

нала при  $a = 0.07$  оказалось равным  $J = -0.0151$ . Полученные результаты хорошо согласуются с данными работы [5], где решение аналогичной задачи выполнялось методом локальных вариаций.

В заключении отметим, что динамическое программирование может быть применено для решения такого класса двумерных задач и при ограничениях на деформации более общего вида.]

Поступила 22 XI 1968

### ЛИТЕРАТУРА

1. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. М., «Наука», 1965.
2. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., Гостехиздат, 1957.
3. Хедли Дж. Нелинейное и динамическое программирование. М., «Мир», 1967.
4. Бараненко В. А., Почтман Ю. М. Динамическое программирование и нелинейные задачи статики тонких стержней. Докл. АН СССР, 1968, т. 182, № 5.
5. Баничук Н. В., Петров В. М., Черноусько Ф. Л. Численное решение вариационных и краевых задач методом локальных вариаций. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 6.

## О РАСКЛИНИВАНИИ УПРУГОГО БЕСКОНЕЧНОГО КЛИНА

Б. И. Сметанин

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается задача о расклинивании упругого бесконечного клина тонкой абсолютно жесткой гладкой пластинкой. Пластинка забивается вдоль биссектрисы угла клина. Впереди пластинки при  $a \leq r \leq b$  образуется щель (фигура). Грани клина либо свободны, либо шарнирно закреплены.

Получены формулы, определяющие форму поверхности щели и коэффициент интенсивности нормальных напряжений. При решении используются эффективные асимптотические методы, развитые в работе [1], и математический аппарат метода Винера — Хопфа [2].

§ 1. Постановка задачи. Решение задачи методом аппроксимации функции  $L$ . Пусть в упругий изотропный клин, ограниченный лучами  $\theta = \pm \alpha$  ( $0 \leq r < \infty$ ), вдоль биссектрисы его угла забивается тонкая абсолютно жесткая гладкая пластинка (фигура) постоянной толщиной  $2h$ . Впереди пластинки образуется щель, занимающая область  $\{\theta = 0, a \leq r \leq b\}$ . Грани клина либо (1) шарнирно закреплены, либо (2) свободны от напряжений. Граничные условия задачи имеют вид при  $\theta = 0$ :

$$u_\theta = \pm h \quad (0 \leq r \leq a), \quad u_\theta = 0 \quad (b \leq r < \infty) \\ \sigma_\theta = 0 \quad (a < r < b), \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (0 \leq r < \infty) \quad (1. 1)$$

