ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ ФУРЬЕ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯХ

И. Т. Ефимова, Я. С. Уфлянд

(Ленинград)

§ 1. Решение некоторых классов краевых задач математической физики для двухслойной среды приводит к необходимости разложения заданной функции в интеграл по функциям

$$\varphi(x, \lambda) = \begin{cases} \mu \sin \sqrt{\beta_1}\,\lambda x & (0 < x < l) \\ \sin \sqrt{\beta_1}\lambda l \cos \sqrt{\beta_2}\lambda (x - l) + \delta \cos \sqrt{\beta_1}\,\lambda l \sin \sqrt{\beta_2}\lambda (x - l) & (l < x < \infty) \end{cases} \tag{1.1}$$

являющимся собственными функциями сингулярной краевой задачи

$$\varphi'' + \beta_1\lambda^2\varphi = 0 \quad (0 < x < l), \quad \varphi'' + \beta_2\lambda^2\varphi = 0 \quad (l < x < \infty) \tag{1.2}$$

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(\infty) < \infty, \quad \varphi(l - 0) = \mu\varphi(l + 0), \quad \varphi'(l - 0) = \nu\varphi'(l + 0)$$

Основным результатом данного исследования является следующая теорема: если $f(x)$ — кусочно-непрерывная функция, абсолютно интегрируемая в промежутке $(0, \infty)$ и имеющая в нем ограниченную вариацию, то

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\varphi(x, \lambda)}{\omega(\lambda)}\,d\lambda \int_0^\infty f(\xi)\,r(\xi)\,\varphi(\xi, \lambda)\,d\xi = \begin{cases} {}^1/_2\,[f(x - 0) + f(x + 0)] & (x \neq l) \\ [\delta f(l - 0) + \mu f(l + 0)]\,/\,1 + \delta & (x = l) \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\omega(\lambda) = \sin^2 \sqrt{\beta_1}\lambda l + \delta^2 \cos^2 \sqrt{\beta_1}\lambda l, \quad \delta = (\mu / \nu)\sqrt{\beta_1 / \beta_2} \tag{1.4}$$

$$r(x) = \delta\,\sqrt{\beta_1}\,/\,\mu^2 \quad (0 < x < l), \quad r(x) = \sqrt{\beta_2} \quad (l < x < \infty) \tag{1.5}$$

При $\beta_1 = \beta_2 = \mu = \nu = 1$ разложение (1.3) переходит в обычный интеграл Фурье. Для доказательства рассмотрим интеграл

$$J(x, T) = \frac{2}{\pi}\int_0^T d\lambda \int_0^\infty f(\xi)\,r(\xi)\,\frac{\varphi(\xi, \lambda)\,\varphi(x, \lambda)}{\omega(\lambda)}\,d\xi \tag{1.6}$$

и заметим прежде всего, что

$$\left| f(\xi)\,r(\xi)\,\frac{\varphi(\xi, \lambda)\,\varphi(x, \lambda)}{\omega(\lambda)} \right| \leqslant C\,|f(\xi)| \qquad x, \xi \in (0, \infty)$$

В силу этой оценки и абсолютной интегрируемости $f(x)$ внутренний интеграл в (1.6) сходится равномерно по λ для всех $\lambda \in (0, \infty)$.

Поэтому

$$J(x, T) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\xi)\,r(\xi)\,d\xi \int_0^T \frac{\varphi(\xi, \lambda)\,\varphi(x, \lambda)}{\omega(\lambda)}\,d\lambda =$$

$$= \frac{2}{\pi}\,\frac{\delta\sqrt{\beta_1}}{\mu^2}\int_0^l f(\xi)\,d\xi \int_0^T \frac{\mu \sin \sqrt{\beta_1}\lambda\xi\,\varphi(x,\lambda)}{\omega(\lambda)}\,d\lambda +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\sqrt{\beta_2}\int_l^\infty f(\xi)\,d\xi \int_0^T [\sin \sqrt{\beta_1}\,\lambda \cos \sqrt{\beta_2}\,\lambda(\xi - l) + \delta \cos \sqrt{\beta_1}\lambda l \sin \sqrt{\beta_2}\,\lambda(\xi - l)] \times$$

$$\times \frac{\varphi(x, \lambda)}{\omega(\lambda)}\,d\lambda = \frac{2}{\pi}\,\delta\sqrt{\beta_1}\int_0^l f(\xi)\,\psi_1(x, \xi, T)\,d\xi + \frac{2}{\pi}\sqrt{\beta_2}\,\mu\int_l^\infty f(\xi)\,\psi_2(x, \xi, T)\,d\xi \tag{1.7}$$

Пусть сначала $x \in (0, l)$. Тогда

$$\psi_1 = \int_0^T \frac{\sin \sqrt{\beta_1}\lambda x \sin \sqrt{\beta_1}\lambda\xi}{\omega(\lambda)} d\lambda \tag{1.8}$$

$$\psi_2 = \int_0^T \sin \sqrt{\beta_1}\lambda x [\sin \sqrt{\beta_1}\lambda l \cos \sqrt{\beta_2}\lambda(\xi - l) + \delta \cos \sqrt{\beta_1}\lambda l \sin \sqrt{\beta_2}\lambda(\xi - l)] \frac{d\lambda}{\omega(\lambda)} \tag{1.9}$$

