

О ФОРМАХ РАВНОВЕСИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ В ПОТОКЕ ГАЗА

Н. В. Валишвили, В. Б. Силкин

(Москва)

Исследование форм равновесия удлиненной прямоугольной пластинки в потоке газа связано с решением нелинейной краевой задачи. При этом дифференциальное уравнение для нормальных перемещений имеет вид [1,2]

$$\frac{D}{h} \frac{d^4 (w^* - w_0^*)}{dx^{*4}} + \sigma^* \frac{d^2 w^*}{dx^{*2}} - \frac{p_0^*}{h} \left[1 - \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M \frac{dw^*}{dx^*} \right)^k \right] = 0 \quad (1)$$

где

$$k = \frac{2\kappa}{\kappa - 1}$$

Напряжение в срединной поверхности пластинки σ^* определяется из следующего интегрального выражения:

$$\sigma^* = \frac{E}{2c(1 - \nu^2)} \int_0^c \left[\left(\frac{dw_0^*}{dx^*} \right)^2 - \left(\frac{dw^*}{dx^*} \right)^2 \right] dx^* \quad (2)$$

Примем, как и в работе [2], $\kappa = 1.4$ и введем следующие расчетные параметры:

$$w = \frac{w^*}{h}, \quad \sigma = 12(1 - \nu^2) \frac{\sigma^* c^2}{Eh^2}, \quad x = \frac{x^*}{c} \quad (3)$$

$$q = 12(1 - \nu^2) \frac{p_0^* c^4}{Eh^4}, \quad \eta = M \frac{h}{c}$$

После ряда преобразований с учетом (3) из (1) и (2) получим

$$w'''' + \sigma w'' + qw' \left[1 + \frac{3}{5} \eta w' + \frac{1}{5} (\eta w')^2 + \frac{1}{25} (\eta w')^3 + \frac{3}{625} (\eta w')^4 + \frac{1}{3125} (\eta w')^5 + \frac{1}{109375} (\eta w')^6 \right] = w_0'''' \quad (4)$$

$$\sigma = 6 \int_0^1 (w_0'^2 - w'^2) dx \quad (5)$$

В выражениях (4), (5) и дальнейшем дифференцирование по x обозначается штрихом.

