

ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ УПРУГИХ МЕМБРАН, СТЕСНЕННЫХ ОГРАНИЧЕНИЯМИ, МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В. А. Бараненко, Ю. М. Почтман

(Днепропетровск)

Рассматриваются контактные задачи о формах прогибов упругих мембран (входящих в качестве элементов типа настила, обшивки и т. д. в состав реальных сооружений) при наличии ограничений на прогибы. Указанные задачи в вариационной постановке сводятся к нахождению функции, минимизирующей при заданных граничных условиях некоторый функционал и одновременно удовлетворяющей ограничениям типа неравенств. Для численного решения задач на ЭВМ применяется один из современных математических методов оптимального управления — динамическое программирование [1], в основе которого лежит «принцип оптимальности» Р. Беллмана применительно к многошаговому процессу принятия решений.

Рассмотрим прямоугольную упругую мембрану, имеющую постоянное натяжение F и нагруженную произвольной поперечной нагрузкой $q(x, y)$. Мембрана закреплена по контуру Γ , который будет границей некоторой области D (фиг. 1), расположенной в плоскости Oxy . Деформации мембраны ограничены снизу абсолютно жесткой плоской стенкой, параллельной недеформируемому контуру мембраны и отстоящей от него на расстоянии a . Задача об отыскании прогибов мембраны $w(x, y)$ сводится к интегрированию (вне области контакта D_0 мембраны со стенкой) гармонического уравнения

$$\nabla^2 w = -\frac{q(x, y)}{F} \quad \text{в } D - D_0 \quad (1)$$

где ∇^2 — оператор Лапласа.

Кроме того, в области контакта D_0 должно выполняться условие $w(x, y) = a$. Используя теорему о минимальном функционале [2] и вводя безразмерные переменные

$$x' = \frac{x}{l}, \quad y' = \frac{y}{l}, \quad J = \frac{J}{l^2}, \quad w' = \frac{wF}{ql^2}, \quad a' = \frac{aF}{ql^2}$$

заменяем решение этой краевой задачи решением вариационной задачи об определении функции $w(x, y)$, минимизирующей функционал потенциальной энергии мембраны (в дальнейшем штрихи условно опущены)

$$J = \int_D \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + q(x, y) w \right\} dx dy \quad (2)$$

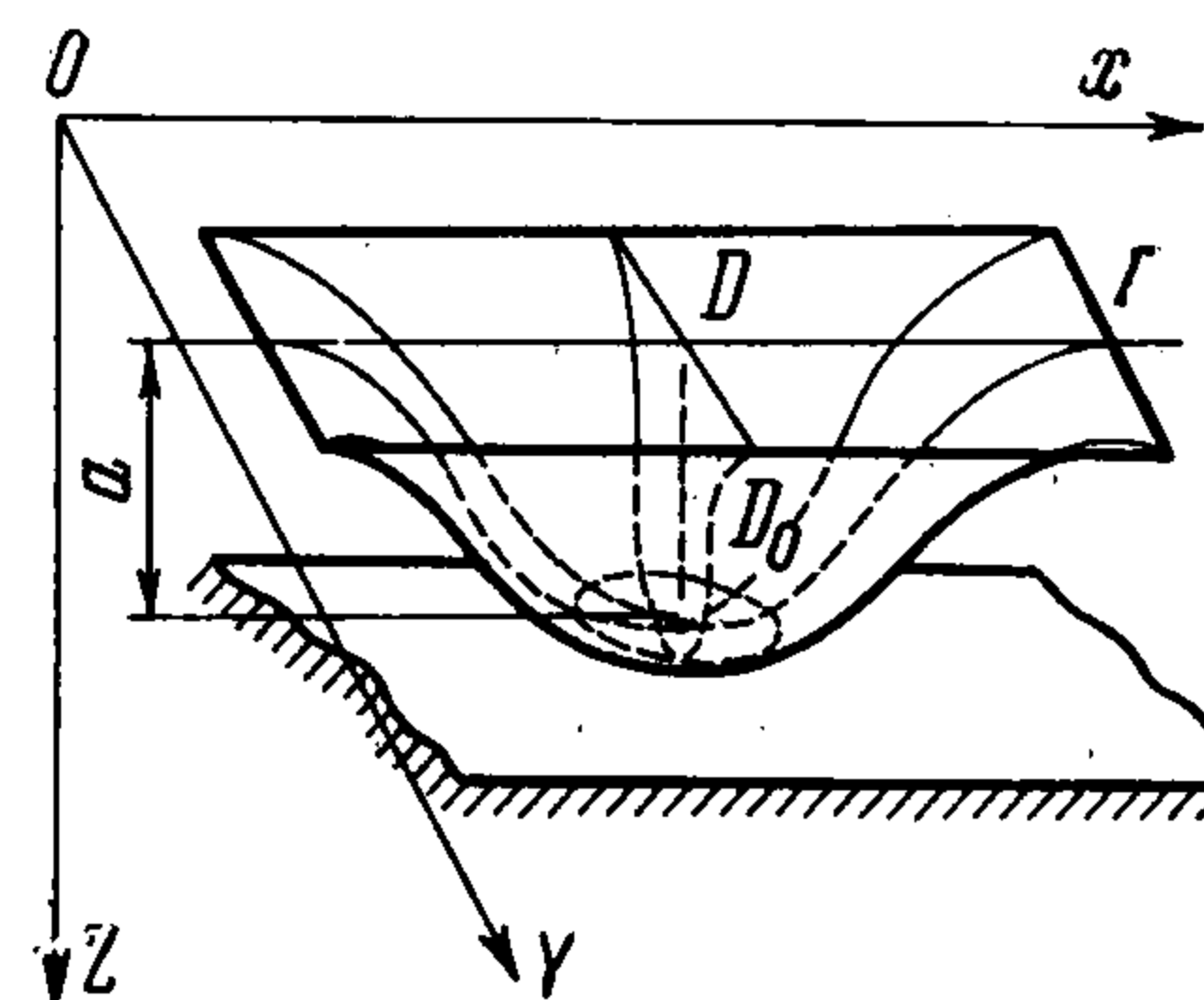
и удовлетворяющей краевому условию $w|_{\Gamma} = 0$ и неравенству