Разлагая величину $1 / \omega(\lambda)$ в ряд по степеням параметра $\varepsilon \cos 2 \sqrt{\beta_1}\lambda l$, где

$$\varepsilon = (1 - \delta^2) / (1 + \delta^2) \tag{1.10}$$

меняя в (1.8) порядок суммирования и интегрирования и представляя степени $\cos 2 \sqrt{\beta_1}\lambda l$ через кратные дуги, можно выполнить квадратуры по переменной λ и после некоторых выкладок привести формулу (1.8) к следующему виду:

$$(1+\delta^2)\psi_1 = \left[\frac{\sin\theta_- T}{\theta_-} - \frac{\sin\theta_+ T}{\theta_+}\right]\frac{1+\delta^2}{2\delta} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{2^n}\sum_{k=0}^{\nu_n} C_n{}^k \left[\frac{\sin(\theta_- - \alpha_n)T}{\theta_- - \alpha_n} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin(\theta_+ - \alpha_n)T}{\theta_+ - \alpha_n} + \frac{\sin(\theta_- + \alpha_n)T}{\theta_- + \alpha_n} - \frac{\sin(\theta_+ + \alpha_n)T}{\theta_+ + \alpha_n}\right] \tag{1.11}$$

Здесь

$$\theta_\pm = \sqrt{\beta_1}(x \pm \xi), \quad \alpha_n = 2l \sqrt{\beta_1}(n-k), \quad \nu_n = \operatorname{ent}[{}^1/_2 (n-1)]$$

Точно так же, полагая $\eta = \sqrt{\beta_2}(\xi - l)$, $\vartheta_\pm = \sqrt{\beta_1}(l \pm x)$, получим из (1.9)

$$2\psi_2 = \frac{1+\delta}{2}\left[\frac{\sin(\vartheta_- + \eta)T}{\vartheta_- + \eta} - \frac{\sin(\vartheta_+ + \eta)T}{\vartheta_+ + \eta}\right] + \frac{1-\delta}{2}\left[\frac{\sin(\vartheta_- - \eta)T}{\vartheta_- - \eta} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin(\vartheta_+ - \eta)T}{\vartheta_+ - \eta}\right] + \frac{1+\delta}{1+\delta^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{2^n}\sum_{k=0}^{\nu_n} C_n{}^k \left[\frac{\sin(\vartheta_- + \eta - \alpha_n)T}{\vartheta_- + \eta - \alpha_n} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin(\vartheta_+ + \eta - \alpha_n)T}{\vartheta_+ + \eta - \alpha_n} + \frac{\sin(\vartheta_- + \eta + \alpha_n)T}{\vartheta_- + \eta + \alpha_n} - \frac{\sin(\vartheta_+ + \eta + \alpha_n T)}{\vartheta_+ + \eta + \alpha_n}\right] +$$

$$+ \frac{1-\delta}{1+\delta^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{2^n}\sum_{k=0}^{\nu_n} C_n{}^k \left[\frac{\sin(\vartheta_- - \eta - \alpha_n)T}{\vartheta_- - \eta - \alpha_n} - \frac{\sin(\vartheta_+ - \eta - \alpha_n)T}{\vartheta_+ - \eta - \alpha_n} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin(\vartheta_- - \eta + \alpha_n)T}{\vartheta_- - \eta + \alpha_n} - \frac{\sin(\vartheta_+ - \eta + \alpha_n)T}{\vartheta_+ - \eta + \alpha_n}\right] \tag{1.12}$$

Переходя теперь в (1.7), (1.11), (1.12) к пределу при $T \to \infty$ и применяя леммы Римана и Дирихле [1], после преобразований находим

$$\lim_{T\to\infty} J(x, T) = {}^1/_2 [f(x-0) + f(x+0)] + \frac{\sqrt{\beta_2}}{\pi(1+\delta^2)} \lim_{T\to\infty} \int_l^\infty f(\xi) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2m}}{2^{2m}} \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k \times$$

$$\times \left\{\left[1 + \delta - (1-\delta)\frac{2m-k}{\varepsilon m}\right]\left[\frac{\sin\{\sqrt{\beta_1}[(4m-4k-1)l + x] - \eta\}T}{\sqrt{\beta_1}[(4m-4k-1)l + x] - \eta} - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{\sin\{\sqrt{\beta_1}[(4m-4k-1)l - x] - \eta\}T}{\sqrt{\beta_1}[(4m-4k-1)l - x] - \eta}\right] - \left[1 - \delta - (1+\delta)\frac{k}{\varepsilon m}\right] \times \tag{1.13}$$

$$\left. \times \frac{\sin\{\sqrt{\beta_1}[(4m-4k+1)l + x] - \eta\}T}{\sqrt{\beta_1}[(4m-4k+1)l + x] - \eta} - \frac{\sin\{\sqrt{\beta_1}[(4m-4k+1)l - x] - \eta\}T}{\sqrt{\beta_1}[(4m-4k+1)l - x] - \eta}\right\} d\xi$$