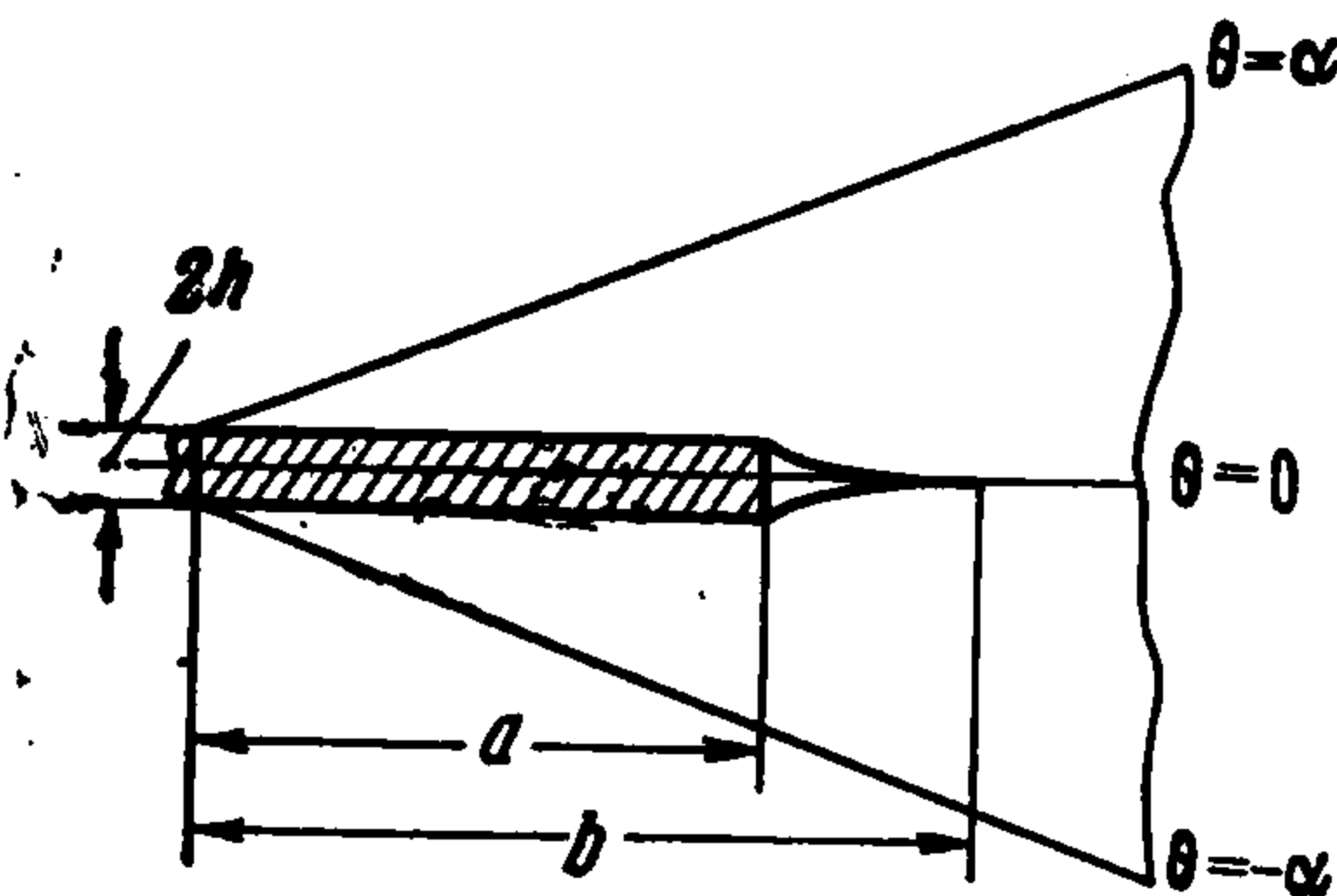
при  $\theta = \pm \alpha$  ( $0 \leq r < \infty$ )

$$(1) \quad \tau_{r\theta} = u_\theta = 0, \quad (2) \quad \tau_{r\theta} = u_\theta = 0$$

напряжения на бесконечности исчезают.

Знаки плюс и минус соответствуют верхнему и нижнему берегам разреза.

Требуется определить форму поверхности щели  $v(r)$  и коэффициент интенсивности нормальных напряжений  $N$ , возникающих вне щели на ее продолжении (при  $\theta = 0, r > b$ ). Очевидно, что в силу симметрии достаточно рассмотреть область между лучами  $\theta = 0$  и  $\theta = \alpha$  ( $0 \leq r < \infty$ ).



Используя решение уравнений Ламе плоской задачи теории упругости в форме интегралов Меллина [1] и граничные условия (1.1), рассматриваемую задачу можно свести к определению неизвестной функции  $v(r) \equiv u_\theta(r, 0)$  ( $a \leq r \leq b$ ) из следующего интегрального уравнения:

$$\int_a^b v'(\rho) Q\left(\ln \frac{\rho}{r}\right) d\rho = 0 \quad (a \leq r \leq b), \quad Q(t) = \int_0^\infty L(u, \alpha) \sin(ut) du \quad (1.2)$$

Для условий (1), (2) функция  $L(u, \alpha)$  имеет соответственно вид

$$(1) \quad L(u, \alpha) = \frac{\operatorname{sh} 2u\alpha + u \sin 2\alpha}{\operatorname{ch} 2u\alpha - \cos 2\alpha}, \quad (2) \quad L(u, \alpha) = 2 \frac{\operatorname{sh}^2 u\alpha - u^2 \sin^2 \alpha}{\operatorname{sh} 2u\alpha + u \sin 2\alpha}$$

Отметим следующие свойства функции  $L(u, \alpha)$ :

$$L(u, \alpha) \rightarrow 1 + O(e^{-2u\alpha}) \quad \text{при } u \rightarrow \infty; \quad L(u, \alpha) \rightarrow c^{-1}\pi u + O(u^3) \quad \text{при } u \rightarrow 0$$

