Прикладная математика и механика. Том 33, 1969

О ДЕЙСТВИИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ НОРМАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ НА УПРУГИЙ ШАР

В. Ф. Бондарева

(Москва)

Получено в квадратурах решение задачи о деформировании шара нормальными нагрузками. Функция Грина краевой задачи выписана в конечном виде. Найденное решение в отличие от аналогичного решения в рядах [1] допускает негладкие нагрузки. В качестве примера решена в замкнутом виде задача о сжатии шара сосредоточенными силами; решение выражено через гипергеометрическую функцию.

Известно [1], что решение уравнений равновесия упругого тела в перемещениях

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u}=0$$

при граничных условиях

$$\tau_{r\theta}=0,\quad \sigma_r=\sigma(\theta),\quad \tau_{\varphi r}=0 \quad \text{при } r=R$$

в сферической системе координат r, θ, φ имеет следующий вид:

$$u_r=\frac{R}{4\pi G}\int_0^{\pi}\sigma(\alpha)\sin\alpha d\alpha\int_0^{{}^1/_2\pi}d\psi\left\{\sum_{n=2}^{\infty}P_n(\lambda)\left[A_{1n}\left(\frac{r}{R}\right)^{n+1}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+A_{2n}\left(\frac{r}{R}\right)^{n-1}\right]+\frac{2(1-2\nu)}{1+\nu}\frac{r}{R}\right\}$$
$$u_\theta=\frac{R}{4\pi G}\int_0^{\pi}\sigma(\alpha)\sin\alpha d\alpha\frac{\partial}{\partial\theta}\int_0^{{}^1/_2\pi}d\psi\sum_{n=2}^{\infty}P_n(\lambda)\left[A_{3n}\left(\frac{r}{R}\right)^{n+1}+A_{4n}\left(\frac{r}{R}\right)^{n-1}\right]\qquad(1)$$
$$\lambda=\cos(\theta+\alpha)+2\sin\theta\sin\alpha\sin^2\psi$$

Здесь $P_n(\lambda)$ — полиномы Лежандра, коэффициенты A_{in} являются дробно-рациональными функциями n

$$A_{1n}=-\frac{(2n+1)(n-2+4\nu)(n+1)}{n^2+(1+2\nu)n+1+\nu},\qquad A_{2n}=\frac{(2n+1)(n^2+2n-1+2\nu)n}{(n-1)[n^2+(1+2\nu)n+1+\nu]}$$
$$A_{3n}=-\frac{(2n+1)(n+5-4\nu)}{n^2+(1+2\nu)n+1+\nu},\qquad A_{4n}=\frac{(2n+1)(n^2+2n-1+2\nu)}{(n-1)[n^2+(1+2\nu)n+1+\nu]}$$

Докажем, что решение (1) можно представить в квадратурах. Для этого разложим A_{in} на элементарные дроби

$$A_{1n}=-(2n+1)+4(1-\nu)+\frac{P}{n-n_1}+\frac{\overline{P}}{n+\overline{n}_1}$$
$$A_{2n}=(2n+1)+4(1-\nu)+\frac{2}{n-1}+\frac{Q}{n-n_1}+\frac{\overline{Q}}{n-\overline{n}_1}$$
$$A_{3n}=-2+\frac{S}{n-n_1}+\frac{\overline{S}}{n-\overline{n}_1}$$
$$A_{4n}=2+\frac{2}{n-1}+\frac{T}{n-n_1}+\frac{\overline{T}}{n-\overline{n}_1}$$

Здесь n_1 и $\bar{n}_1$ — комплексно-сопряженные корни уравнения

$$n^2 + (1 + 2\nu)n + 1 + \nu = 0$$

Константы P, Q, S, T зависят только от коэффициента Пуассона ν и даются формулами

$$\begin{aligned}
P &= 4\nu^2 - 6\nu + 2 + i\frac{8\nu^3 - 12\nu^2 + \nu + 3}{\sqrt{3 - 4\nu^2}} \\
Q &= 4\nu^2 - 2\nu - 1 + i\frac{8\nu^3 - 4\nu^2 - 5\nu + 2}{\sqrt{3 - 4\nu^2}} \\
S &= \frac{12\nu - 9}{2} + i\frac{24\nu^2 - 6\nu - 3}{2\sqrt{3 - 4\nu^2}} \\
T &= \frac{3 - 4\nu}{2} + i\frac{1 + 7\nu - 6\nu^2}{2\sqrt{3 - 4\nu^2}}
\end{aligned} \tag{2}$$

Теперь очевидно, что вопрос о возможности представления решения в квадратурах сводится к вопросу о возможности представления в конечном виде рядов

$$\sum x^n P_n(\lambda), \qquad \sum n x^n P_n(\lambda), \qquad \sum \frac{x^n}{n - a} P_n(\lambda)$$

Значение первой суммы известно [2]

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n P_n(\lambda) = \frac{1}{s}, \qquad s = \sqrt{x^2 - 2x\lambda + 1}$$

