат

$$L_p (-a,\ a),\ 1 < p < (1 - \sigma)^{-1}, \qquad 0 < \sigma < 1 \tag{2.9}$$

если только имеют место свойства

$$\{A_l^{\pm}\} \in c(\sigma), \qquad \{B_l^{\pm}\} \in c(\sigma - 1), \qquad 0 < \sigma < 1 \tag{2.10}$$

Лемма легко доказывается применением к бесконечным рядам (2.1) неравенства Минковского.

Будем искать решение $q(x)$ уравнения (0.1) из $L_p(-a,\ a)$ $1 < p \leqslant 2$ в форме ряда (2.1), коэффициенты которого обладают свойством (2.10).

Теорема 2.1. Для $\varphi(x) \in C_1^{\lambda}$ $(-a,\ a)$ $(\lambda > 0.5)$ уравнение (0.1) эквивалентно бесконечной системе линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{\zeta_r - z_l} \pm \frac{\exp 2aiz_l}{\zeta_r + z_l} \right) x_l^{\pm} + \right. \tag{2.11}$$

$$\left. + \left[\frac{1}{(\zeta_r - z_l)^2} \pm \left(\frac{1}{\zeta_r + z_l} + 2a \right) \frac{\exp 2aiz_l}{\zeta_r + z_l} \right] y_l^{\pm} \right\} = d_r^{\pm}$$

$$\begin{aligned} x_l^{\pm} &= A_l^{+} \pm A_l^{-}, \\ y_l^{\pm} &= B_l^{+} \pm B_l^{-}, \end{aligned} \qquad d_r^{\pm} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(\eta)}{K(\eta)} \left(\frac{e^{-i\eta a}}{\eta - \zeta_r} \mp \frac{e^{i\eta a}}{\eta + \zeta_r} \right) d\eta \qquad (r = 1, 2, \ldots)$$

$$\{x_l^{\pm}\} \in c(\gamma), \qquad \{y_l^{\pm}\} \in c(\gamma - 1), \qquad \gamma < 0.5 \tag{2.12}$$

Вначале теорема устанавливается для случая $\varphi(x) = e^{i\eta x}$. Бесконечная система строится следующим образом. Ядро $k(x)$ представляется в форме ряда, для чего интеграл (0.2) вычисляется по теории вычетов. Полученный ряд равномерно сходится всюду, кроме точки $x = 0$, в которой $k(x)$ обладает логарифмической особенностью.

После этого ядро $k(x)$ и решение $q(x)$, взятое в форме (2.1) при $\Phi(\eta) = \delta(\xi - \eta)$ ($\delta(t)$ — дельта-функция Дирака), вносятся в уравнение (0.1) и результат интегрируется. Ряд (2.1) в силу (1.1) равномерно сходится на любом сегменте, содержащемся в $(-a,\ a)$; точки $\pm a$ могут для него оказаться особыми, но в силу леммы 2.2 особенности интегрируемы.

Это обстоятельство позволяет утверждать, что полученный в результате интегрирования ряд Дирихле будет равномерно сходиться при всех $|x| \leqslant a$.

Кроме того, при условии (2.10), (1.1) этот ряд оказывается функцией, аналитически продолжимой в квадрат $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant M$ ($z = x + iy$, M — произвольное фиксированное число).

Переход от ряда Дирихле к бесконечной системе производится на основании следующего результата, установленного А. Ф. Леонтьевым [9] (стр. 133): пусть комплексные числа ζ_l будут нулями целой функции $P(z)$, индикатриса роста которой

$$h(\varphi) = \sigma |\sin \varphi|, \quad h(\varphi) = \overline{\lim_{\rho \to \infty}} \frac{\ln |P(\rho e^{i\varphi})|}{\rho}$$

Тогда, если ряд

$$Q(z) = \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \exp \zeta_k z + b_k \exp(-\zeta_k z)]$$

равномерно сходится в области ω, полностью содержащей отрезок $x = 0$, $|y| \leqslant \sigma$. Тогда из условия $Q(z) \equiv 0$ в ω следует, что все $a_k = b_k = 0$. Этот же факт в силу леммы 2.1 позволяет установить единственность решения системы (2.11) в пространстве (2.12). Переход от бесконечной системы к интегральному уравнению осуществляется в обратном порядке.

Лемма 2.3. Пусть

$$x^{\varepsilon} f'(x) \in C_0^{\lambda}(0, \infty), \quad f(x) \equiv 0 \quad \text{при } x \geqslant N > 0, \qquad 0.5 < \lambda - \varepsilon < 1$$

(N — произвольное фиксированное число)

Тогда интегральное уравнение (1.7), исследуемое в $L_p(0, \infty)$ $(1 < p \leqslant 2)$, эквивалентно бесконечной системе

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left[\frac{D_l}{\zeta_r - z_l} + \frac{G_l}{(\zeta_r - z_l)^2} \right] = \delta_r, \qquad \delta_r = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\eta)\, d\eta}{K(\eta)(\eta - \zeta_r)} \tag{2.13}$$

в классе последовательностей

$$\{D_l\} \in c(\gamma), \qquad \{G_l\} = c(\gamma - 1) \qquad (0 < \gamma < 0.5)$$