Для условий (1), (2) постоянная  $c$  имеет вид

$$(1) \quad c = \pi \frac{1 - \cos 2\alpha}{2\alpha + \sin 2\alpha} \quad (\alpha \neq \pi), (2) \quad c = \pi \frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{2\alpha^2 - 2\sin^2 \alpha} \quad (1.3)$$

Аппроксимируем функцию  $L(u, \alpha)$  выражением  $\operatorname{th}(c^{-1}\pi u)$ , где  $c$  имеет вид (1.3). Аналогичная аппроксимация была использована в работе [3]. Относительная погрешность этой аппроксимации для различных значений угла  $\alpha$  приведена в [4]. С учетом указанной аппроксимации из (1.2) найдем

$$Q\left(\ln \frac{\rho}{r}\right) = \frac{c \sqrt{r^c \rho^c}}{\rho^c - r^c}, \quad \int_a^b \frac{\sqrt{\rho^c} v'(\rho)}{\rho^c - r^c} d\rho = 0 \quad (a \leq r \leq b) \quad (1.4)$$

Сделав во втором соотношении (1.4) замену переменных по формулам  $\xi = \rho^c$ ,  $x = r^c$ , получим сингулярное интегральное уравнение, формула обращения которого известна [5]. Применяя эту формулу и возвратившись затем к старым переменным, получим

$$v'(r) = \frac{Pr^{0.5c-1}}{\pi \sqrt{(r^c - a^c)(b^c - r^c)}} \quad (a \leq r \leq b) \quad (1.5)$$

Здесь  $P$  — постоянная, подлежащая определению. Из (1.5) найдем

$$v(r) = h + \int_a^r v'(\rho) d\rho = h + \frac{2P}{\pi c \sqrt{b^c}} F\left(\arcsin \frac{\sqrt{r^c - a^c}}{k \sqrt{r^c}}, k\right) \quad (1.6)$$

$$k = \sqrt{1 - \varepsilon^c}, \quad \varepsilon = a/b$$

Здесь  $F(\delta, k)$  — эллиптический интеграл первого рода.

Постоянную  $P$  определим из следующего очевидного условия:

$$v(b) = 0 \quad (1.7)$$

Из (1.6), (1.7) после простых преобразований получим

$$P = -0.5\pi h c \sqrt{\varepsilon^c} K^{-1}(k) \quad (1.8)$$

Здесь  $K(k)$  — полный эллиптический интеграл первого рода. Коэффициент интенсивности нормальных напряжений  $N$ , возникающих вне щели на ее продолжении, определяется следующими соотношениями:

$$N = \lim_{r \rightarrow b+0} \sqrt{r - b} \sigma_\theta(r, 0) = - \lim_{r \rightarrow b-0} \sqrt{b - r} \frac{E}{2(1 - \nu^2)} v' \quad (1.9)$$

Здесь  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Подставив во второе соотношение (1.9)  $v'(r)$  в форме (1.5) и учитывая (1.8), получим

$$N = \frac{Eh \sqrt{c}}{4(1 - \nu^2) k K(k) \sqrt{b}} \quad (1.10)$$

Можно показать, что полученное решение (1.6), (1.10) для всех  $0 < \alpha < \pi$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и  $\varepsilon \rightarrow 1$  стремится к точному решению задачи. Пусть, например,  $\varepsilon \rightarrow 1$ , а длина щели  $l = b - a$  фиксирована. В этом случае относительная длина пластинки стремится к бесконечности и, следовательно, влиянием граней [клина на величину  $N$  можно пренебречь. Данный случай соответствует задаче о расклинивании плоскости полубесконечной пластинкой, впереди которой образована щель длиной  $l$ . Для этого случая из (1.10) получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 1} N = \frac{Eh \sqrt{c}}{2(1-\nu^2)\pi\sqrt{l}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1-\varepsilon}}{\sqrt{1-\varepsilon^c}} = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)\pi\sqrt{l}} \quad (1.11)$$

Полученное значение величины  $N$  в форме (1.11) совпадает со значением  $N$ , найденным в работе [6], где рассмотрена задача о расклинивании плоскости полубесконечной пластинкой.