Возьмем форму начального несовершенства пластинки в виде

$$w_0 = w_{00} \sin \pi x \quad (6)$$

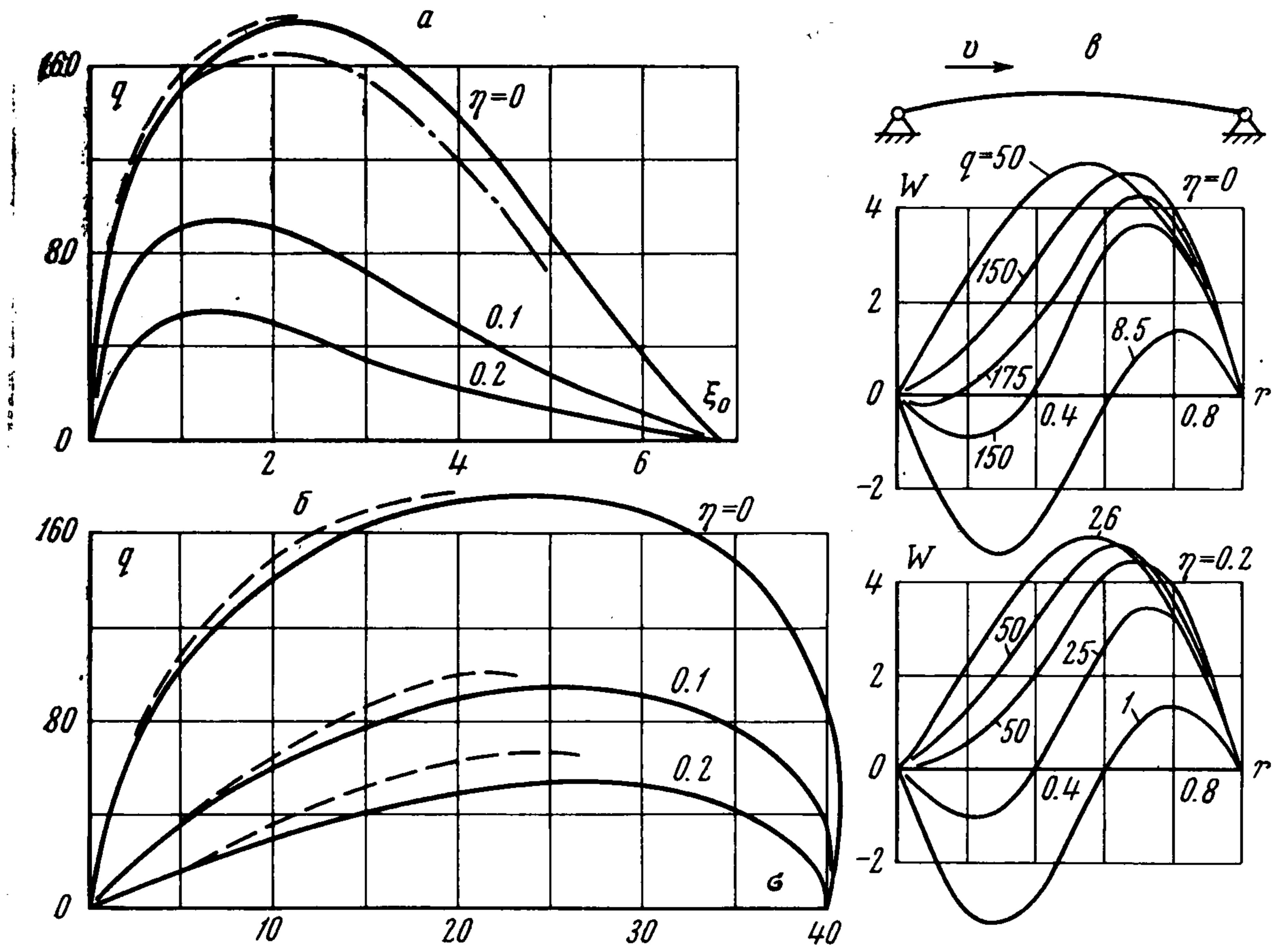
В расчетах будем принимать $w_{00} = 5$. Это позволит сравнить результаты с результатами А. Ю. Биркмана для пластинки с шарнирно закрепленными краями, полученными методом конечных разностей [2].

После подстановки (6) в (4) и (5) получим следующие выражения:

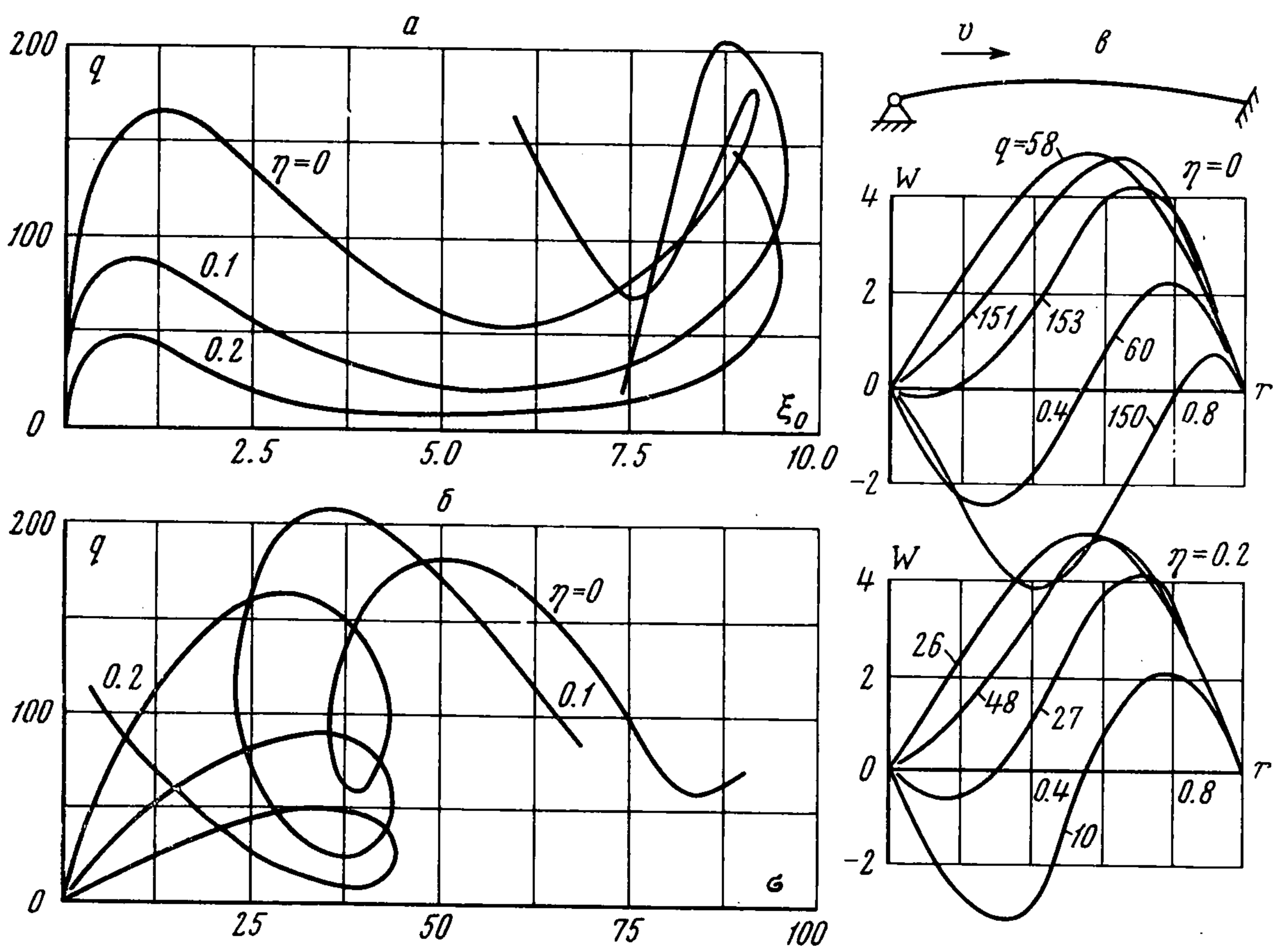
$$w'''' + \sigma w'' + qw' \left[1 + \frac{3}{5} \eta w' + \frac{1}{5} (\eta w')^2 + \frac{1}{25} (\eta w')^3 + \frac{3}{625} (\eta w')^4 + \frac{1}{3125} (\eta w')^5 + \frac{1}{109375} (\eta w')^6 \right] = \pi^4 w_{00} \sin \pi x \quad (7)$$