Решение уравнения (1.7) имеет вид

$$\alpha(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\eta)}{K(\eta)} e^{i\eta x} d\eta + \sum_{l=1}^{\infty} (D_l + xG_l) \exp iz_l x, \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\eta) e^{i\eta x} d\eta \tag{2.14}$$

Для доказательства прямого утверждения решим уравнение (1.7) и представим решение в форме (2.14), причем

$$D_l = [H_+^{-1}(-z_l)]' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\eta)\, d\eta}{(\eta - z_l) K_+(\eta)} - \frac{1}{H_+(-z_l)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\eta)\, d\eta}{(\eta - z_l)^2 K_+(\eta)}$$

$$G_l = \frac{1}{H_+(-z_l)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\eta)\, d\eta}{(\eta - z_l) K_+(\eta)} \tag{2.15}$$

Условий, которым подчинена $f(x)$ в предложении леммы достаточно, чтобы $F(\eta)$ обладала свойством

$$F(\eta) = O(\eta^{-1-\lambda+\varepsilon}) \qquad (\eta \to \infty) \tag{2.16}$$

Тогда, принимая во внимание (1.6), получим оценки

$$D_l \sim O(l^{\rho-1}), \quad G_l = O(l^{\rho}), \quad \rho = \sup(\gamma_1, \gamma_2) \leqslant 0.5 \qquad (l \to \infty) \tag{2.17}$$

из которых следует (2.13). Аналогично доказывается и обратное утверждение.

3. Представим систему (2.11) в матричной форме

$$[A + B(a)]S = D \tag{3.1}$$

Здесь введены обозначения

$$A = \{a_{rl}\}, \qquad B(a) = \{b_{rl}\}, \qquad S = \{s_l\}, \qquad D = \{d_r^{\pm}\} \tag{3.2}$$

$$a_{r,2l-1} = (\zeta_r - z_l)^{-1},$$

$$b_{r,2l} = \pm z_l(\zeta_r + z_l)^{-1}[(\zeta_r + z_l)^{-1} + 2a]\exp 2aiz_l, \qquad s_{2l-1} = x_l^{\pm}$$

$$a_{r,2l} = (\zeta_r - z_l)^{-2} z_l, \qquad b_{r,2l-1} = \pm(\zeta_r + z_l)\exp 2aiz_l, \qquad s_{2l} = z_l^{-1} y_l^{\pm}$$

В силу (2.12), очевидно

$$S \in c(\gamma), \qquad \gamma < 0.5$$

Лемма 3.1. Система (3.1) эквивалентна системе вида

$$S = -A^{-1}B(a)S + D_1, \qquad D_1 = A^{-1}D \tag{3.3}$$

причем $A^{-1}B(a)$ — оператор вполне непрерывный в $c(\gamma)$, $\gamma < 0.5$. Здесь A^{-1} — двусторонний обратный к A оператор, и введены следующие обозначения:

$$A^{-1} = \{\tau_{lr}\}, \qquad \tau_{2l,r} = \{H_+(-z_l)[K_-^{-1}(\zeta_r)]'(\zeta_r - z_l)\}^{-1} \tag{3.4}$$

$$\tau_{2l-1,r} = [H_+^{-1}(-z_l)]'\{[K_-^{-1}(\zeta_r)]'(\zeta_r - z_l)\}^{-1} -$$

$$- \{H_+(-z_l)[K_-^{-1}(\zeta_r)]'(\zeta_r - z_l)^2\}^{-1}$$

$$-A^{-1}B(a) = \{\varepsilon_{lm}\}, \qquad \varepsilon_{2l,m} = \pm\frac{[(z_m + z_l)^{-2} + 2a]\, z_m \exp 2aiz_m K_+(z_m)}{z_l(z_m + z_l)H_+(-z_l)}$$

$$\varepsilon_{2l-1,m} = \pm\left\{[H_+^{-1}(-z_l)]' - \frac{H_+^{-1}(-z_l)}{(\zeta_m + z_l)}\right\}\frac{\exp 2aiz_m K_+(z_m)}{(z_m + z_l)} \tag{3.5}$$

Для построения элементов матрицы A^{-1} решается [5] последовательность уравнений на полуоси (1.7) с правой частью $f(x) = \exp i\zeta_r x$, $0 \leqslant x < \infty$. Коммутативность матриц A и A^{-1} проверяется непосредственно, при этом используются оценки (1.6). Они же используются и при проверке полной непрерывности оператора $A^{-1}B(a)$ в пространстве $c(\gamma)$, $\gamma < 0.5$.