$$w(x, y) \leq a \quad \text{в } D \quad (3)$$

Наличие ограничения (3) значительно усложняет решение рассматриваемой задачи и, что особенно важно, не позволяет привлечь к исследованию классические методы теории упругости.

Ниже будет показано, что весьма эффективным для анализа и численного решения на ЭВМ (с большим объемом памяти) такого типа двумерных задач оказывается метод динамического программирования [3], если указанные задачи интерпретировать как многошаговый процесс принятия решений. Отметим, что в работе [4] было дано решение методом динамического программирования контактной задачи в случае, когда искомая функция будет функцией одной переменной (упругий гибкий стержень).

Для решения поставленной задачи методом динамического программирования в дискретной форме разобьем прямоугольную область D сеткой с узлами в вершинах



Фиг. 1

(x_i, y_j) $i = 0, 1, 2, \dots, m; j = 0, 1, 2, \dots, n$. Значения функций $w(x, y)$ и ее производных будем вычислять только в полученных узлах, т. е.

$$w(x_i, y_j) = w_{ij}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{w_{i+1,j} - w_{ij}}{\Delta x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{w_{i,j+1} - w_{ij}}{\Delta y}$$

В этом случае задача о минимизации интеграла (2) заменится следующей: минимизировать функцию цели

$$J = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{w_{i+1,j} - w_{ij}}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{w_{i,j+1} - w_{ij}}{\Delta y} \right)^2 \right] - q_{ij} w_{ij} \right\} \Delta x \Delta y \quad (4)$$

при условии, что

$$w_{ij}|_{\Gamma} = 0, \quad w(x_i y_j) \leq a \text{ в } D, \quad a \geq 0 \quad (5)$$

Пусть $F_k(c_1, \dots, c_{m-1})$ — минимум J по всем $w_{ij} \neq w_{ik}$ при условии, что процесс начинается в момент k из состояния $\{c_1, \dots, c_{m-1}\}$ и продолжается до $k = (n-1)$ стадии при оптимальной стратегии, т. е.