Численные расчеты показывают, что найденные соотношения (1.6) и (1.10), определяющие соответственно функцию  $v(r)$  и величину  $N$ , можно с надежностью использовать для любых значений  $\varepsilon$  при  $65^\circ \leq \alpha \leq 155^\circ$  для условия (1) на гранях клина и при  $85^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$  для условия (2). В двух случаях: при  $\alpha = \frac{1}{2}\pi$  и условии (1) и  $\alpha = \pi$  и условии (2) полученное решение будет точным. Для первого случая  $c = 2$ , для второго —  $c = 1$ . Первый случай соответствует задаче о расклинивании полуплоскости, граница которой шарнирно закреплена пластинкой, степень внедрения которой равна  $a$ . Этот случай, как это видно из граничных условий (1.1), соответствует также задаче о расклинивании плоскости пластинкой длиной  $2a$ , с двух сторон от которой образованы щели длиной  $l$ . Полученное решение для этого случая совпадает с решением, найденным в работе [7]. Второй случай соответствует задаче о расклинивании плоскости пластинкой длиной  $a$ . С одной стороны пластинки образована щель длиной  $l$ , с другой стороны имеется прямолинейный полубесконечный разрез.

§ 2. Решение задачи для малых  $\varepsilon$ . Следуя методу, развитому в работе [1], асимптотическое решение уравнения (1.2), пригодное для малых значений  $\varepsilon$ , будем искать в виде

$$v'(r) = v_1(r)v_2(r)v_0^{-1}(r) \quad (a \leq r \leq b) \quad (2.1)$$

Функции  $v_1(r)$  и  $v_2(r)$  находятся из следующих интегральных уравнений:

$$\int_0^b v_1(\rho) Q\left(\ln \frac{\rho}{r}\right) d\rho = 0, \quad \int_a^\infty v_2(\rho) Q\left(\ln \frac{\rho}{r}\right) d\rho = 0 \quad (2.2)$$

$(0 \leq r \leq b) \qquad (a \leq r < \infty)$

Функция  $v_0(r)$  представляет собой нулевой член асимптотики  $v_2(r)$  при  $r/a \rightarrow \infty$ . Простыми заменами переменных уравнения (2.2) сводятся к одному и тому же уравнению Винера — Хопфа

$$\int_0^\infty \psi(\tau) Q(\tau - t) d\tau = 0 \quad (0 \leq t < \infty) \quad (2.3)$$

причем

$$v_1(\rho) = \frac{b}{\rho} \psi\left(\ln \frac{b}{\rho}\right), \quad v_2(\rho) = \frac{a}{\rho} \psi\left(\ln \frac{\rho}{a}\right) \quad (2.4)$$

Распространим уравнение (2.3) на весь интервал  $-\infty < t < \infty$ , введя новую неизвестную функцию [2]

$$w_-(t) = \frac{i}{\pi} \int_0^\infty \psi(\tau) Q(\tau - t) d\tau \quad (-\infty < t < 0) \quad (2.5)$$

Применив к уравнениям (2.3) и (2.5) преобразование Фурье, получим

$$\Psi_+(s)L(s, \alpha) = W_-(s) \quad (2.6)$$

Здесь  $\Psi_+(s)$  и  $W_-(s)$  — преобразования Фурье функций  $\psi(t)$  и  $w_-(t)$  соответственно.

Чтобы получить решение, пригодное для практического использования, аппроксимируем функцию  $L$  выражением

$$L(s, \alpha) = \frac{s \sqrt{s^2 + D^2}}{s^2 + R^2} \prod_{n=1}^m \frac{s^2 + A_n^2}{s^2 + B_n^2} \quad \left( \frac{D}{R^2} \prod_{n=1}^m \frac{A_n^2}{B_n^2} = \frac{\pi}{c} \right) \quad (2.7)$$

Здесь  $D, A_n, B_n \rightarrow$  действительные положительные числа, которые выбираются из условия наилучшей аппроксимации. Уравнение (2.6) с учетом (2.7) можно записать в виде

$$\frac{s \Psi_+(s) \sqrt{s + iD}}{s + iR} \prod_{n=1}^m \frac{s + iA_n}{s + iB_n} = \frac{W_-(s)(s - iR)}{\sqrt{s - iD}} \prod_{n=1}^m \frac{s - iB_n}{s - iA_n} \quad (2.8)$$

Обе части уравнения (2.8) в общей полосе регулярности  $\Pi_1(0 < \text{Im} s < \text{Inf}(R, D, A_n, B_n))$  совпадают с некоторой функцией  $G(s)$ , регулярной во всей плоскости комплексной переменной  $s$ .