Из представления (3.5) и на основании (1.6) получается следующая оценка:

$$\varepsilon_{n,m} = O[n^{\gamma-1}m^2 \exp(-2a\beta m)] \qquad (n, m \to \infty) \tag{3.6}$$

Лемма 3.2. Система (3.3) эквивалентна конечной однозначно разрешимой системе линейных алгебраических уравнений вида

$$s_n = \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_{n,k}^{\circ} s_k + d_n^{\circ} \qquad (n = 1, \ldots, N) \tag{3.7}$$

Для доказательства воспользуемся системой вида

$$s_n = \sum_{k=N+1}^{\infty} \varepsilon_{n,k} s_k + d_n^*, \qquad d_n^* = d_n + \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_{n,k} s_k \qquad (n = N+1, \ldots) \tag{3.8}$$

причем здесь N подобрано из условия

$$\sup_{n>N} \sum_{k=N+1}^{\infty} |\varepsilon_{n,k}| n^{\sigma} \leqslant q < 1 \qquad (\sigma < 0.5) \tag{3.9}$$

что вполне возможно в силу оценки (3.6).

Но тогда система (3.8) однозначно разрешима в $c(\sigma)$ для любого элемента d_n^* из этого пространства, и ее решение можно представить в форме

$$S_N = \sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{E}_N{}^m D_N{}^*, \qquad S_N = \{s_n\}, \qquad D_N{}^* = \{d_n{}^*\} \quad n = N+1, \ldots$$
$$\mathrm{E}_N = \{\varepsilon_{nk}\} \quad (n, k = N+1, N+2, \ldots), \qquad \mathrm{E}^2 = \mathrm{EE} \tag{3.10}$$

Внося (3.10) в первые N уравнений системы (3.3) и учитывая обозначение (3.8) элементов d_n^*, приходим к системе (3.7), в которой положено

$$d_n{}^\circ = d_n + \sum_{s=N+1}^{\infty} \sum_{r=N+1}^{\infty} \varepsilon_{ns} u_{sr}{}^\circ d_r, \qquad \{u_{nr}{}^\circ\} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{E}_N{}^m$$
$$\varepsilon_{nk}{}^\circ = \varepsilon_{nk} + \sum_{s=N+1}^{\infty} \sum_{r=N+1}^{\infty} \varepsilon_{ns} u_{sr}{}^\circ \varepsilon_{rk} \qquad (n = 1, \ldots, N) \tag{3.11}$$

Однозначная разрешимость системы (3.7) следует из легко усматриваемой эквивалентности последней интегральному уравнению (0.1), которое по лемме 2.1 однозначно разрешимо. Лемма доказана.

Для завершения доказательства теоремы 2.1 необходимо установить свойство (2.2). Представим систему (3.1) в форме

$$AS = G, \qquad G = D - B(a)S \tag{3.12}$$

и покажем, что этой системе эквивалентно уравнение на полуоси вида (1.7), правая часть $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ которого удовлетворяет условию (1.9). Тогда, сравнивая ряды (2.1), (2.14) по теореме 1.1, получаем (2.2).

По элементу D легко строится функция $f_1(x)$, удовлетворяющая условиям леммы 2.3, т. е. и условию (1.9). Функция $f_2(x)$, отвечающая элементу $B(a)\ S$, имеет вид

$$f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_2(\eta) e^{i\eta x} d\eta, \qquad F_2(\eta) = K(\eta) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k s_k e^{2iaz_k}}{\eta + z_k} \tag{3.13}$$

Принимая во внимание (2.13), заключаем, что $f_2(x)$ удовлетворяет условию (1.9). Теорема 2.1 полностью доказана.

Таким образом, для построения решения уравнения (0.1) нужно решить конечную систему (3.7) (она однозначно разрешима), затем, воспользовавшись формулами (3.8), (3.2), (2.11), определить коэффициенты $A_e^{\pm}$ $B_e^{\pm}$ и внести их в соотношение (2.1). Решение $q(x)$ уравнения (0.1), как следует из теоремы 2.1, вообще говоря, в точках $x = \pm a$ имеет особенность вида $(a^2 - x^2)^{-0.5}$.

Замечание. Предложенный в статье метод исследования уравнений вида (0.1) применим во всех случаях, когда функция $K(u)$ положительна на вещественной оси, обладает разложением (1.2) и допускает представление

$$K(z) = P_1(z) P_2^{-1}(z)$$

Здесь $P_k(z)$ — целые функции, нули которых обладают асимптотикой (1.1) и индикатрисы роста $h_k(\varphi)$ которых имеют вид

$$h_k(\varphi) = \sigma_k |\sin \varphi|$$

Поступила 29 V 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М. К решению некоторых контактных задач теории упругости. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
2. Александров В. М. Осесимметричная контактная задача для упругого бесконечного цилиндра. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 5.
3. Александров В. М. О приближенном решении некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики. ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.
4. Симоненко И. Б. О некоторых интегро-дифференциальных уравнениях типа свертки. Изв. вузов, Матем., 1959, № 2 (9).
5. Бабешко В. А. Об одном асимптотическом методе при решении интегральных уравнений теории упругости и математической физики. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
6. Крейн М. Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов. Усп. матем. наук, 1958, т. 13, вып. 5 (83).
7. Хайкин М. И. Об интегральном уравнении типа свертки первого рода. Изв. вузов, Матем., 1967, № 3 (58).
8. Михлин С. Г. Курс математической физики. М., «Наука», 1968.
9. Леонтьев А. Ф. Ряды полиномов Дирихле и их обобщения. Тр. Матем. ин-та, 1951, т. 39.