$$\alpha_{k2} \equiv \frac{l^2}{2} \sum_{p,\,i,\,j} p^2 \overset{\circ}{\alpha}{}_{ij}^{p} \left[(\xi^i)^k - \sum_{n=1}^{N-1} \mu_n (\xi^n)^k \right]$$

$$\rho_{kq1} \equiv \sum_{i,\,j} (\xi^i)^k \frac{\beta_{jk}}{\mu_j} \left[\alpha_{ij}^{\circ} - \sum_p{}' \overset{\circ}{\alpha}{}_{ij}^{p} \right]$$

$$\rho_{kq2} \equiv l \sum_{p,\,i,\,j} p \overset{\circ}{\alpha}{}_{ij}^{p} \frac{\beta_{jq}}{\mu_j} \left[(\xi^i)^k - \sum_{n=1}^{N-1} \mu_n (\xi^n)^q \delta_{qk} \right]$$

$$\rho_{kq3} \equiv \frac{l^2}{2} \sum_{p,\,j,\,i} p^2 \overset{\circ}{\alpha}{}_{ij}^{p} \frac{\beta_{jq}}{\mu_j} \left[(\xi^i)^k - \sum \mu_n (\xi^n)^q \delta_{qk} \right]$$

Если понимать под N совокупность тождественных частиц или тождественных ячеек, то уравнения (2.13) существенно не упростятся, но возникнут дополнительные условия на входящие в них константы взаимодействия. В этом случае будем иметь сплошную среду, построенную при помощи макроячеек, которая в длинноволновом приближении описывается уравнениями для смещения центра масс ячейки и для моментов различного порядка, причем увеличению числа частиц в макроячейке будет соответствовать уточнение спектра исходной дикретной системы. Заметим, что если макроячейка совпадает с истинной ячейкой дискретной системы, то уравнения (2.13) позволяют судить как об акустических, так и об оптических колебаниях системы только при малых k. Чтобы уточнить спектр, необходимо включить в макроячейку по крайней мере две ячейки исходной цепочки.

Поступила 3 VI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбфрид Г. Микроскопическая теория механических и тепловых свойств кристаллов. М.— Л., Физматгиз, 1963.
2. Кунин И. А. Теория упругости с пространственной дисперсией. Одномерная сложная структура. ПММ, 1966, т. 30, вып. 5.
3. Mindlin R. D. Microstructure in linear elasticity Arch. Rational Mech. and Analysis, 1964, vol. 16, № 1, pp. 51—78 (Рус. перев.: Миндлин Р. Д. Микроструктура в линейной упругости. Механика. Период. сб. переводов иностр. стат., 1964, № 4).

О РАСПРОСТРАНЕНИИ СЛАБЫХ РАЗРЫВОВ ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГАЗОДИНАМИКИ

Л. И. Рубина

(Свердловск)

Рассматривается вопрос о слабых разрывах для квазилинейных гиперболических систем. Получены уравнения переноса, когда характеристические поверхности системы имеют постоянную кратность. Исследуются слабые разрывы в магнитной газовой динамике, когда характеристическая поверхность примыкает к области покоя.

Распространение слабых разрывов для линейных гиперболических систем, когда искомые функции системы и их производные до порядка n непрерывны при переходе через поверхность G, а производные порядка $n(n \geqslant 1)$ имеют конечный разрыв, исследовано в работе [1]. Для квазилинейных систем, когда величина скачка производных при переходе через поверхность разрыва мала, уравнение переноса получено в [2]. Случай распространения слабых разрывов для уравнений газовой динамики, когда поверхность G примыкает к области покоя, рассмотрен в работах [3,4]. В работе [5] подробно исследован вопрос о слабых разрывах квазилинейных гиперболических систем ($n \geqslant 1$), когда число независимых переменных $m = 2$.

В данной статье обобщаются результаты [5] для $m \geqslant 2$ и переносятся результаты [1], касающиеся характеристических поверхностей постоянной кратности, на случай квазилинейных систем.

1. Рассмотрим произвольную квазилинейную гиперболическую систему следующего вида:

$$L(\mathbf{U}) = \sum_{i=1}^{m} A^i \mathbf{U}_i + \mathbf{B} = 0 \left(\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \cdots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_i = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} \right) \tag{1.1}$$

Здесь A^i — матрицы с элементами $a_{lk}{}^i = a_{lk}{}^i (x_i, U)$, $(i = 1, \ldots, m)$; $\mathbf{B}$ — вектор с элементами $в_l = в_l (x_i, \mathbf{U})$.