$$\sigma = 3\pi^2 w_{00}^2 - 6 \int_0^1 w'^2 dx \quad (8)$$

Для решения задачи интегральное условие (8) целесообразно заменить дифференциальным [3], приняв верхний предел интеграла переменным с последующим введе-



Фиг. 1



Фиг. 2

нием вспомогательной функции

$$\lambda(x) = 3\pi^2 w_{00}^2 - 6 \int_0^x w'^2 dx - \sigma$$

Откуда следует

$$\lambda'(x) = -6w'^2, \quad \lambda(0) = 3\pi^2 w_{00}^2 - \sigma, \quad \lambda(1) = 0 \quad (9)$$

Для удовлетворения граничных условий понадобятся выражения для изгибающего момента и угла поворота нормали к срединной поверхности пластинки

$$M_1 = 12(1 - \nu^2) \frac{M_1^* c^2}{Eh^4} = -(w'' - w_0''), \quad \theta = \frac{c\theta^*}{h} = w' - w_0' \quad (10)$$

С учетом (6) получим

$$M_1 = -w'' - w_{00}\pi^2 \sin \pi x, \quad \theta = w' - w_{00}\pi \cos \pi x \quad (11)$$

Были рассмотрены пластинки с различными видами закрепления краев.

1. Пластинка с шарнирно закрепленными краями (фиг. 1)

$$\begin{aligned} x = 0, \quad w = w'' = 0, \quad \lambda = 3\pi^2 w_{00}^2 - \sigma \\ x = 1, \quad w = w'' = 0, \quad \lambda = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

2. Пластинка с шарнирно закрепленным левым и жестко заземленным правым краями (фиг. 2)

$$\begin{aligned} x = 0, \quad w = w'' = 0, \quad \lambda = 3\pi^2 w_{00}^2 - \sigma \\ x = 1, \quad w = \theta = 0, \quad \lambda = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

3. Пластинка с жестко заземленным левым и шарнирно закрепленным правым краями (фиг. 3)

$$\begin{aligned} x = 0, \quad w = \theta = 0, \quad \lambda = 3\pi^2 w_{00}^2 - \sigma \\ x = 1, \quad w = w'' = 0, \quad \lambda = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

4. Пластинка с жестко заземленными краями (фиг. 4)

$$\begin{aligned} x = 0, \quad w = \theta = 0, \quad \lambda = 3\pi^2 w_{00}^2 - \sigma \\ x = 1, \quad w = \theta = 0, \quad \lambda = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Все задачи решались при помощи одного и того же численного алгоритма [3]. Рассмотрим подробнее первую задачу.