Так как  $\psi(t) \sim t^{-1/2}$  при  $t \rightarrow +0$ , то  $\Psi_+(s) \sim s^{-1/2}$  при  $s \rightarrow \infty$  в верхней полуплоскости. Следовательно, левая часть уравнения (2.8) при  $s \rightarrow \infty$  есть постоянная. Аналогично можно показать, что правая часть уравнения (2.8) при  $s \rightarrow \infty$  в нижней полуплоскости есть также постоянная. Следовательно, в силу теоремы Лиувилля  $G(s) = A_* = \text{const}$ . Отсюда

$$\Psi_+(s) = A_* \frac{s + iR}{\sqrt{s + iD}} \prod_{n=1}^m \frac{s + iB_n}{s + iA_n} \quad (2.9)$$

Далее ограничимся случаем  $B_n = A_n (n = 1, \dots, m)$ . В этом случае из (2.9) найдем

$$\psi(t) = -A \left( \frac{e^{-Dt}}{\sqrt{\pi t}} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\pi}} \text{erf} \sqrt{Dt} \right) \quad \left( A = -\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{i}} A_* \right) \quad (2.10)$$

Определив из (2.10) и (2.4) функции  $v_1(r)$ ,  $v_2(r)$  и  $v_0(r)$  и используя соотношение (2.1), получим

$$v'(r) = -A \frac{b}{r} \left[ \left( \frac{r}{b} \right)^{D_*} \left( \pi \ln \frac{b}{r} \right)^{-1/2} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\pi}} \text{erf} \left( D \ln \frac{b}{r} \right)^{1/2} \right] \times \\ \times \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{c}} \left( \frac{a}{r} \right)^D \left( \pi \ln \frac{r}{a} \right)^{-1/2} + \text{erf} \left( D_* \ln \frac{r}{a} \right)^{1/2} \right] \quad (a \leq r \leq b) \quad (2.11)$$

Подставив  $v'(r)$  в левую часть соотношения (1.6) найдем

$$v(r) = h - Ab \left[ \frac{2e^{-\omega}}{\sqrt{\pi c_*}} \text{arc tg} \left( \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/r)} \right)^{1/2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{D}} \text{erf} \left( D \ln \frac{b}{r} \right)^{1/2} \text{erf} \left( D \ln \frac{r}{a} \right)^{1/2} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} J_1(r) + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\pi}} J_2(r) \right] \quad (2.12) \\ J_1(r) = \int_{\ln(b/r)}^{\omega/D} \frac{\text{erf} \sqrt{\omega - Dt}}{\sqrt{t} \exp(Dt)} dt, \quad J_2(r) = \int_{\ln(b/r)}^{\omega/D} \text{erf} \sqrt{Dt} \text{erf} \sqrt{\omega - Dt} dt$$

Постоянную  $A$  определим из условия (1.7). Проведем необходимые вычисления и получим

$$A = \frac{h}{b} \left[ \frac{\sqrt{\pi} e^{-\omega}}{\sqrt{c}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} J_1(b) + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\pi}} J_2(b) \right]^{-1} \quad (2.13)$$

Приближенные значения интегралов  $J_i(b)$  ( $i = 1, 2$ ), относительная погрешность которых при  $\omega = 2.5$  не превосходит 0.1 %, имеют вид <sup>1)</sup>

$$J_1(b) = (B - \operatorname{erf}(\frac{1}{2} \sqrt{2\omega})) \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{D}} \operatorname{erf}(\frac{1}{2} \sqrt{2\omega}) - \frac{\sqrt{2} e^{-\omega}}{\sqrt{\pi D}} \left( \frac{13}{6} - \frac{1}{\omega} \right)$$

$$J_2(b) = \frac{1}{2D} \left\{ B \left[ (\omega - 1) \operatorname{erf}(\frac{1}{2} \sqrt{2\omega}) + \frac{\sqrt{2\omega e^{-\omega}}}{\sqrt{\pi}} \right] + \frac{\sqrt{2} e^{-\omega}}{\pi} \left( \frac{13}{3} - \frac{4}{\omega} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{e^{-\omega}}}{\sqrt{\pi \omega^2}} \left( 5 - \frac{4}{\omega} \right) \operatorname{erf}(\frac{1}{2} \sqrt{2\omega}) \right\}, \quad B = 2 \operatorname{erf} \sqrt{\omega} + \left( 2 - \frac{1}{\omega} \right) \frac{e^{-\omega}}{\sqrt{\pi \omega}}$$