Предположим, что при переходе через поверхность G, уравнение которой $\varphi(x_i) = 0$ функция U и ее производные до порядка n непрерывны, а выводящая производная $U_{\varphi \ldots \varphi}$ порядка n имеет конечный разрыв (индекс $\varphi \ldots \varphi$ означает n-кратное дифференцирование).

$$[\mathbf{U}_{\varphi \ldots \varphi}] = \lim (\mathbf{U}^+_{\varphi \ldots \varphi} - \mathbf{U}^-_{\varphi \ldots \varphi}) \quad (P^+ \to P, \ P^- \to P, \ P \in G)$$

Здесь P^+, P^- — точки, лежащие по разные стороны от характеристической поверхности G.

Система (1.1) в новых координатах

$$x_i = \xi_i \ (i = 1, \ldots, m-1), \ \varphi(x_i) = \xi_m \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

имеет вид

$$L^\varphi (\mathbf{U}) = A \mathbf{U}_\varphi + \sum_{i=1}^{m-1} A^i \mathbf{U}_i + \mathbf{B} = 0 \qquad \left(A = \sum_{i=1}^{m} A^i \varphi_i \right) \tag{1.2}$$

Здесь A — характеристическая матрица этой системы; скачок $[\mathbf{U}_{\varphi \ldots \varphi}]$ удовлетворяет однородной системе

$$A \, [\mathbf{U}_{\varphi \ldots \varphi}] = 0$$

поэтому, если ранг матрицы A равен $(n - s)$, то

$$[\mathbf{U}_{\varphi \ldots \varphi}] = \sum_{k=1}^{s} \sigma_k \mathbf{r}^k$$

Здесь σ_k — произвольные скаляры, $\mathbf{r}^k$ — линейно-независимые нуль-векторы характеристической матрицы $A (s \geqslant 1)$.

Если систему (1.2) продифференцировать n раз по $\varphi = \xi_m$ и проделать процедуру, аналогичную [1], гл. V, учитывая при этом, что

$$\lim \ (f^+ g^+ - f^- g^-) = [f][g] + [f] g^- + [g] f^+ \quad (P^+ \to P, P^- \to P)$$

то получим следующие системы обыкновенных уравнений для определения σ_k: при $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{s} \left\{ \alpha_k \sigma_k{}^{\cdot} + \sigma_k \mathbf{l}^j \left[\sum_{i=1}^{m-1} A^i \mathbf{r}_i{}^k + (\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{L}^\varphi (\mathbf{U}) \, \mathbf{r}^k) + A_\varphi \mathbf{r}^k + \sum_{\nu=1}^{s} \sigma_\nu \, (\nabla_{\mathbf{u}} A \mathbf{r}^\nu) \, \mathbf{r}^k \right] \right\} = 0 \tag{1.3}$$

при $n > 1$

$$\sum_{k=1}^{s} \left\{ \alpha_k \sigma_k{}^{\cdot} + \sigma_k \mathbf{l}^j \left[\sum_{i=1}^{m-1} A^i \mathbf{r}_i{}^k + (\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{L}^\varphi (\mathbf{U}) \, \mathbf{r}^k) + n A_\varphi \mathbf{r}^k \right] \right\} = 0 \tag{1.4}$$

$$(j = 1, \ldots, s)$$

$$\mathbf{r}_i{}^k = \partial \mathbf{r}^k / \partial \xi_i$$

Здесь $\mathbf{l}^j$ — линейно-независимые левые нуль-векторы характеристической матрицы A; α_k — некоторые скаляры; точка в позиции штриха здесь и в дальнейшем означает дифференцирование по параметру вдоль бихарактеристического луча.

При выводе (1.3), (1.4) использовалась лемма о бихарактеристических направлениях [1], которая оказывается справедливой и для квазилинейных систем, если характеристические поверхности имеют постоянную кратность.

В отличие от линейного случая, когда уравнение переноса линейное и коэффициенты уравнения зависят только от x_i, φ_i (внутреннее уравнение) [1], уравнения в системах (1.3), (1.4) не будут внутренними. Здесь в коэффициент при σ_k входит U_φ^-. Кроме того, в системе (1.3) уравнения нелинейные, они содержат произведения $\sigma_k\sigma_\nu$. Системы (1.3), (1.4) позволяют определить величину слабого разрыва только тогда, когда с одной стороны поверхности значение выводящей производной первого порядка известно. Тем не менее данные уравнения могут быть полезны при решении ряда прикладных задач, например для исследования течений газа в магнитной газовой динамике, когда характеристическая поверхность примыкает к области покоя или постоянного движения.