Зафиксируем некоторое значение параметра $q = q_0$. Возьмем при этом произвольные начальные значения функции и ее производных, но с учетом (12)

$$x = 0, \quad w = w'' = 0, \quad w' = \alpha_1, \quad w''' = \alpha_2, \quad \sigma = \alpha_3, \quad \lambda = 3\pi^2 w_{00}^2 - \alpha_3 \quad (16)$$

Интегрируем систему (7)–(9) численно и определяем следующие выражения:

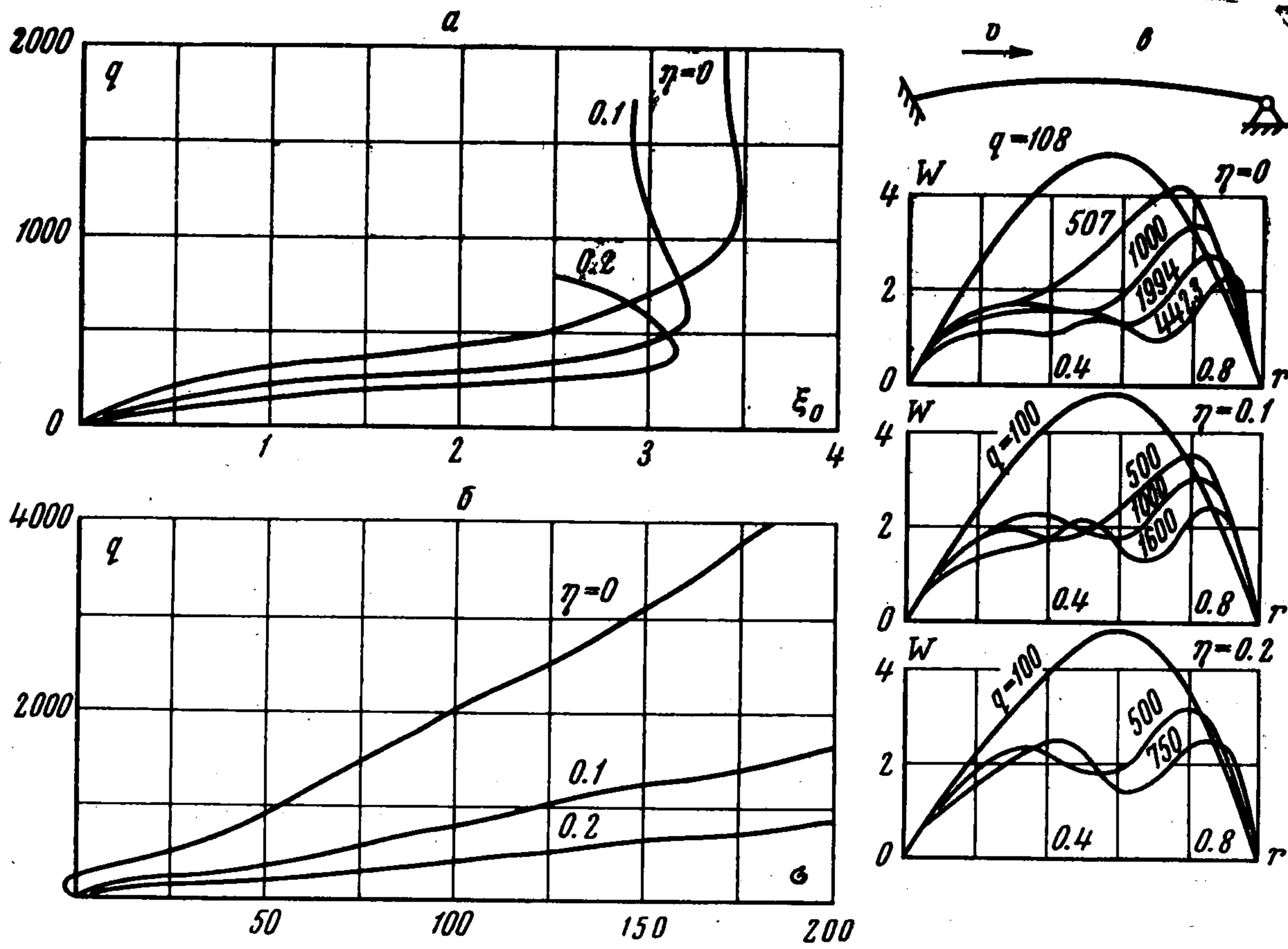
$$\begin{aligned} w(1) = w(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad w''(1) = w''(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \\ \lambda(1) = \lambda(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \end{aligned} \quad (17)$$