Легко убедиться, что

$$J_1(\sqrt{ab}) = \frac{1}{2} J_1(b) - \frac{\sqrt{\pi}}{2 \sqrt{D}} [\operatorname{erf}(\frac{1}{2} \sqrt{2\omega})]^2, \quad J_2(\sqrt{ab}) = \frac{1}{2} J_2(b) \quad (2.14)$$

Учитывая (2.13) и (2.14), из (2.12) найдем

$$v(\sqrt{ab}) = \frac{1}{2} h$$

Коэффициент интенсивности нормальных напряжений  $N$  определим из (2.11) и второго соотношения (1.9)

$$N = \frac{AE \sqrt{b}}{2 \sqrt{\pi} (1 - \nu^2)} \left( \operatorname{erf} \sqrt{\omega} + \frac{\sqrt{D} e^{-\omega}}{\sqrt{\omega c}} \right) \quad (2.15)$$

Полученные выражения (2.12) и (2.15) тем точнее, чем меньше  $\varepsilon$ . Определим значение величины  $N$  при  $\varepsilon \ll 1$ . Подставив значение постоянной  $A$  в (2.15), найдем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N \ln \varepsilon = - \frac{Eh}{2 \sqrt{bc} (1 - \nu^2)}$$

Следовательно, при  $\varepsilon \ll 1$

$$N = - \frac{Eh}{2 \sqrt{bc} (1 - \nu^2) \ln \varepsilon}$$

Это же значение величины  $N$  при  $\varepsilon \ll 1$  может быть также получено из (1.10).

§ 3. Решение задачи для больших  $\lambda$ . Сделав в уравнении (1.2) замену переменных

$$r = a \exp \frac{1+x}{\lambda}, \quad \rho = a \exp \frac{1+\xi}{\lambda} \quad \left( \lambda = - \frac{2}{\ln \varepsilon} = \frac{2D}{\omega} \right)$$

получим интегральное уравнение с разностным ядром, зависящим от параметра  $\lambda$

$$\int_{-1}^1 \varphi(\xi) Q \left( \frac{\xi - x}{\lambda} \right) d\xi = 0 \quad (\varphi(\xi) = \rho v'(\rho)) \quad (3.1)$$

При больших  $\lambda$  ядро интегрального уравнения (3.1) можно представить в виде

$$Q(t) = \frac{1}{t} + \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i t^{2i+1} \quad (3.2)$$

Постоянные  $\beta_i$ , определяются соотношениями

$$\beta_i = \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} \int_0^{\infty} [L(u, \alpha) - 1] u^{2i+1} du \quad (i = 0, 1, \dots)$$

Значения постоянных  $\beta_i$  для некоторых частных случаев приведены в работе [8]. Уравнение (3.1) с учетом (3.2) может быть преобразовано к следующему виду:

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(\xi) d\xi}{x - \xi} = - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\beta_i}{\lambda^{2i+2}} \int_{-1}^1 \varphi(\xi) (x - \xi)^{2i+1} d\xi \quad (3.3)$$

<sup>1)</sup> При возрастании  $\omega$  указанные соотношения стремятся к точным значениям интегралов  $J_i(b)$ .

Решение уравнения (3.3) будем искать в виде ряда по степеням  $\lambda^{-2}$ . Опуская промежуточные выкладки, аналогичные сделанным в работах [1,8], приводим окончательное выражение для определения функции  $\Phi(x)$

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \pi^{-1}(1-x^2)^{-1/2}T\Phi(x) \\ \Phi(x) &= 1 + (x^2 - 1/2)\beta_0\lambda^{-2} + (x^4 + x^2 - 7/8)\beta_1\lambda^{-4} + [(3/8x^2 - 3/16)\beta_0\beta_1 + (x^6 + \\ &+ 9/2x^4 - 3/4x^2 - 13/8\beta_2)]\lambda^{-6} + O(\lambda^{-8}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Перейдя в (3.4) к старым переменным и обозначениям, найдем

$$v'(r) = \frac{T}{\pi\lambda r} \left( \ln \frac{r}{a} \ln \frac{b}{r} \right)^{-1/2} \Phi(\chi) \quad \left( \chi = \lambda \ln \frac{r}{\sqrt{ab}} \right) \quad (3.5)$$