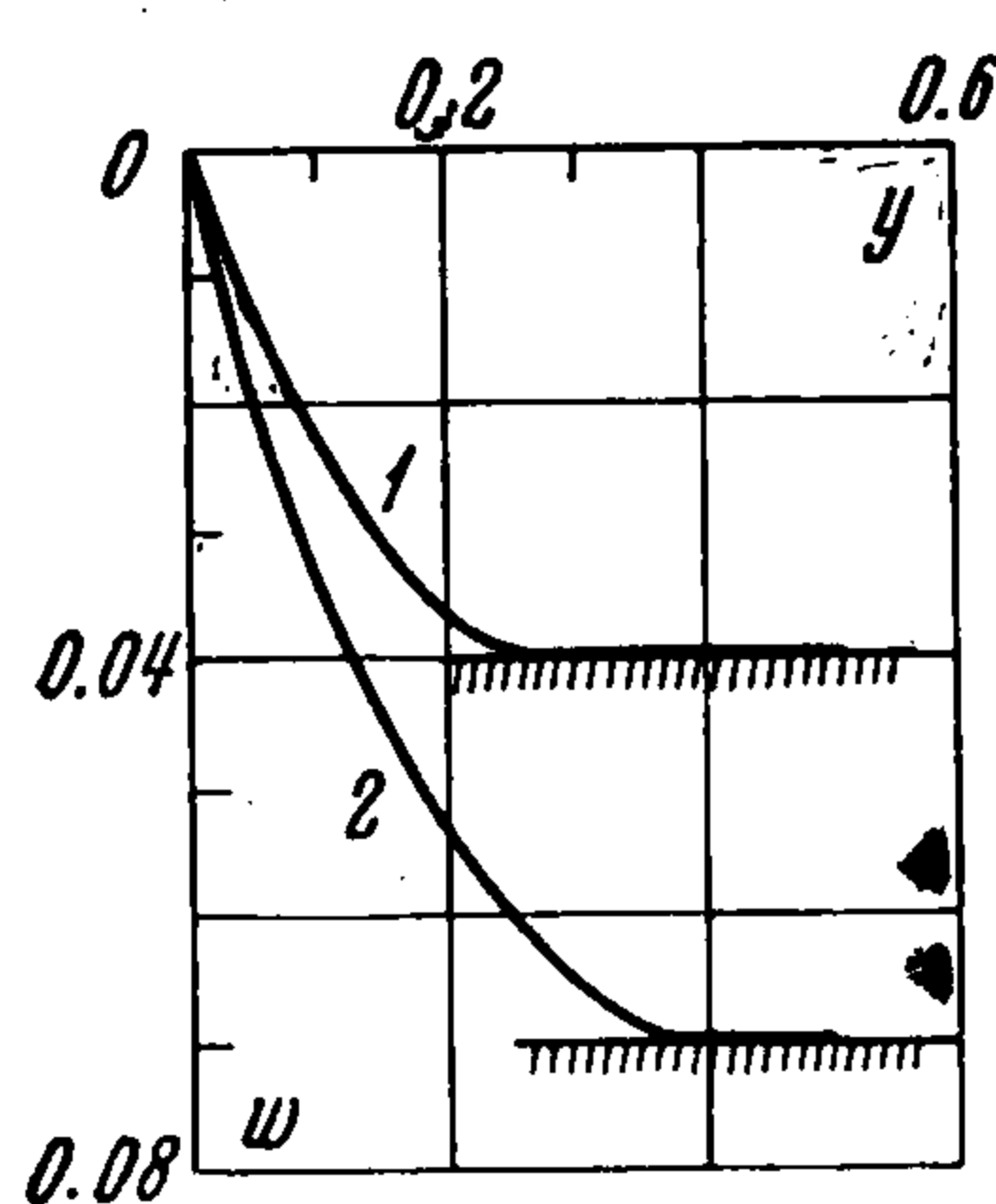
$$F_k(c_1, \dots, c_{m-1}) = \min \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=k}^{n-1} \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{w_{i+1,j} - w_{ij}}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{w_{i,j+1} - w_{ij}}{\Delta y} \right)^2 \right] - q_{ij} w_{ij} \right\} \Delta x \Delta y$$

где $w_{ik} = c_i$ и удовлетворяют краевым условиям (5). Тогда для поставленной задачи, согласно принципу оптимальности динамического программирования [3], функциональные уравнения запишутся в виде

$$F_k(c_1, \dots, c_{m-1}) = \min \left\{ \sum_{i=0}^{m-1} \left[\frac{1}{2} \left[\left(\frac{c_{i+1} - c_i}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{w_{i,k+1} - c_i}{\Delta y} \right)^2 \right] - q_{ik} c_i \right] \Delta x \Delta y + F_{k+1}(w_{1,k+1}, w_{2,k+1}, \dots, w_{m-1,k+1}) \right\} \quad (k=0, 1, \dots, n-2) \quad (7)$$

Здесь $w_{0k}, w_{mk}, w_{0,k+1}, w_{m,k+1}$ известны согласно (5). Для F_{n+1} имеем

$$F_{n-1}(c_1, \dots, c_{m-1}) = \sum_{i=0}^{m-1} \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{c_{i+1} - c_i}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{w_{in} - c_i}{\Delta y} \right)^2 \right] - q_{in} c_i \right\} \quad (8)$$



Фиг. 2

при известных $w_{in}, w_{0,n-1}, w_{m,n-1}$.