Перестановка в последнем выражении порядка суммирования по m и k приводит к внутренней сумме вида

$$\sum_{m=k}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2m}}{2^{2m}} C_{2m}^{m-k} \left[\delta(\varepsilon+1) - \frac{k}{m}\right] \tag{1.14}$$

которая равна нулю в силу равенств

$$\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^{2k} = \sqrt{1-x^2} \sum_{m=k}^{\infty} C_{2m}^{m-k} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} = k \sum_{m=k}^{\infty} \frac{C_{2m}^{m-k}}{m} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \tag{1.15}$$

Таким образом,

$$\lim J(x, T) = {}^1/_2 \, [f(x-0) + f(x+0)], \quad T \to \infty$$

что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается теорема в случаях $x \in (l, \infty)$ и $x = l$.

§ 2. Дадим приложения найденного выше разложения к некоторым стационарным задачам математической физики и теории упругости для двухслойной среды.

1°. Требуется решить уравнение Лапласа для функции $u(r, z)$ внутри полубесконечного цилиндра радиуса R, если

$$u(r, 0) = 0, \quad u(r, l-0) = \mu u(r, l+0), \quad u_z(r, l-0) = \nu u_z(r, l+0), \quad u(R, z) = f(z) \tag{2.1}$$

Разделение переменных дает

$$u(r, z) = \int_0^{\infty} A(\lambda) \frac{I_0(\lambda r)}{I_0(\lambda R)} \varphi(z, \lambda) \, d\lambda \tag{2.2}$$

а неоднородное краевое условие приводит к разложению

$$f(z) = \int_0^{\infty} A(\lambda) \varphi(z, \lambda) \, d\lambda \tag{2.3}$$

На основании (1.3) будем иметь ($\beta_1 = \beta_2 = 1$)

$$A(\lambda) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\omega(\lambda)} \int_0^{\infty} f(\xi) r(\xi) \varphi(\xi, \lambda) \, d\xi \tag{2.4}$$

2°. Решение уравнения Лапласа для квадранта $0 < x, y < \infty$ при краевых условиях

$$u(0, y) = 0, \quad u(l-0, y) = \mu u(l+0, y), \quad u_x(l-0, y) = \nu u_x(l+0, y)$$
$$u(x, 0) = f(x) \tag{2.5}$$

имеет вид

$$u(x, y) = \int_0^{\infty} A(\lambda) \varphi(x, \lambda) \, e^{-\lambda y} d\lambda \tag{2.6}$$

где величина $A(\lambda)$ дается формулой (2.4).

В частности, если

$$f(x) = T_0 \quad (0 < x < l), \qquad f(x) = 0 \quad (l < x < \infty) \tag{2.7}$$

то

$$A(\lambda) = \frac{2}{\pi} \frac{T_0}{\nu \omega(\lambda)} \frac{1 - \cos \lambda l}{\lambda} \tag{2.8}$$

и решение задачи принимает вид

$$u(x, y) = \frac{2T_0}{\pi\nu} \int_0^\infty \frac{1 - \cos\lambda l}{\lambda\omega(\lambda)} \varphi(x, \lambda) e^{-\lambda y} d\lambda. \qquad (2.9)$$

3°. Рассмотрим кручение закрепленного на торце полубесконечного цилиндра $(0 < r < R,\ 0 < z < \infty)$, состоящего из двух различных материалов, разделенных сечением $z = l$. Решая уравнение

$$\Delta u - r^{-2} \quad u = 0 \qquad (2.10)$$

для единственной составляющей $u_\varphi(r, z) \equiv u$ упругого смещения, находим

$$u = \int_0^\infty A(\lambda) \frac{I_1(\lambda r)}{I_1(\lambda R)} \varphi(z, \lambda)\, d\lambda, \qquad \delta = \frac{G_1}{G_2} \qquad (2.11)$$

где $G_{1,2}$ — модули сдвига.

В простейшем случае, когда при $r = R$ задано само смещение: $u = f(z)$, величина $A(\lambda)$ находится по формуле (2.4). Аналогично решаются задачи кручения двуслойного стержня при задании напряжений на его поверхности.

Рассмотренное выше разложение (1.3) есть обобщение синус-интеграла Фурье на случай составного промежутка. Сходная теорема имеет место и для косинус-интеграла Фурье, когда в соответствующей краевой задаче при $x = 0$ ставится условие второго рода $\varphi'(0) = 0$. Более общим результатом в этом направлении является разложение, относящееся к краевому условию третьего рода [2], которое может быть доказано способом, аналогичным изложенному в § 1.

Поступила 7 X 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М., Физматгиз, 1960, т. 3.
2. Ефимова И. Т. Некоторые задачи теории теплопроводности для двухслойной среды. Инж.-физ. ж., 1968, т. 15, № 1.