2. Используя уравнения (1.3) п. 1, исследуем слабые разрывы (при $n = 1$), которые могут иметь место при нестационарном течении идеальной плазмы. Уравнения течения плазмы имеют вид [6]

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{H}), \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{U}) = 0$$
$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla)\mathbf{U} - \frac{\mu_l}{\rho}(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H} = -\frac{1}{\rho}\nabla\left(p + \frac{\mu_l}{2}H^2\right), \quad p = a\rho^\gamma \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{H} = \{h_1, h_2, h_3\}$ — вектор магнитной напряженности, $\mathbf{U} = \{u_1, u_2, u_3\}$ — вектор скоростей, ρ — плотность, p — давление, μ_l — магнитная проницаемость, a — некоторая постоянная, γ — показатель адиабаты.

Пусть при переходе через поверхность G, уравнение которой $\varphi(x_i) - t = 0$, $(i = 1, 2, 3)$, функции $\mathbf{H}$, $\mathbf{U}$, ρ непрерывны, а их первые производные имеют конечный разрыв, тогда G — характеристическая поверхность. Она удовлетворяет [8] уравнению характеристик поверхностей системы (2.1)

$$\left(\frac{\mu_l}{\rho}H_n^2 - 1\right)\left[\frac{1}{\varphi^2} - \left(c^2 + \frac{\mu_l}{\rho}H^2\right) + \frac{\mu_l}{\rho}c^2H_n^2\right] = 0 \tag{2.2}$$
$$H_n = \sum_{i=1}^{3} h_i\varphi_i, \quad \varphi = \left(\sum_{i=1}^{3}\varphi_i^2\right)^{1/2}, \quad H^2 = \sum_{i=1}^{3} h_i^2, \quad c = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)^{1/2}$$

Рассмотрим сначала случай магнитозвуковых волн, когда

$$\frac{1}{\varphi^2} - \left(c^2 + \frac{\mu_l}{\rho}H^2\right) + \frac{\mu_l}{\rho}c^2H_n^2 = 0 \tag{2.3}$$

Порядок характеристической матрицы системы (2.1) равен семи. При выполнении (2.3) ранг ее равен шести, т. е. матрица имеет один правый и один левый нуль-вектор. Скачки производных определяются формулами [6]

$$[\mathbf{H}_\varphi] = (H_n\mathbf{n} - \mathbf{H})\sigma, \quad [\mathbf{U}_\varphi] = \left(\frac{\mu_l}{\rho}H_n\mathbf{H} - \mathbf{n}\right)\sigma, \quad [\rho_\varphi] = \rho\left(\frac{\mu_l}{\rho}H_n^2 - 1\right)\sigma$$
$$\mathbf{n} = \{n_i\}, \quad n_i = \varphi_i / \varphi^2 \quad (i = 1, 2, 3)$$

Выберем за параметр вдоль бихарактеристического луча здесь и в дальнейшем время t. Тогда уравнения бихарактеристик (2.1) будут иметь вид

$$\xi_i^\cdot = \left(\frac{\mu_l}{\rho}c^2h_iH_n - n_i\right)\left(\frac{\mu_l}{\rho}c^2H_n^2 - \frac{1}{\varphi^2}\right)^{-1}, \quad \varphi_i^\cdot = 0 \tag{2.4}$$

Отсюда ясно, что $\varphi_i = \mathrm{const}$ вдоль бихарактеристик, а сами бихарактеристики в случае примыкания к покою ($\mathbf{U} = 0$, $\mathbf{H} = \mathrm{const}$, $\rho = \mathrm{const}$) будут прямыми.