Два последних ряда можно просуммировать, как это видно из следующей цепочки формул:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n P_n(\lambda) = x\frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=0}^{\infty} x^n P_n(\lambda) = \frac{x(x - \lambda)}{s^3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n - a} P_n(\lambda) = x^a \int_0^x dx \sum_{n=0}^{\infty} x^{n-a-1} P_n(\lambda) = \int_0^1 \frac{dy}{y^{1+a}\sqrt{x^2y^2 - 2xy\lambda + 1}}$$

Отметим, что последний интеграл при $a = 1$ выражается через элементарные функции, а при $a = n_1$ и $a = \bar{n}_1$ с точностью до множителя $1 / a$ совпадает с гипергеометрической функцией двух переменных $F_1(-a, {}^1/_2, {}^1/_2, 1-a; xe^{i \arccos \lambda}, xe^{-i \arccos \lambda})$. Это следует из интегрального представления [2]

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \alpha + \mu; u, v) =$$
$$= \frac{1}{B(\mu, \alpha)} \int_0^1 y^{\alpha-1}(1 - y)^{\mu-1}(1 - uy)^{-\beta}(1 - vy)^{-\beta'} dy$$

Кроме того, может быть выполнено интегрирование интересующих нас рядов по ψ.

Используя выражение для суммы ряда, легко проверить, например, что

$$U(x) \equiv U(x, \theta, \alpha) = \int_0^{1/2\pi} d\psi \sum_{n=2}^{\infty} x^n P_n(\lambda) = \frac{K(k)}{h} - \frac{\pi}{2}(1 + x\cos\theta\cos\alpha) \tag{3}$$

$$h^2 = (1-x)^2 + 4x\sin^2\frac{\theta+\alpha}{2}, \qquad k^2 = \frac{4x\sin\theta\sin\alpha}{h^2}$$

Здесь $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

Окончательно, представим решение (1) в следующем конечном виде:

$$u_r(r,\theta) = \frac{R}{2\pi G}\int_0^{\pi} \sigma(\alpha) H_r(r/R, \theta, \alpha)\sin\alpha d\alpha \tag{4}$$

$$u_\theta(r,\theta) = \frac{R}{2\pi G}\int_0^{\pi} \sigma(\alpha) H_\theta(r/R, \theta, \alpha)\sin\alpha d\alpha$$

где

$$H_r(x,\theta,\alpha) = \frac{1-2\nu}{1+\nu}\frac{\pi x}{2} + \frac{1-x^2}{2x}\left(2x\frac{\partial U}{\partial x} + U\right) + 2(1-\nu)\frac{1+x^2}{x}U + \Big]$$

$$+ \frac{1}{x}\operatorname{Re}\int_0^1 \left(\frac{Px^2+Q}{y^{1+n_1}} + \frac{1}{y^2}\right) U(xy)\,dy \tag{5}$$

$$H_\theta(x,\theta,\alpha) = \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[(1-x^2)U + \operatorname{Re}\int_0^1 \left(\frac{Sx^2+T}{y^{1+n_1}} + \frac{1}{y^2}\right) U(xy)\,dy\right]$$

Здесь $U = U(x)$ определяется соотношением (3), константы P, Q, S, T по-прежнему даются формулами (2), а

$$2n_1 = -(1+2\nu) + i\sqrt{3-4\nu^2}$$

Исследуем полученное решение.

Исходя из представления (5) и используя свойства эллиптических интегралов, можно показать, что функции H_r и H_θ непрерывны всюду при $0 \leqslant x < 1$. На поверхности шара $x = 1$ они имеют особенности в точке $\alpha = \theta$, такие что с точностью до непрерывных функций

$$\sin\alpha H_r(1, \theta, \alpha) = -2(1-\nu)\ln|\theta-\alpha| + O(1)$$

$$\sin\alpha H_\theta(1, \theta, \alpha) = -{}^1/_2(1-2\nu)\pi\,\operatorname{sign}(\theta-\alpha) + O(1)$$

$$\text{при } \alpha \to \theta$$

Выпишем в явном виде соотношения (5) при $\alpha = 0$

$$H_r(x,\theta,0)\frac{2}{\pi} = \frac{1-2\nu}{1+\nu}x + \frac{1-x^2}{2x}\left(\frac{1-x^2}{a^3} - 1 - 3x\cos\theta\right) + \frac{1-a}{x} +$$

$$+ 2(1-\nu)\frac{1+x^2}{x}\left(\frac{1}{a} - 1 - x\cos\theta\right) - \cos\theta\left(1 + \ln\frac{a+1-x\cos\theta}{2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{x}\operatorname{Re}(Px^2+Q)\left[\frac{1 - F_1(-n_1, {}^1/_2, {}^1/_2, 1-n_1;\ xe^{i\theta}, xe^{-i\theta})}{n_1} + \frac{x\cos\theta}{n_1-1}\right] \tag{6}$$

$$H_\theta(x,\theta,0)\frac{2}{\pi\sin\theta} = (1-x^2)\left(1-\frac{1}{a^3}\right) + \frac{a^2 - 2ax\cos\theta - 1}{a(a+1-x\cos\theta)} +$$