Из левой части соотношения (1.6) и из условия ограниченности функции  $v(r)$  (1.7) определим  $v(r)$  и постоянную  $T$

$$\begin{aligned} v(r) &= \frac{h}{\pi} \left\{ \arccos \chi + \left[ \frac{\beta_0}{2\lambda^2} + \left( \frac{7}{8} + \frac{1}{4} \chi^2 \right) \frac{\beta_1}{\lambda^4} + \frac{3}{16\lambda^6} \beta_0\beta_1 + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left( \frac{13}{8} + \frac{4}{3} \chi^2 + \frac{1}{6} \chi^4 \right) \frac{\beta_2}{\lambda^6} \right] \chi \sqrt{1-\chi^2} + O(\lambda^{-8}) \right\}, \quad T = -\lambda h \end{aligned} \quad (3.6)$$

Подставив  $v'(r)$  в форму (3.5) во второе соотношение (1.9) и учитывая найденное значение постоянной  $T$ , получим

$$N = \frac{Eh \sqrt{\lambda} \Phi(1)}{2\pi \sqrt{2b} (1-v^2)} \quad (3.7)$$

Устремив в соотношении (3.7)  $\lambda$  к бесконечности, получим значение величины  $N$ , совпадающее с найденным в § 1 в форме (1.11).

Можно показать, что ряд (3.2) абсолютно сходится при  $t < 2\alpha$ . Следовательно, найденные в настоящем параграфе результаты справедливы при  $1/a < \lambda < \infty$ . Практически соотношения (3.6), (3.7) рационально использовать при  $2/a < \lambda < \infty$ .

Как показывают численные расчеты, полученные в §§ 2, 3, формулы на некотором промежуточном диапазоне изменения  $\lambda$  дают практически совпадающие результаты. Следовательно, в совокупности полученные в §§ 2, 3 соотношения для определения функции  $v(r)$  и величины  $N$  дают полное решение задачи, так как обеспечивают перекрытие всего диапазона изменения параметра  $0 \leq \lambda < \infty$ . Для  $65^\circ \leq \alpha \leq 155^\circ$  и условия (1) на гранях клина и для  $85^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$  и условия (2) при всех  $\lambda$  целесообразно использовать более простое по форме решение (1.6), (1.10).

Значения величин  $N_* = (1-v^2) \sqrt{b} (Eh)^{-1} N$  и  $v_* = h^{-1} v(\sqrt{ab})$ , полученные при  $\lambda = 2$ ,  $\alpha = 1/2\pi$  и условия (2) на гранях клина по формулам §§ 1, 2, 3, соответственно будут равны  $N_* = 0.151, 0.152, 0.151$ ;  $v_* = 0.500, 0.500, 0.500$ .

Для рассмотренного случая используемые постоянные имеют следующие значения:

$$\beta_0 = -5/12, \quad \beta_1 = 11/180, \quad \beta_2 = -239/12096, \quad D = 2.549, \quad A_n = B_n \quad (n=1, \dots, m).$$

При этом погрешность аппроксимации (2.7) при всех  $0 \leq \text{Res} < \infty$  не превосходит 3%.

Поступила 6 IV 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М. Контактные задачи для упругого клина. Инж. ж. МТТ, 1967, № 2.
2. Нобл Б. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
3. Александров В. М. Об одной контактной задаче для упругого клина. Изв. АН АрмССР, Механика, 1967, т. 20, № 1.
4. Сметанин Б. И. Об одной смешанной задаче теории упругости для клина. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
5. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
6. Баренблатт Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Прямолинейные трещины в плоских пластинках. ПММ, 1959, т. 23, вып. 4.
7. Маркузон И. А. О расклинивании хрупкого тела клином конечной длины. ПММ, 1961, т. 25, вып. 2.
8. Сметанин Б. И. Некоторые задачи о щелях в упругом клине и слое. Инж. ж. МТТ, 1968, № 2.