Подставляя соответствующие величины в систему (1.3), получаем уравнение для определения σ (в этом случае $s = 1$)

$$2\left(\frac{\mu_l}{\rho}c^2H_n^2-\frac{1}{\varphi^2}\right)\sigma^{\cdot}+\sigma\left[-\frac{\Delta\varphi}{\varphi^4}+4\frac{\mu_l}{\rho}c^2H_n(\mathbf{n\Phi})+\frac{\mu_l}{\rho}c^2(\mathbf{H\Phi})\right]+\sigma^2L=0 \qquad (2.5)$$

$$L=\left(\frac{\mu_l}{\rho}H_n^2-1\right)\left[3\left(c^2-\frac{1}{\varphi^2}\right)+\left(\frac{\mu_l}{\rho}c^2H_n^2-\frac{1}{\varphi^2}\right)+\left(\frac{\mu_l}{\rho}H_n^2-1\right)\left(\frac{1}{\varphi^2}+c^2(\gamma-1)\right)\right]= \\ =\mathrm{const}$$

вдоль бихарактеристики

$$\mathbf{n}=\{n_i\},\quad \mathbf{\Phi}=\{\Phi_i\},\quad \Phi_i=\sum_{j=1}^{3}h_j\varphi_{ij}\quad (i=1,\,2,\,3)$$

Для определения $\sigma(t)$ из уравнения (2.5) необходимо коэффициент при σ выразить через t. Так как $\varphi_i = \mathrm{const}$ h_i — const вдоль бихарактеристических лучей, достаточно определить $\varphi_{ij} = \varphi_{ij}$ (t) $(i, j = 1, 2, 3)$. Уравнение (2.3) будет тождеством относительно $\xi_i(i = 1, 2,3)$. Продифференцируем его по ξ_i два раза. Учитывая (2.4), для определения φ_{ij} получим следующую систему:

$$\begin{aligned}\dot\varphi_{11}&=\alpha_{11}\varphi_{11}^2+2\alpha_{12}\varphi_{11}\varphi_{12}+\alpha_{13}\varphi_{12}^2\\ \dot\varphi_{12}&=\alpha_{12}\varphi_{12}^2+\alpha_{11}\varphi_{11}\varphi_{12}+\alpha_{13}\varphi_{12}\varphi_{22}+\alpha_{12}\varphi_{11}\varphi_{22}\\ \dot\varphi_{22}&=\alpha_{11}\varphi_{12}^2+2\alpha_{12}\varphi_{12}\varphi_{22}+\alpha_{13}\varphi_{22}^2\end{aligned} \qquad (2.6)$$

$$\varphi_{i1}\xi_1^{\cdot}+\varphi_{i2}\dot\xi_2+\varphi_{i3}\dot\xi_3=0 \qquad (i=1,2,3) \qquad (2.7)$$

$$a_{ik}=\frac{\delta_{ik}}{\varphi^4}+\frac{\xi_i^{\cdot}\xi_k^{\cdot}}{\xi_3^{\cdot}\varphi^4}-\frac{\mu_l}{\rho}c^2\left(4c^2\frac{\mu_l}{\rho}\varphi^2H_n^2-1\right)\left(h_i-h_3\frac{\xi_i^{\cdot}}{\xi_3^{\cdot}}\right)\left(h_k-h_3\frac{\xi_k^{\cdot}}{\xi_3^{\cdot}}\right)=\mathrm{const}$$

$(i,\ k = 1,2;\ \delta_{ik}$ — символ Кронекера)

Для системы (2.6) легко находятся первые инегралы

$$\frac{\alpha_{12}\varphi_{22}+\alpha_{11}\varphi_{12}}{\alpha_{12}\varphi_{11}+\alpha_{13}\varphi_{12}}=C_1,\qquad \frac{\alpha_{12}\varphi_{11}+\alpha_{13}\varphi_{12}}{\alpha_{12}(\varphi_{12}^2-\varphi_{11}\varphi_{22})}=C_2 \qquad (2.8)$$

которые позволяют свести эту систему к одному уравнению

$$\frac{d\varphi_{11}}{dt}=\frac{\alpha_{13}\Lambda+\alpha\Lambda^{1/2}}{2C_2^2\alpha_{12}^2}$$

$$\Lambda=[\alpha_{13}-C_2\varphi_{11}(\alpha_{11}-C_1\alpha_{13})]^2+4C_2\alpha_{12}^2\varphi_{11}(C_1C_2\varphi_{11}+1)$$

$$\alpha=2C_2\alpha_{12}^2\varphi_{11}+\alpha_{13}^2-C_2\alpha_{13}\varphi_{11}(\alpha_{11}-C_1\alpha_{13})$$