$$+ \ln\frac{a+1-x\cos\theta}{2} - \operatorname{Re}\frac{(Sx^2+T)[F_1(1-n_1, {}^3/_2, {}^3/_2, 2-n_1;\ xe^{i\theta}, xe^{-i\theta}) - 1]}{1-n_1}$$

$$a = \sqrt{x^2 - 2x\cos\theta + 1}$$

Отметим также некоторые другие свойства функций H_r и H_θ:

$$H_r(x,\theta,\alpha) = H_r(x, \alpha, \theta), \; H_r(x,\theta,\alpha) = H_r(x, \pi-\theta, \pi-\alpha)$$

$$H_\theta(x, 0, \alpha) = H_\theta(x, \pi, \alpha) = 0, \quad H_\theta(x, \theta, \alpha) = -H_\theta(x, \pi-\theta, \pi-\alpha)$$

В качестве примеров рассмотрим задачу о деформировании весомого шара, уравновешенного сосредоточенной силой, и задачу о сжатии шара двумя сосредоточенными силами, приложенными в его полюсах. Эти вопросы в последнее время рассматривались несколькими авторами [1,3,4]. В этих работах сингулярная часть решения тем или иным способом выделялась и представлялась в аналитическом виде, при этом гладкая часть решения оставалась записанной в форме ряда.

Дадим замкнутые решения поставленных задач.

Пример 1. Обратимся сначала к задаче о деформировании весомого шара плотности ρ. Шар уравновешен сосредоточенной силой $F = 4/3\pi R^3 \rho g$, приложенной в полюсе $\theta = 0$, $r = R$. В этом случае граничные условия можно записать так:

$$\sigma(\theta)\sin\theta = -\frac{F}{2\pi R^2}\delta(\theta), \qquad \tau(\theta) = 0$$

где $\delta(\theta)$ — дельта-функция Дирака.

Соответствующие им перемещения имеют вид

$$u_r^\circ(r,\theta) = -\left[\cos\theta\,\frac{3r^2}{4R^2}\,\frac{1-2\nu}{1+\nu} + \frac{1}{\pi}H_r(r/R, \theta, 0)\right]\frac{F}{4\pi GR} \tag{7}$$

$$u_\theta^\circ(r,\theta) = -\left[\sin\theta\,\frac{3r^2}{4R^2}\,\frac{1-2\nu}{1+\nu} + \frac{1}{\pi}H_\theta(r/R, \theta, 0)\right]\frac{F}{4\pi GR}$$

Функции H_r и H_θ по-прежнему даются формулами (6).

Решение (7) непрерывно всюду, кроме точки приложения силы $\theta = 0$, $r = R$. Характер разрыва определяется соотношениями

$$H_r(1,\theta,0)\frac{1}{\pi} = (1-\nu)\left(\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}} - 4\cos^2\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1-2\nu}{2(1+\nu)} -$$
$$-(1-2\nu)^2\left[\cos\theta\ln\sin\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right) + 2\sin\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\right)\right] +$$
$$+\operatorname{Re}\frac{P+Q}{2}\int_0^1\frac{y^{1-n_1}-1}{y^2}\left[\frac{1}{\sqrt{y^2-2y\cos\theta+1}} - 1 - y\cos\theta\right]dy \tag{8}$$

$$H_\theta(1,\theta,0)\frac{1}{\pi} = -\frac{1-2\nu}{2}\left[\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,\frac{4\sin^2{}^1/_2\theta - 4\sin{}^1/_2\theta\cos\theta - 1}{1+\sin{}^1/_2\theta} + 2\sin\theta\ln\sin\frac{\theta}{2}\times\right.$$
$$\left.\times\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial\theta}\operatorname{Re}\frac{S+T}{2}\int_0^1\frac{y^{1-n_1}-1}{y^2}\left[\frac{1}{\sqrt{y^2-2y\cos\theta+1}} - 1 - y\cos\theta\right]dy$$

Легко видеть, что подынтегральные функции ограничены всюду при $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Первые два слагаемых в соотношениях (8) при $\theta \to 0$ асимптотически совпадают с выделенной особенностью в решениях [1,3].

Пример 2. Очевидно, решение задачи о сжатии шара сосредоточенными силами, приложенными в его полюсах $r = R$, $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, есть суперпозиция двух решений типа (7), а именно

$$u_r(r, \theta) = u_r^\circ(r, \theta) + u_r^\circ(r, \pi - \theta)$$
$$u_\theta(r, \theta) = u_\theta^\circ(r, \theta) - u_\theta^\circ(r, \pi - \theta)$$

Итак, решение задачи о деформировании шара осесимметричной нормальной нагрузкой представлено в квадратурах (4), (5). Достоинством этого представления будет то, что оно справедливо даже при нагрузках, имеющих сильный разрыв типа сосредоточенной силы.

Поступила 4 IV 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1955.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., «Наука», 1965.
3. Sternberg E., Rosenthal F. The elastic sphere under concentrated loads. J. Appl. Mech., 1952, vol. 19, No 4, p. 413—422.
4. Weber C. Kugel mit normalgerichteten Einzelkräften. Zeitsch. fur angew, Math. und Mechanic, 1952, vol. 32, No 6.