Решение задачи будем иметь при условии, что α_i подобраны так, что выполняются условия

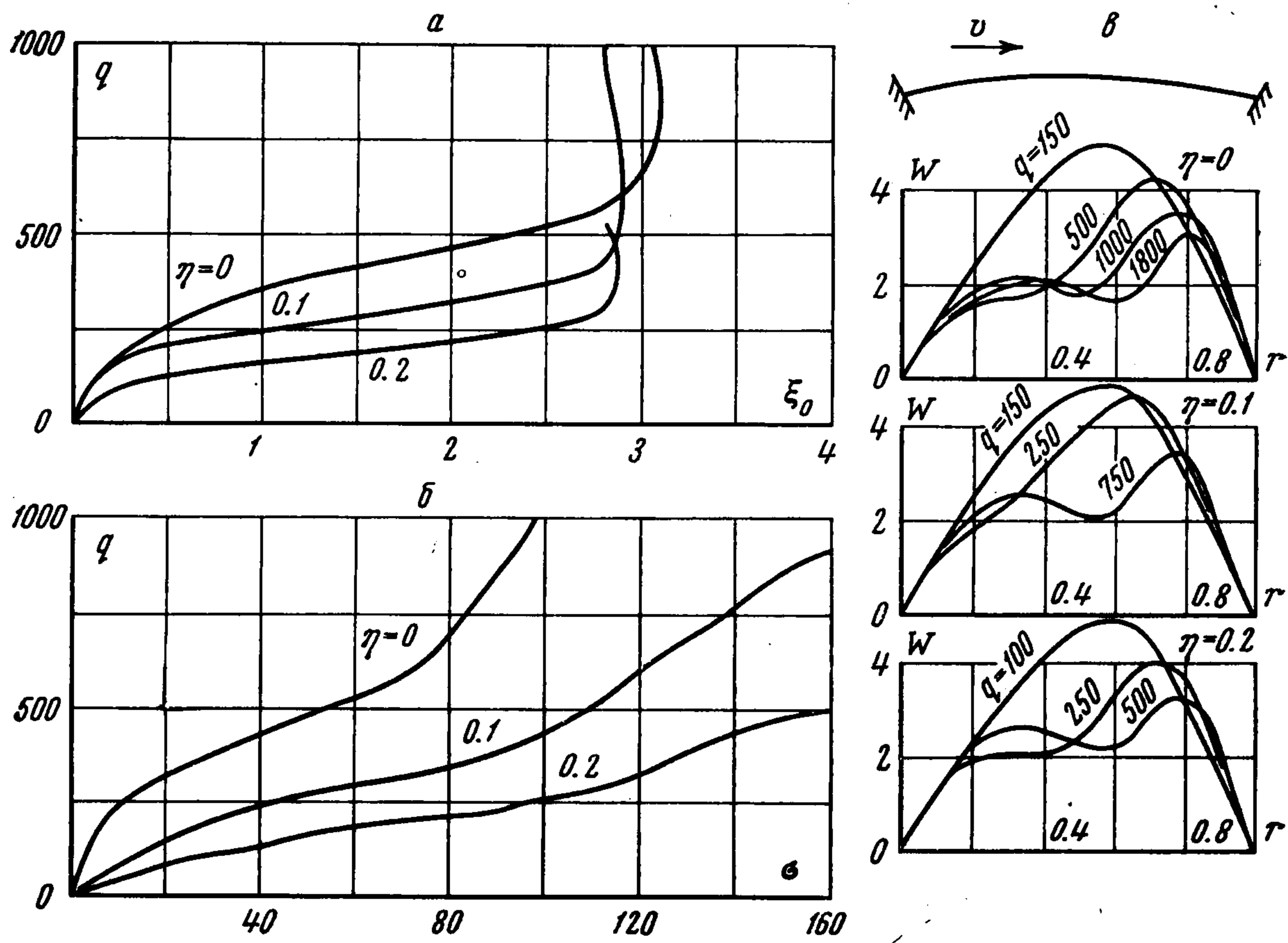
$$w(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0, \quad w''(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0, \quad \lambda(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0 \quad (18)$$

Таким образом, задача сведена к нелинейной алгебраической системе (18), аналогично тому как это делается в [3]. В разработанном алгоритме особое внимание уделялось обеспечению условий разрешимости системы нелинейных уравнений, что позволило получать решения задач с немонотонным изменением параметра [3].