Отсюда получаем

$$\varphi_{11}=\frac{2k\{C_2k\,[2\alpha_{12}^2-\alpha_{13}(\alpha_{11}-C_1\alpha_{13})]-2(t+C_3)\,\alpha_{13}(\alpha_{11}\alpha_{13}-\alpha_{12}^2)\}}{4(t+C_3)^2(\alpha_{11}\alpha_{13}-\alpha_{12}^2)^2-C_2^2k^2\,[(\alpha_{11}-C_1\alpha_{13})^2+4\alpha_{12}^2C_1]}$$

$$k=\frac{\mu_l}{\rho}c^2H_n^2-\frac{1}{\varphi^2}$$

Остальные $\varphi_{ij}(t)$ определяются из (2.7), (2.8). После подстановки φ_{ij} (t) в (2.5) окончательно получаем уравнение переноса для системы (2.1)

$$\sigma^{\cdot}+{}^1\!/_2\left[\frac{1}{t+C}+\frac{1}{t+C_0}\right]\sigma+T\sigma^2=0 \qquad (2.9)$$

которое с точностью до постоянных совпадает с уравнением переноса для обычной газовой динамики [4].

Из (2.9)

$$\sigma=\frac{1}{\sqrt{t+C}\,\sqrt{t+C_0}\,[M+2T\ln|\sqrt{t+C}+\sqrt{t+C_0}|]}$$

Здесь M, C, C_0 — произвольные постоянные, $T = L / k$, т. е. закон изменения $\sigma(t)$ вдоль бихарактеристик совпадает с законом изменения $\sigma(t)$ в случае обычной газовой динамики [4]. Когда

$$\frac{\mu_l}{\rho} H_n^2 - 1 = 0 \tag{2.10}$$

если считать, что **H** не параллельно **n**, характеристическая матрица опять имеет один правый и один левый нуль-вектор, и скачки производных определяются соотношениями

$$[\mathbf{H}_\varphi] = H_n \varphi^2 (\mathbf{H} \times \mathbf{n})\, \sigma, \quad [\mathbf{U}_\varphi] = \varphi^2 (\mathbf{H} \times \mathbf{n})\, \sigma, \quad [\rho_\varphi] = 0 \tag{2.11}$$

После подстановки соответствующих величин в (1.3) получаем, что коэффициенты при σ и σ^2 равны нулю, и уравнение переноса имеет вид $\dot\sigma = 0$, т. е. $\sigma = \mathrm{const}$ вдоль бихарактеристики. Слабые разрывы, которые имели место в начальный момент времени, сохраняют постоянную интенсивность.

Замечание. Если характеристические поверхности имеют постоянную кратность [1], слабые разрывы распространяются по бихарактеристическим лучам. Для характеристических поверхностей переменной кратности [1] общая теория неизвестна как для линейных, так и для квазилинейных систем. Исследование слабых разрывов магнитной газовой динамики показывает, что при переменной кратности характеристических поверхностей в одних случаях (например, если выполняется (2.10), **H** параллельно **n**, $c^2\varphi_i = (\mu_l / \rho) h_i H_n$ не получается системы обыкновенных уравнений для определения $\sigma_k(t)$, а в других — по-прежнему слабые разрывы распространяются по бихарактеристикам. Именно, если выполняется (2.10), **H** параллельно **n**, $c^2\varphi_i \neq (\mu_l / \rho) h_i H_n$, то скачки определяются соотношениями

$$\left[\frac{\partial u_i}{\partial \varphi}\right] = -\varphi_1 \sigma_i \quad (i = 2, 3)$$

$$\sum_{j=1}^{3} \varphi_j \left[\frac{\partial u_i}{\partial \Psi}\right] = 0 \quad [\mathbf{H}_\varphi] = -H_n [\mathbf{U}_\varphi], \quad [\rho_\varphi] = 0$$

и для определения $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$ получается система $\dot\sigma_1 = 0$, $\dot\sigma_2 = 0$, т. е. и в этом случае слабые разрывы сохраняют постоянную интенсивность.

Поступила 13 I 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Курант Р., Гильберт Д. Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.
2. Jeffrey A. The propagation of weak discontinuities in quasi-linear symmetric hyperbolic systems. Z. angew. Math und Phys., 1963, vol. 14, № 4 pp. 301—314.
3. Сидоров А. Ф. О нестационарных движениях газа, примыкающих к области покоя. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
4. Сидоров А. Ф. О некоторых пространственных течениях газа, примыкающих к области покоя. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.
5. Nitsche J. Über Unstetigkeiten in den Ableitungen von Zösungen quasilinearer hyperbolischer Differential-gleichungssysteme. J. Rational Mech. and Analysis, 1953, vol. 2, № 2, pp. 291—297.
6. Бай Ши И. Магнитная газодинамика и динамика плазмы. М., «Мир», 1964.