Реализуя на ЭВМ алгоритм (7)–(8), находим с учетом (5) значения функции цели (4), а также искомые значения $w(x, y)$ в дискретных точках сеточной области x_i, y_j .

В качестве численного примера по приведенному выше алгоритму рассчитывали на ЭВМ квадратную мембрану со стороной $l = 1$, загруженную равномерно-распределенной нагрузкой интенсивностью $q = 1$ для ограничений плоскостями $a = 0.04$ и $a = 0.07$. Исследуемая область аппроксимировалась прямоугольной сеткой с $m = 4$ и $n = 8$. В этом случае (7), (8) запишутся в виде

$$F_k(c_1, c_2, c_3) = \min_{w_{i,k+1}} \left\{ \sum_{i=0}^3 \left[\frac{1}{2} \left[\left(\frac{c_{i+1} - c_i}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{w_{i,k+1} - c_i}{\Delta y} \right)^2 \right] - c_i \right] \Delta x \Delta y + F_{k+1}(w_{1,k+1}, w_{2,k+1}, w_{3,k+1}) \right\} \quad (k=0, 1, \dots, 6)$$

$$F_7(c_1, c_2, c_3) = \sum_{i=0}^3 \left[\frac{1}{2} \left[\left(\frac{c_{i+1} - c_i}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{w_{i8} - c_i}{\Delta y} \right)^2 \right] - c_i \right] \Delta x \Delta y$$

Результаты вычислений представлены на фиг. 2. Кривыми 1, 2 показаны прогибы мембраны в сечении $x = 0.5$ соответственно для $a = 0.04$ и $a = 0.07$. Значение функцио-

нала при $a = 0.07$ оказалось равным $J = -0.0151$. Полученные результаты хорошо согласуются с данными работы [5], где решение аналогичной задачи выполнялось методом локальных вариаций.

В заключении отметим, что динамическое программирование может быть применено для решения такого класса двумерных задач и при ограничениях на деформации более общего вида.]

Поступила 22 XI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. М., «Наука», 1965.
2. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., Гостехиздат, 1957.
3. Хедли Дж. Нелинейное и динамическое программирование. М., «Мир», 1967.
4. Бараненко В. А., Почтман Ю. М. Динамическое программирование и нелинейные задачи статики тонких стержней. Докл. АН СССР, 1968, т. 182, № 5.
5. Баничук Н. В., Петров В. М., Черноусько Ф. Л. Численное решение вариационных и краевых задач методом локальных вариаций. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 6.