Возможность решения задачи в значительной степени зависит от того, как близко начальное приближение от искомого решения. Алгоритм счета составлен так, что начальное приближение предсказывается с любой наперед заданной точностью [3].



Фиг. 3



Фиг. 4

Пусть решение задачи известно при некотором фиксированном значении параметра $q = q_0$, которое определяется следующими значениями начальных параметров: $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0$. Даем приращение параметру $q = q_0 + \Delta q$ и берем начальное приближение в виде

$$\alpha_i = \alpha_i^0 + \frac{d\alpha_i}{dq} \Delta q + \frac{1}{2} \frac{d^2\alpha_i}{dq^2} \Delta q^2 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (19)$$

Пусть процесс решения системы (18) сходится за k_0 итераций. Если $k_0 > 2k$, то Δq делим пополам, по формулам (19) предсказываем начальное приближение и повторяем процесс. Таким образом поступаем до тех пор, пока не будет удовлетворяться условие $k \leq k_0 \leq 2k$. Если $k_0 < k$, то на последующем шаге движение продолжаем с удвоенным шагом. При применении модифицированного метода Ньютона брали $k = 3 \div 4$.

Производные в (19) вычисляются приближенно при помощи разностных формул. При первом шаге в формулах учитываются только первые слагаемые, при втором — два первых, а в дальнейшем — и последние слагаемые. При решении некоторых задач вместо (19) применялись формулы экстраполяции α_i полиномом.

Параметр q в процессе счета может меняться не монотонно. Поэтому при движении вдоль кривой, соответствующей решению, необходимо следить за первыми производными, входящими в (19). Если какая-либо из них принимает по модулю значение больше единицы, то в качестве параметра в дальнейшем используется соответствующее начальное значение неизвестной функции. Если, например, $|d\alpha_1/dq| > 1$, то в качестве параметра берем α_1 , а q уточняем в процессе решения нелинейной системы. Начальные приближения при этом предсказываются по формулам аналогичным (19).

Такое построение алгоритма позволяет двигаться вдоль кривой, соответствующей решению, с выполнением условия однозначности в окрестности фиксированного параметра, из чего вытекает также условие разрешимости системы нелинейных уравнений. Это обстоятельство дает возможность применять метод Ньютона и его модификацию.

Для начала счета брали решение задачи при $q_0 = 0$, которое определяется начальным деформированным состоянием. При этом имеем

$$\alpha_1^0 = \lambda w_{00}, \quad \alpha_2^0 = -\pi^3 w_{00}, \quad \alpha_3^0 = 0 \quad (20)$$

Систему (8) — (9) интегрировали на машине БЭСМ-3М методом Рунге — Кутты с автоматическим выбором шага по x из условия, чтобы потеря абсолютной точности на каждом шаге не превышала $\psi_1 = 10^{-5}$. Для контроля производились расчеты с проверкой относительной точности при $\psi_2 = 10^{-5}$. Результаты в обоих случаях практически совпадали.

Результаты расчетов при различных значениях η приведены на фиг. 1—4. При этом ξ_0 — дополнительный прогиб в центре пластинки. На фиг. 1 штрих-пунктирной линией представлен результат решения задачи методом Бубнова — Галеркина при $\eta = 0$, а пунктирной линией — результаты решения задачи методом конечных разностей, полученные А. Ю. Биркганом [2]. Применяя метод конечных разностей, решение задачи до конца довести не удалось из-за расходимости счета.

Поступила 23 XII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Температурное выпучивание пластин и пологих оболочек в сверхзвуковом потоке газа. Сб. Расчеты на прочность, М., Машгиз, 1960, № 6.
2. Волмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. Изд. 2. М., Наука, 1967.
3. Валишвили Н. В. Об одном алгоритме решения нелинейных краевых задач. ПММ, 1968, № 6.
4. Феодосьев В. И. Об одном способе решения нелинейных задач устойчивости деформируемых систем. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
5. Шаманский В. Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ, ч. 2. Киев, Наукова думка, 1966.