О РАСКЛИНИВАНИИ УПРУГОГО БЕСКОНЕЧНОГО КЛИНА

Б. И. Сметанин

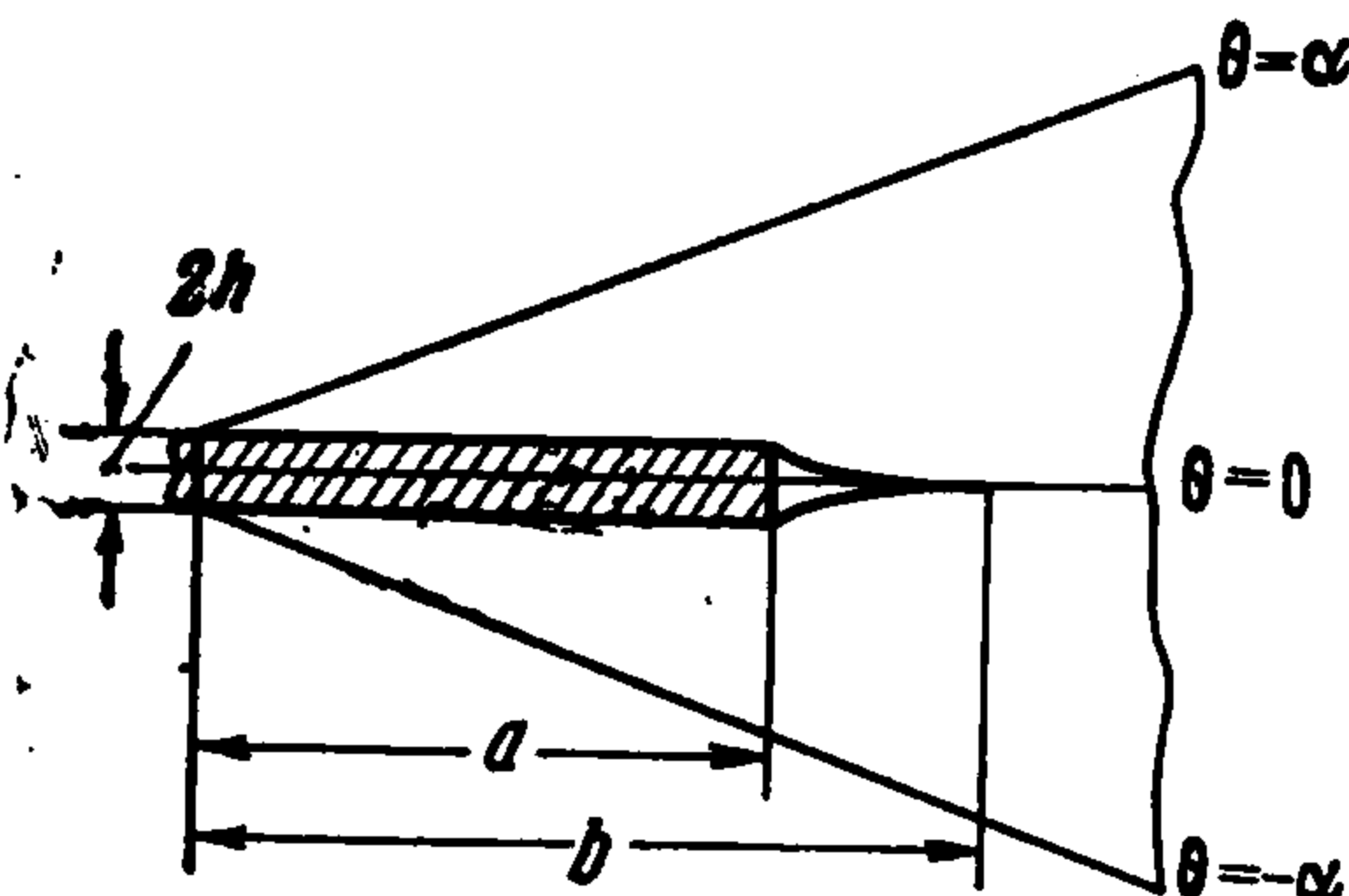
(Ростов-на-Дону)

Рассматривается задача о расклинивании упругого бесконечного клина тонкой абсолютно жесткой гладкой пластинкой. Пластинка забивается вдоль биссектрисы угла клина. Впереди пластинки при $a \leq r \leq b$ образуется щель (фигура). Грани клина либо свободны, либо шарнирно закреплены.

Получены формулы, определяющие форму поверхности щели и коэффициент интенсивности нормальных напряжений. При решении используются эффективные асимптотические методы, развитые в работе [1], и математический аппарат метода Винера — Хопфа [2].

§ 1. Постановка задачи. Решение задачи методом аппроксимации функции L . Пусть в упругий изотропный клин, ограниченный лучами $\theta = \pm \alpha$ ($0 \leq r < \infty$), вдоль биссектрисы его угла забивается тонкая абсолютно жесткая гладкая пластинка (фигура) постоянной толщиной $2h$. Впереди пластинки образуется щель, занимающая область $\{\theta = 0, a \leq r \leq b\}$. Грани клина либо (1) шарнирно закреплены, либо (2) свободны от напряжений. Граничные условия задачи имеют вид при $\theta = 0$:

$$\begin{aligned}
 u_\theta &= \pm h \quad (0 \leq r \leq a), \quad u_\theta = 0 \quad (b \leq r < \infty) \\
 \sigma_\theta &= 0 \quad (a < r < b), \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (0 \leq r < \infty) \quad (1. 1) \\
 &\text{при } \theta = \pm \alpha \quad (0 \leq r < \infty) \\
 (1) \quad \tau_{r\theta} &= u_\theta = 0, \quad (2) \quad \tau_{r\theta} = u_\theta = 0
 \end{aligned}$$



напряжения на бесконечности исчезают.

Знаки плюс и минус соответствуют верхнему и нижнему берегам разреза.

Требуется определить форму поверхности щели $v(r)$ и коэффициент интенсивности нормальных напряжений N , возникающих вне щели на ее продолжении (при $\theta = 0, r > b$). Очевидно, что в силу симметрии достаточно рассмотреть область между лучами $\theta = 0$ и $\theta = \alpha$ ($0 \leq r < \infty$).